Vorl. Prof. Oestreich - Vertretung Prof. Paditz

09.01.2018 - Übung 2.KW

Aufg. 2.3. 3, 12, 14, 20c, 26a, 31i, 36, 42a

=======================================

Aufg. 3:

=========

DelVar x, t

done

Define $y(x,t)=\frac{x\text{^}2+t}{x-t}$

done

$\frac{d}{dx}(y(x,t))$

$$\frac{x^2-2\cdot t\cdot x-t}{(x-t)^2}$$

streng monoton fallend:

solve($x^2-2\cdot t\cdot x-t<0$, x)

$$\{t>x^2-2\cdot t\cdot x\}$$

Nullstellen: (Parabel nach oben geöffnet!)

solve($x^2-2\cdot t\cdot x-t=0$, x)

$$\left\{x=t-\sqrt{t^2+t},\ x=t+\sqrt{t^2+t}\right\}$$

für $t-\sqrt{t^2+t}<x_0<t+\sqrt{t^2+t}$ soll gelten $y'<0$.

Weiter: $x=x_0=1$, d.h. $t\neq 1$ (Nenner von y!)

Weiter: $t\neq 0$ und $t\neq -1$ (wegen Wurzel!)

solve$(t^2+t>0,t)$

$$\{t<-1,\ 0<t\}$$

Fall $t<-1$: $t-\sqrt{t^2+t}<0$ (klar) und $t+\sqrt{t^2+t}>1$ (Zielstellung wegen $x_0=1$)

grafisch:

y(x)=x+(x^2+x)^(1/2)	Y1:… Y2:…

für **$t<-1$ ist** $t+\sqrt{t^2+t}<0$, d.h. keine Lösung

Fall $t>0$:

solve$(t+\sqrt{t^2+t}=1,t)$

$$\left\{t=\frac{1}{3}\right\}$$

Lösung: $t>\frac{1}{3}$ und $t\neq -1$

elegante kurze Lösung (sofort $x=1$ nutzen):

====================

$y'(1)<0$ bedeutet

$\left(\frac{d}{dx}(y(x,t))\,|\,x=1\right)<0$

$$\frac{-(3\cdot t-1)}{(t-1)^2}<0$$

solve(ans, t)

$$\left\{t>\frac{1}{3}\ \text{and}\ t\neq 1\right\}$$

stop

Aufg. 12

=========

Define $P(R)=U_0\hat{}2*R/(R+R_i)\hat{}2$

done

P(R)

$$\frac{R\cdot U_0^{\,2}}{(R_i+R)^2}$$

$$\frac{d}{dR}(P(R))=0$$

$$\frac{R_i\cdot U_0^{\,2}-R\cdot U_0^{\,2}}{(R_i+R)^3}=0$$

solve(ans,R)

$\{R=R_i\}$

$$\frac{d^2}{dR^2}(P(R))$$

$$\frac{-\left(4\cdot R_i\cdot U_0^{\,2}-2\cdot R\cdot U_0^{\,2}\right)}{(R_i+R)^4}$$

$ans|R=R_i$

$$\frac{-U_0^{\,2}}{8\cdot R_i^{\,3}}$$

Damit liegt ein Max. vor!

stop

Aufg. 14 (Hand-Skizze)

=====================

Höhe Kegel: $h=\sqrt{3\hat{}2-r\hat{}2}$

DelVar r

done

Define Vz(r)=π*r^2*2

done

Define Vk(r)=π/3*r^2*√(3^2-r^2)

done

Define V(r)=Vz(r)+Vk(r)

done

V(r)

$$\frac{r^2\cdot\sqrt{-r^2+9}\cdot\pi}{3}+2\cdot r^2\cdot\pi$$

$$\frac{d}{dr}(V(r))=0$$

$$\frac{-\left(r^3\cdot\pi-4\cdot r\cdot\sqrt{-r^2+9}\cdot\pi-6\cdot r\cdot\pi\right)}{\sqrt{-r^2+9}}=0$$

$$\text{solve}\left(\left(r^3\cdot\pi-4\cdot r\cdot\sqrt{-r^2+9}\cdot\pi-6\cdot r\cdot\pi\right)=0, r\right)$$

$$\left\{r=0, r=-\sqrt{2\cdot(2\cdot\sqrt{7}-1)}, r=\sqrt{2\cdot(2\cdot\sqrt{7}-1)}\right\}$$

approx(ans)

{r=0, r=−2.929676645, r=2.929676645}

$$\frac{d^2}{dr^2}(V(r))$$

$$\frac{-\left(r^4\cdot\sqrt{-r^2+9}\cdot\pi+7\cdot r^2\cdot(-r^2+9)^{\frac{3}{2}}\cdot\pi-12\cdot\sqrt{-r^2+9}\cdot(-r^2+9\right.}{3\cdot(-r^2+9)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-r^2+9}}$$

$$ans|r=\sqrt{2\cdot(2\cdot\sqrt{7}-1)}$$

$$-\left(4\cdot(2\cdot\sqrt{7}-1)^2\cdot\sqrt{-4\cdot\sqrt{7}+11}\cdot\pi-18\cdot(-2\cdot(2\cdot\sqrt{7}-1)+9)^{\frac{3}{2}}\right.$$

simplify(ans)

$$-56\cdot\pi-20\cdot\sqrt{7}\cdot\pi$$

approx(ans)

$$-342.1666462$$

Damit liegt ein Max. vor!

Anmerkung 3D-Grafik:

Zylinder mit aufgesetztem Kegel

Parameterwahl: $0<s<2$, $\pi/4<t<2\pi$

Zylinder zum "Reingucken"

r:=2.929676645

$$\frac{2384748}{813997}$$

Definition Zylinder:

Define Xst1(s,t)=r*cos(t)

done

Define Yst1(s,t)=r*sin(t)

done

Define Zst1(s,t)=s

done

Definition Kegel:

Define Xst2(s,t)=r*(1-s/2)*cos(t)

done

Define Yst2(s,t)=r*(1-s/2)*sin(t)

done

Define Zst2(s,t)=s+2

done

Definition Grundfläche:

Define Xst3(s,t)=r*(1-s/2)*cos(t)

done

Define Yst3(s,t)=r*(1-s/2)*sin(t)

done

Define Zst3(s,t)=0

done

stop

Aufg. 20c (Hand-Skizze)

=======================

Define y(x)=tan(x)

done

in P(π/4,1) konvex (s. Skizze)

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))$$

$$2\cdot\left((\tan(x))^2+1\right)\cdot\tan(x)$$

ans|x=π/4

4

Krümmung:

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))/(1+\left(\frac{d}{dx}(y(x))\right)\text{^}2)\text{^}(3/2)$$

$$\frac{2\cdot\left((\tan(x))^2+1\right)\cdot\tan(x)}{\left(\left((\tan(x))^2+1\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ans|x=π/4

$$\frac{4\cdot\sqrt{5}}{25}$$

κ=approx$\left(\frac{4\cdot\sqrt{5}}{25}\right)$

$$\kappa=0.3577708764$$

Krümmungsradius:

$1/\left(\frac{4\cdot\sqrt{5}}{25}\right)$

$$\frac{5\cdot\sqrt{5}}{4}$$

ρ=approx$\left(\frac{5\cdot\sqrt{5}}{4}\right)$

$$\rho=2.795084972$$

stop

Aufg. 26a (Skizze)

=================

sin(3x)/x

$\frac{\sin(3x)}{x}\to\frac{0}{0}$ unbestimmte Form für $x\to 0$

R. v. l'Hospital:

$\frac{d}{dx}(\sin(3x))/1$

$$3\cdot\cos(3\cdot x)$$

ans|x=0

$$3$$

Lösung: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{x}\right)=3$

Probe:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{x}\right)$$

3

stop

Aufg. 31i

=========

Define y(x)=ln(x)/x

done

Skizze | Y1:··· Y2:···

solve(y(x)=0, x)

{x=1}

Nullstelle: x=1

Db(y(x))=(0, ∞)

Wb(y(x))=(−∞, y_max) mit y_max=1/***e***

$$\frac{d}{dx}(y(x))=0$$

$$\frac{-(\ln(x)-1)}{x^2}=0$$

solve(ans, x)

{x=***e***}

y(***e***)

$$e^{-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))$$

$$\frac{2\cdot\ln(x)-3}{x^3}$$

ans|x=***e***

$$-e^{-3}$$

also Max., Hochpunkt $H(e, e^{-1})$

$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))=0$

$$\frac{2\cdot\ln(x)-3}{x^3}=0$$

solve(ans, x)

$$\left\{x=e^{\frac{3}{2}}\right\}$$

Wendestelle: $x=e^{\frac{3}{2}}$

$y(e^{\frac{3}{2}})$

$$\frac{3\cdot e^{-\frac{3}{2}}}{2}$$

Wendepunkt $W(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3\cdot e^{-\frac{3}{2}}}{2})$

Asymptote: vertikal $x=0$, horizontal $y=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}(y(x))$

$$0$$

konkav für $0<x<e^{\frac{3}{2}}$

konvex für $e^{\frac{3}{2}}<x<\infty$

stop

Aufg. 36 (Taylorformel)

=====================

DelVar x

done

Define $f(x)=\sqrt{1-x}$

done

x=0.05, ges. f(x) mit 6 Dezimalen genau

approx(f(0.05))

0.9746794345

taylor(f(x),x,5)

$$\frac{-7\cdot x^5}{256}-\frac{5\cdot x^4}{128}-\frac{x^3}{16}-\frac{x^2}{8}-\frac{x}{2}+1$$

approx(ans|x=0.05)

0.9746794348

Bereits 9 Stellen genau!

Restglied nach Lagrange untersuchen mit x_0=0:

$x_0=0<\xi<x=0.05$

$R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)*(x-x_0)^{n+1}/(n+1)!$

z.B. n=3:

Define $R_n(x)=\frac{d^4}{d\xi^4}(f(\xi))*0.05\text{^}4/4!$

done

$|R_n(x)|<10\text{^}(-6)$

$$\frac{1}{4096000\cdot(-\xi+1)^{\frac{7}{2}}}<\frac{1}{1000000}$$

linke Seite maximal für ξ=0.05

$$\frac{1}{4096000\cdot(-\xi+1)^{\frac{7}{2}}}|\xi=0.05$$

$$\frac{\sqrt{95}}{33362176}$$

approx(ans)

2.921510379E-7

n=4 ergibt die gewünschte Kleinheit des Restgliedes:

taylor(f(x),x,4)

$$\frac{-5\cdot x^4}{128}-\frac{x^3}{16}-\frac{x^2}{8}-\frac{x}{2}+1$$

approx(ans|x=0.05)

0.9746794434

gewünschte Genauigkeit erreicht für n=4.

stop

Aufg. 42a

==========

solve(x^2−2*cos(x)=0,x)

{x=−1.021689954,x=1.021689954}

x^2=2·cos(x) Y1:⋯ Y2:⋯

Startwert $x_0=1$

Define f(x)=x^2−2*cos(x)

done

Iterationsvorschrift:

$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$

1⇒x

1

$x-f(x)/\frac{d}{dx}(f(x))\Rightarrow x$

$$\frac{2\cdot\cos(1)-1}{2\cdot\sin(1)+2}+1$$

$x-f(x)/\frac{d}{dx}(f(x))\Rightarrow x$

$$\frac{-\left(\left(\frac{2\cdot\cos(1)-1}{2\cdot\sin(1)+2}+1\right)^2-2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\cos(1)-1}{2\cdot\sin(1)+2}+1\right)\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\cos(1)-1}{2\cdot\sin(1)+2}+1\right)+2\cdot\left(\frac{2\cdot\cos(1)-1}{2\cdot\sin(1)+2}+1\right)}+\frac{2\cdot\cos(1}{2\cdot\sin(1}$$

besser mit approx (wegen Formelmonster)

$1\Rightarrow x$

1

$\text{approx}(x-f(x)/\frac{d}{dx}(f(x)))\Rightarrow x$

1.02188593

$\text{approx}(x-f(x)/\frac{d}{dx}(f(x)))\Rightarrow x$

1.02168997

$\text{approx}(x-f(x)/\frac{d}{dx}(f(x)))\Rightarrow x$

1.021689954

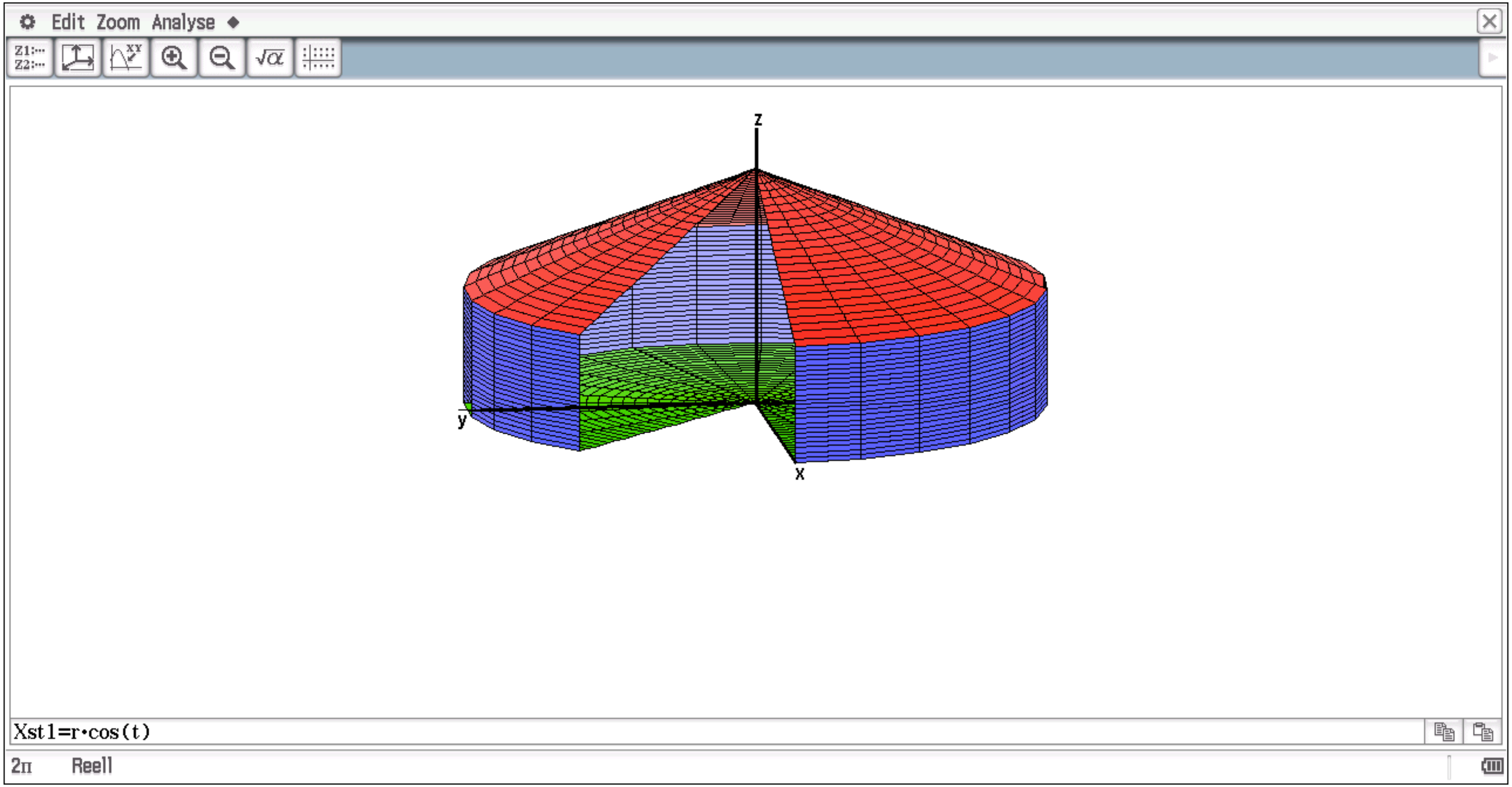
Ergebnis: x≈1,02169≈1,0217

wegen Symmetrie (gerade Funktion)

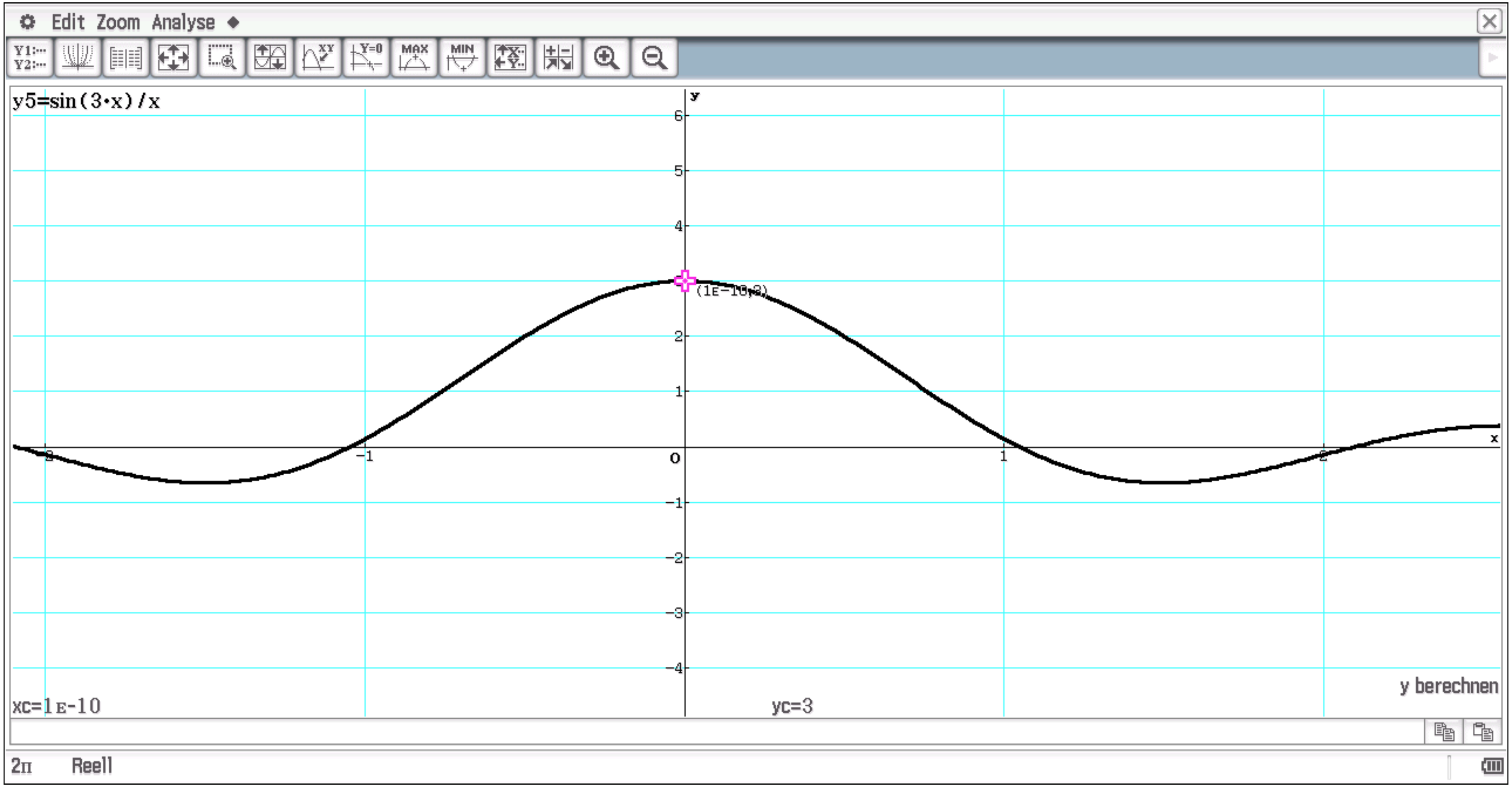
auch x≈−1,02169≈−1,0217

stop

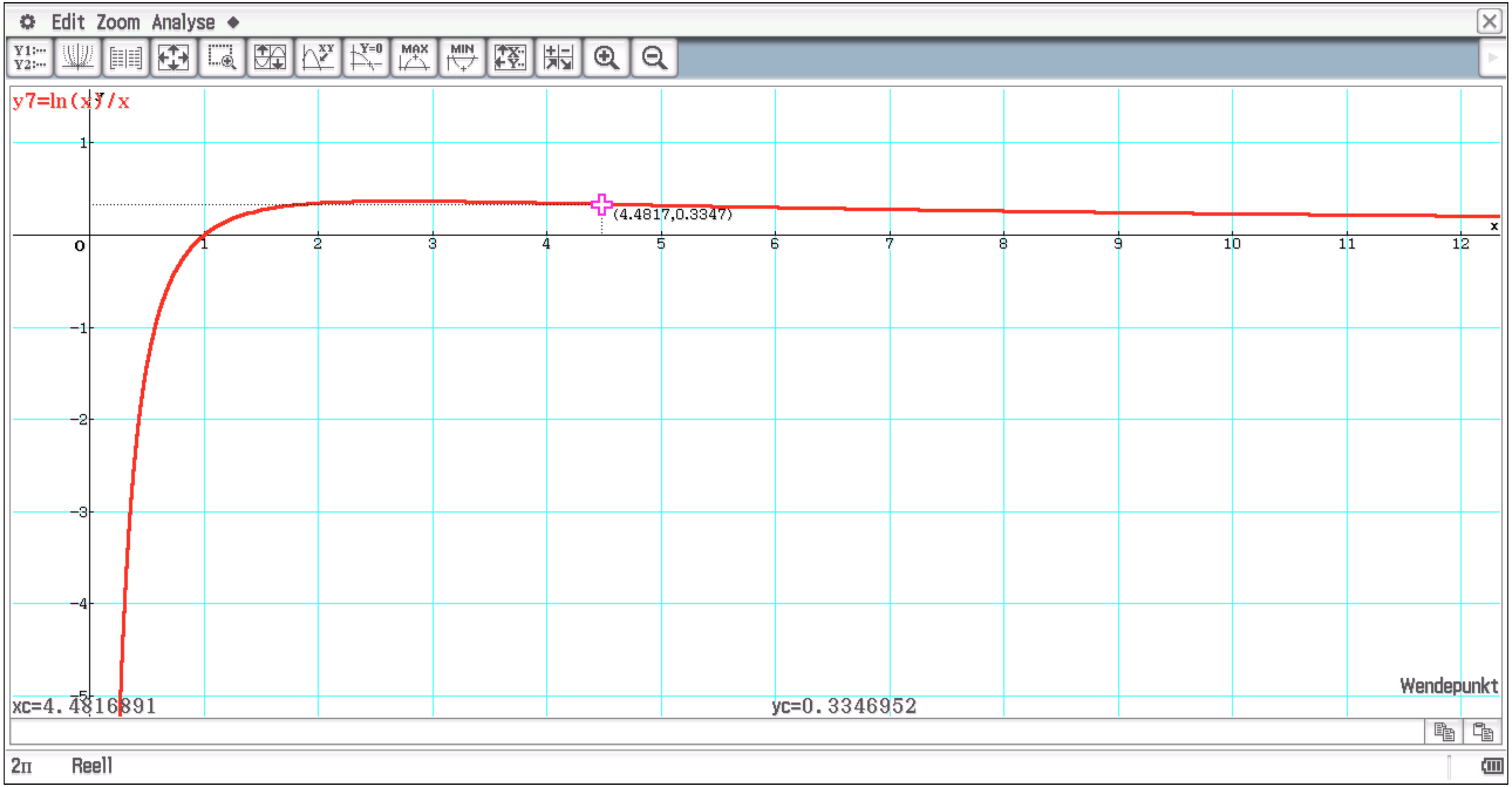
Grafik zu Aufgabe 2.3.3



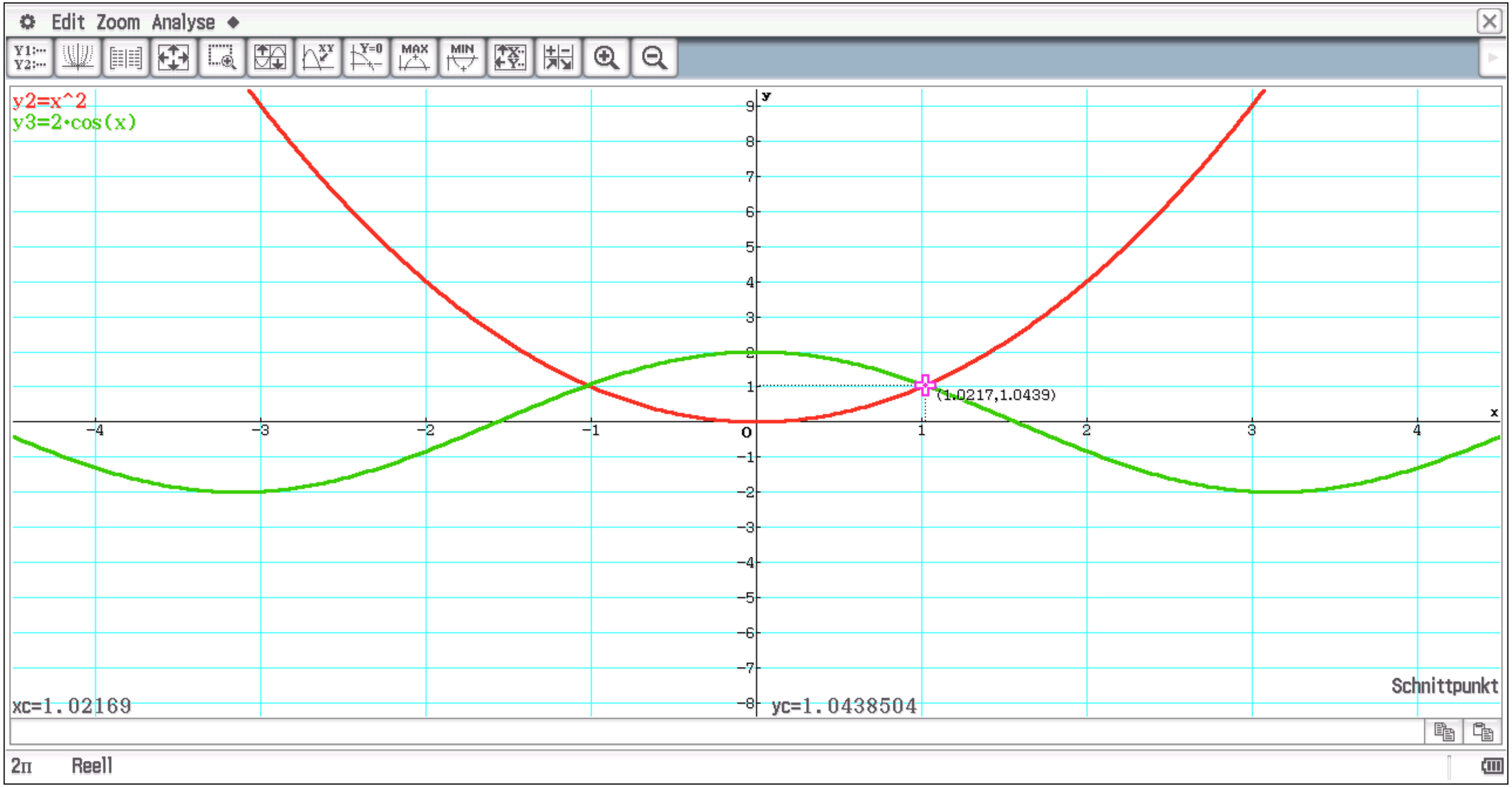
Grafik zu Aufgabe 2.3.14



Grafik zu Aufgabe 2.3.26a



Grafik zu Aufgabe 2.3.31i



Grafik zu Aufgabe 2.3.42a