Vorl. Prof. Oestreich - Vertretung Prof. Paditz

23.01.2018 - Übung 4.KW

Aufg. 2.5.2,4,8f,12c,14c,26,24,25

===============================

Aufg. 2

=======

Nach oben und nach unten geöffnete Parabeln

Define y1(x)=x^2−2

done

Define y2(x)=−x^2+2x+2

done

Schnittstellen:

solve(y1(x)=y2(x),x)

{x=−1,x=2}

$$\int_{-1}^{2} y2(x)-y1(x)dx$$

9

2D−Grafik Y1:··· Y2:···

stop

Aufg. 4

========

Define r3(θ)=a*θ

done

2D−Grafik Y1:··· Y2:···

Leibnizsche Sektorformel mit $0<\theta<\pi/2$

$$A=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}(a*\theta)^{2}d\theta$$

$$A=\frac{a^{2}\cdot\pi^{3}}{48}$$

stop

Aufg. 8f

=========

Kurvenlänge

Define $xt4(t)=e^{t}\cos(t)$

done

Define $yt4(t)=e^{t}\sin(t)$

done

$$\frac{d}{dt}(xt4(t))$$

$$\cos(t)\cdot e^{t}-\sin(t)\cdot e^{t}$$

$\frac{d}{dt}(yt4(t))$

$$\cos(t)\cdot e^{t}+\sin(t)\cdot e^{t}$$

$\left(\cos(t)\cdot e^{t}-\sin(t)\cdot e^{t}\right)^{2}+\left(\cos(t)\cdot e^{t}+\sin(t)\cdot e^{t}\right)^{2}$

$$\left(\cos(t)\cdot e^{t}+\sin(t)\cdot e^{t}\right)^{2}+\left(\cos(t)\cdot e^{t}-\sin(t)\cdot e^{t}\right)^{2}$$

simplify(ans)

$$2\cdot e^{2\cdot t}$$

$s=\int_{0}^{4}\sqrt{2\cdot e^{2\cdot t}}\,dt$

$$s=\sqrt{2}\cdot e^{4}-\sqrt{2}$$

approx(ans)

$$s=75.79923069$$

2D-Grafik	Y1:⋯ Y2:⋯

stop

Aufg. 12c

==========

Define $y5(x)=(\sin(x))^{2}$

done

Define $y6(x)=0$

done

Define $x7(y)=0$

done

Define $x8(y)=\pi$

done

2D−Grafik

$A{:=}\int_0^{\pi}(\sin(x))^2dx$

$\frac{\pi}{2}$

$xs{:=}\frac{1}{A}\int_0^{\pi}x*(\sin(x))^2dx$

$\frac{\pi}{2}$

xs klar: Intervallmitte aus Symmetriegründen

$ys{:=}\frac{1}{2A}\int_0^{\pi}(\sin(x))^4dx$

$\frac{3}{8}$

$S(\frac{\pi}{2},\frac{3}{8})$

stop

Aufg. 14c

==========

Rotationsvolumen

Define $y(x)=e^x$

done

$V{:=}\pi\int_0^1 e^{2x}dx$

$\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\pi$

approx(ans)

10.03590585

3D−Grafik

Define Xst1(s,t)=t

done

Define $Yst1(s,t)=e^{t}\cos(s)$

done

Define $Zst1(s,t)=e^{t}\sin(s)$

done

3D−Grafik

stop

Aufg. 26

=========

$I0:=\int_0^1 e^{-x^2}dx$

0.7468241328

Define $f(x)=e^{-x^2}$

done

h:=1/n

$\frac{1}{n}$

Define $I(n)=\frac{h}{3}\left(f(0)+f(1)+4\left(\sum_{k=1}^{n/2}(f((2k-1)*h))\right)+2\left(\ldots\right.\right.$

done

approx(I(2))

0.7471804289

approx(|I0−I(2)|)

$3.562961095E{-4}$

approx(I(4))

0.7468553798

approx(|I0−I(4)|)

$3.124699099E{-5}$

gewünschte Genauigkeit erreicht!

approx(I(6))

0.7468303915

approx(|I0−I(6)|)

$6.258689348E{-6}$

approx(I(8))

0.7468261205

approx(|I0−I(8)|)

$1.98772747E{-6}$

Fehlerabschätzung:

$$\frac{d^4}{dx^4}(f(x))$$

$$\left(16\cdot x^4-48\cdot x^2+12\right)\cdot e^{-x^2}$$

fMax(|ans|, x, 0, 1)

{MaxValue=12, x=0}

$$\frac{1}{180*n^4}*12<5*10^{-5}$$

$$\frac{1}{15\cdot n^4}<\frac{1}{20000}$$

solve(ans, n)

$$\left\{n<\frac{-2\cdot 250^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}}, \frac{2\cdot 250^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}}<n\right\}$$

approx(ans)

$\{n<-6.042750795, 6.042750795<n\}$

mit **n=8** wird die gewünschte Genauigkeit mit Sicherheit erreicht.

Bemerkung:

Gaußsches Fehlerintegral $\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2}dt$ ist

tabelliert

bzw. programmiert (Normalverteilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung)

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{u} e^{-t^2/2}dt$$

Subst.: $x=t/\sqrt{2}$, $dx=dt/\sqrt{2}$

$$I0:=\int_0^1 e^{-x^2}dx=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} e^{-t^2/2}dt$$

0.7468241326

somit $\left(\Phi(\sqrt{2})-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}=I0$

$\left(\text{normCDf}(-\infty, \sqrt{2}, 1, 0)-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}$

0.7468241328

stop

Aufg. 24

========

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

$\frac{\pi}{4}$

approx(ans)

0.7853981634

Define $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

done

Tapezformel:

Define $It(n)=\frac{1}{2n}*\left(f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(k/n))\right)$

done

approx(It(2))

0.775

approx(It(3))

0.7807692308

approx(It(4))

0.7827941176

approx(seq(It(n),n,2,10))

{0.775,0.7807692308,0.7827941176,0.7837315285

Simpsonsche Formel:

Define $Is(n)=\frac{1}{3n}\left(f(0)+f(1)+4\left(\sum_{k=1}^{n/2}(f((2k-1)/n))\right)+2\left(\right.\right.$

done

approx(Is(2))

0.7833333333

approx(Is(4))

0.7853921569

approx(seq(Is(n),n,2,10,2))

{0.7833333333,0.7853921569,0.7853979452,0.785▶

Fazit: Simpsonsche Formel konvergiert schneller!

It(4)≈0.78279≈0.7828

Is(4)≈0.785392≈0.7854

exakt: I≈0.785398≈0.7854

stop

Aufg. 25

=========

Define $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

done

Fehlerabschätzung:

$\frac{d^4}{dx^4}(f(x))$

$$\frac{120\cdot x^4-240\cdot x^2+24}{(x^2+1)^5}$$

fMax(|ans|,x,0,1)

{MaxValue=24,x=0}

$\frac{1}{180*n^4}*12<1*10^{-4}$

$$\frac{1}{15\cdot n^4}<\frac{1}{10000}$$

solve(ans,n)

$$\left\{n<\frac{-2\cdot 125^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}},\ \frac{2\cdot 125^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}}<n\right\}$$

approx(ans)

$$\{n<-5.081327482, 5.081327482<n\}$$

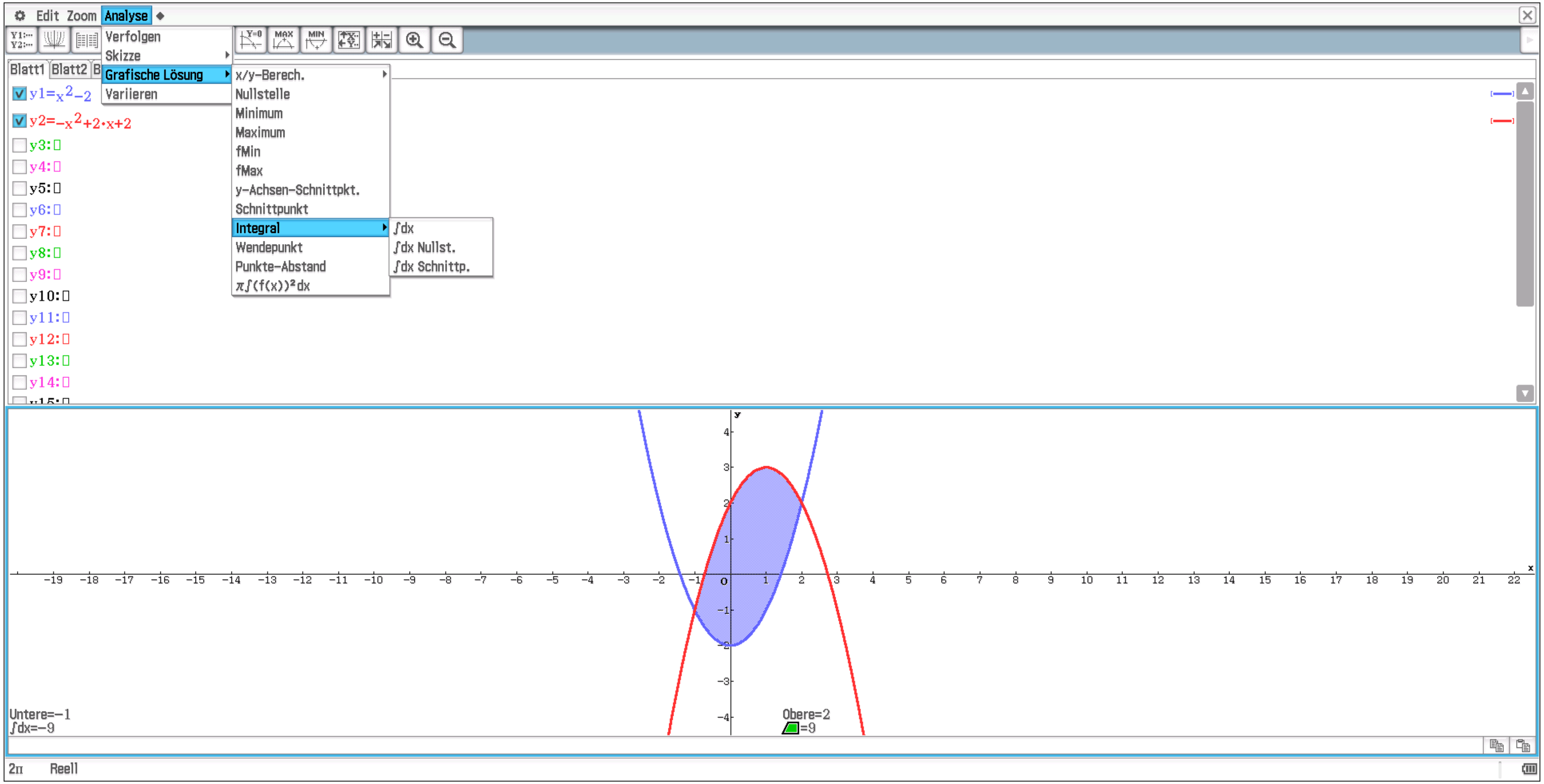
mit **n=**6 wird die gewünschte Genauigkeit mit Sicherheit erreicht.

approx(|Is(4)−π/4|)

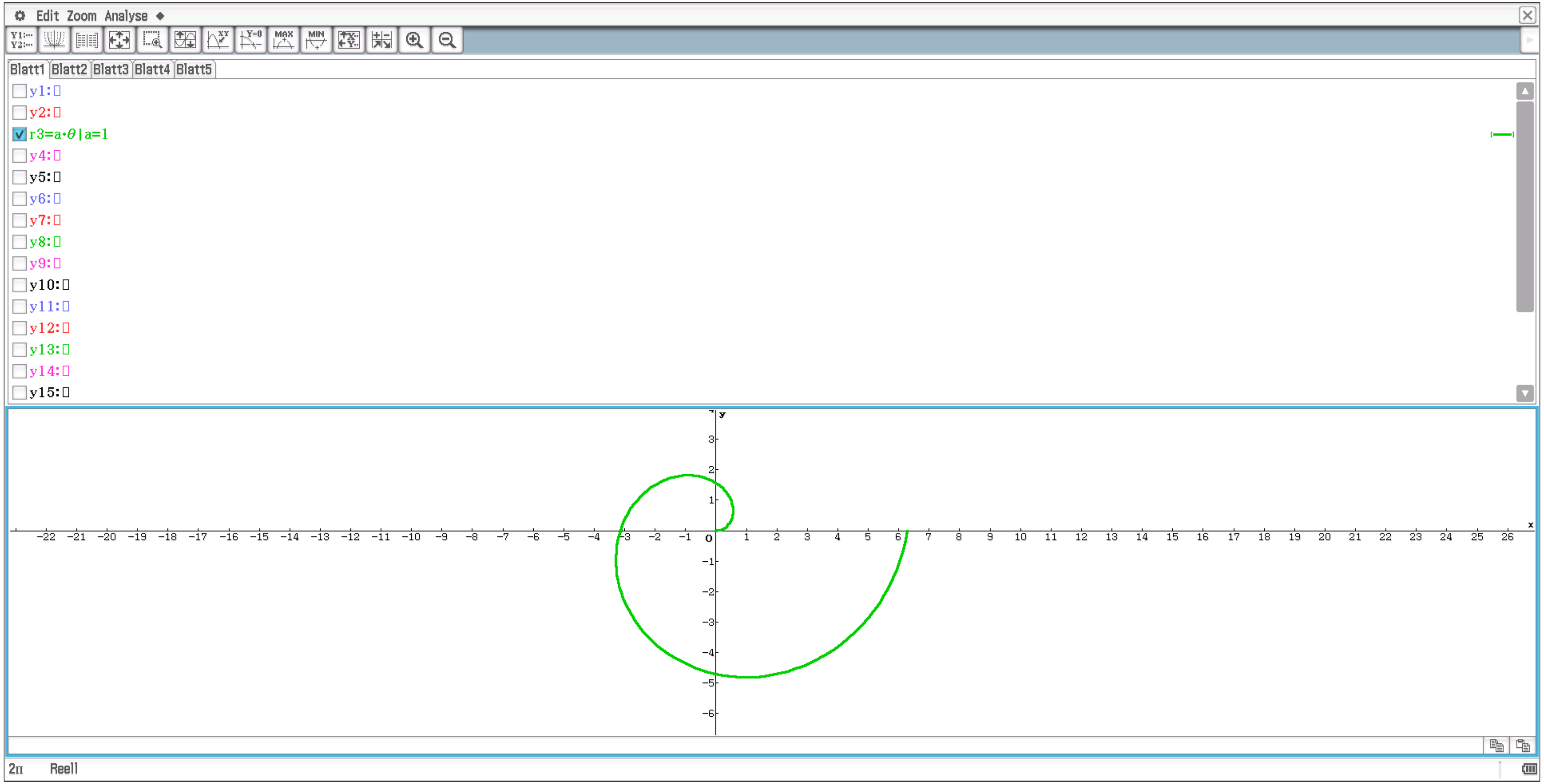
$$6.006534703\text{E-}6$$

Der **tatsächliche Fehler** in 24b) beträgt $6*10^{-6}$.

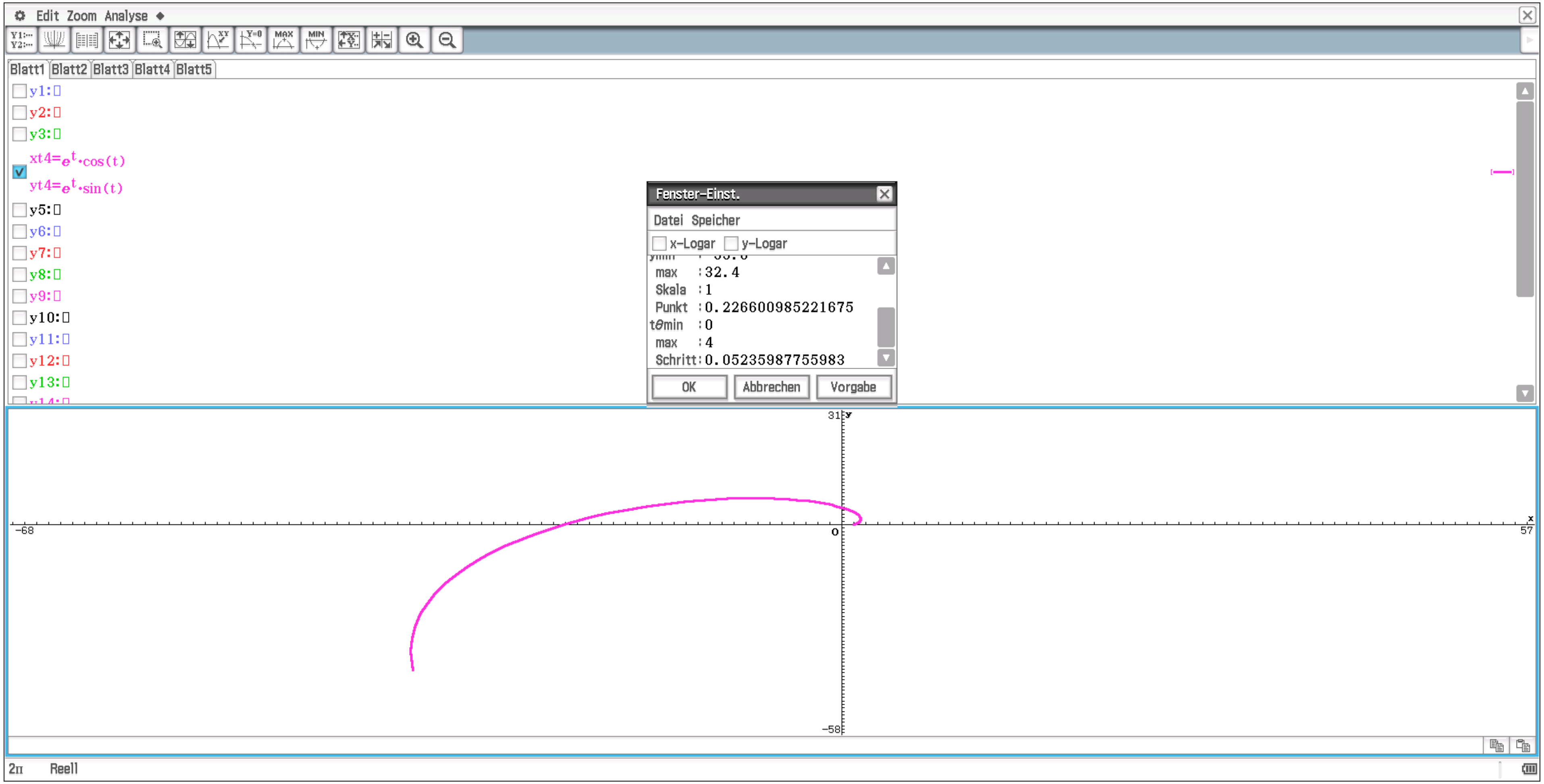
stop



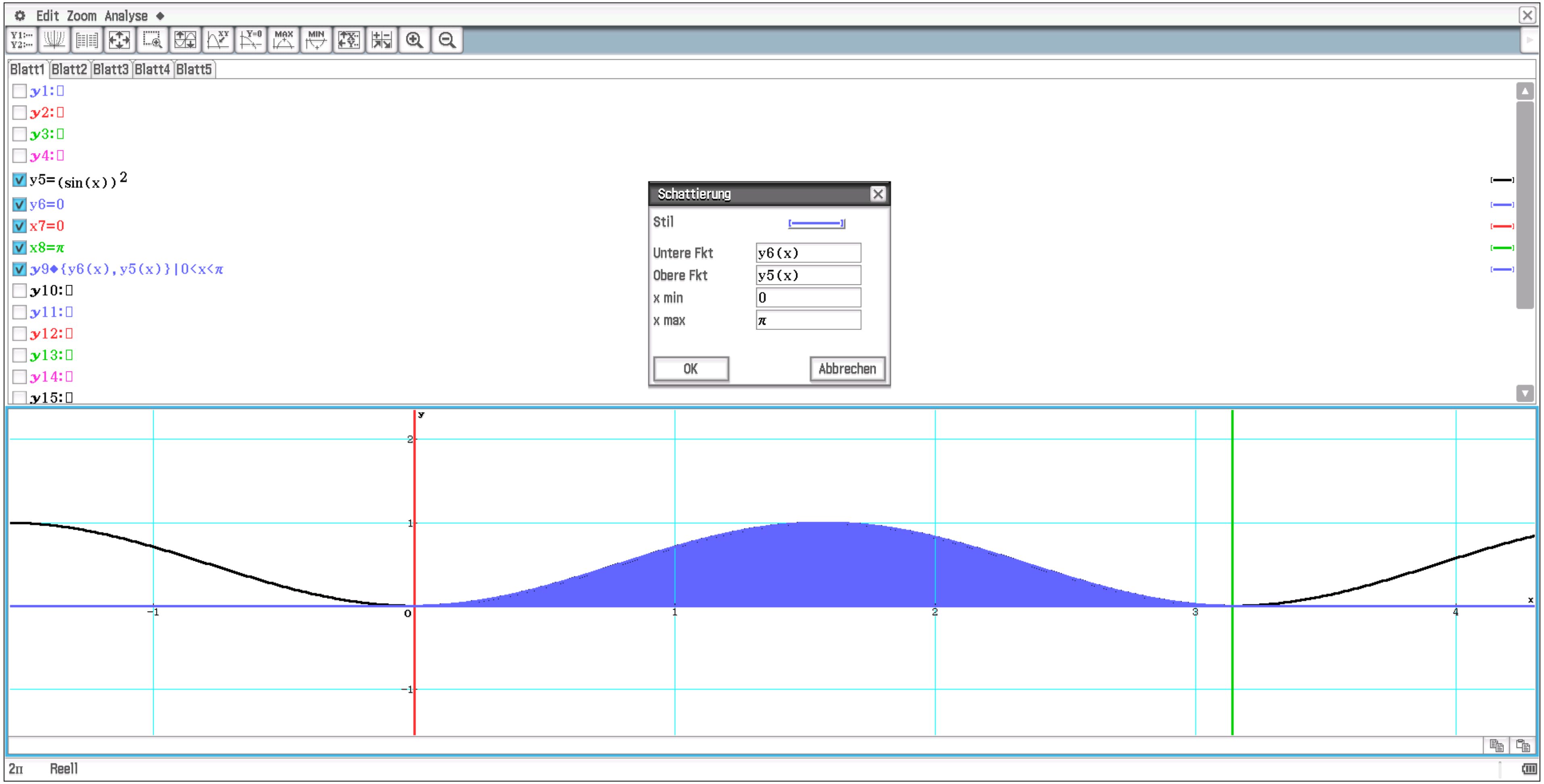
Grafik zu 2.5.2



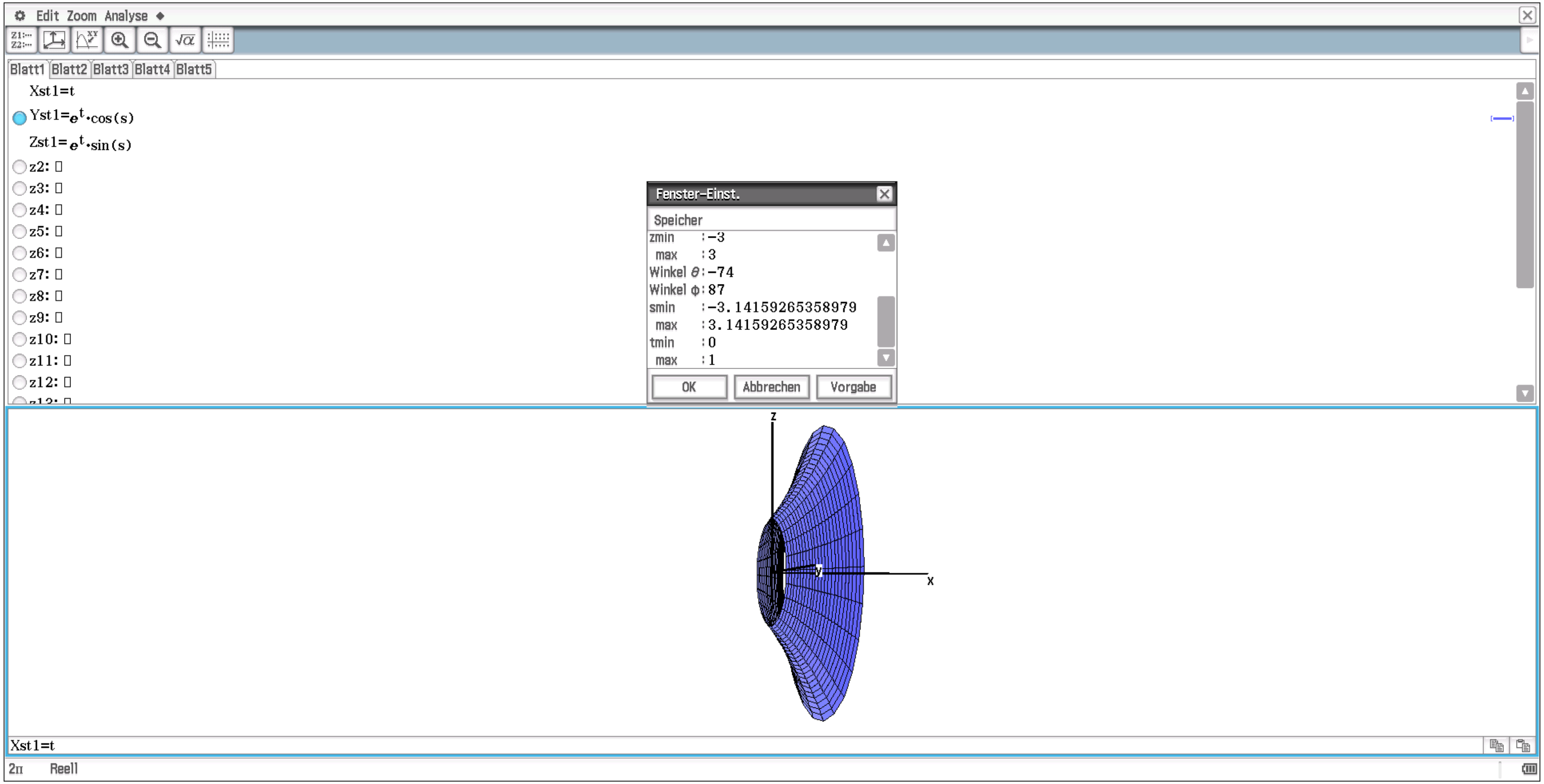
Grafik zu 2.5.4



Grafik zu 2.5.8f



Grafik zu 2.5.12c



Grafik zu 2.5.14c