Vorl. Prof. Oestreich - Vertretung Prof. Paditz

24.01.2018 - Repetitorium 4.KW

Aufg. 2.4. 1a, 5, 6b, 7e, 10a, 11j, 19b, f

==================================

Aufg. 1a

========

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 e^x dx$$

$$e-1$$

stop

Aufg. 5

========

Integation über ein Polstelle hinweg: uneigentliches Integral

mit dem CAS des GTR:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\infty$$

per Def. mit u<0 und v>0

$$\int_{-1}^{u} \frac{1}{x^2} dx + \int_{v}^{2} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\frac{-1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{u \to 0^-} \left(\int_{-1}^{u} \frac{1}{x^2} dx \right)$$

$$\infty$$

$$\lim_{v \to 0^+} \left(\int_{v}^{2} \frac{1}{x^2} dx \right)$$

$$\infty$$

Das uneigentliche Integal divergiert gegen ∞, d.h. es existiert nicht!

Anmerkung: CHW existiert ebenfalls nicht!

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{2} \frac{1}{x^2} dx \right)$$

$$\infty$$

stop

Aufg. 6b

=========

$$\int_1^5 \ln(t)dt = \int_1^5 1 * \ln(t)dt$$

1 integieren zu t

ln(t) ableiten zu 1/t

$$\int_1^5 1 * \ln(t)dt = (5 * \ln(5) - 1 * \ln(1)) - \int_1^5 t * \frac{1}{t} dt = 5 * \ln(5) - (5$$

Kontrolle:

$$\int_1^5 \ln(t)dt$$

$$5 \cdot \ln(5) - 4$$

approx(ans)

$$4.047189562$$

stop

Aufg. 7e

=========

$$\int \sin(x) * e^{\cos(x)} \, dx$$

Subst.: $t=\cos(x)$, $dt=-\sin(x)dx$

$$\int -1 * e^{t} dt = -e^{t} = -e^{\cos(x)} + C$$

Kontrolle:

$$\int \sin(x) * e^{\cos(x)} \, dx$$

$$-e^{\cos(x)}$$

stop

Aufg. 10a

==========

$$\int \frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2} dx$$

$$\frac{-32\cdot\ln(|x+2|)}{3}+2\cdot\ln(|x+1|)+\frac{2\cdot\ln(|x-1|)}{3}+4\cdot x$$

in Teilschritten:

unecht gebrochen rat. Fkt. zerlegen

$$\text{expand}\left(\frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}, x\right)$$

$$\frac{-32}{3\cdot(x+2)}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{3\cdot(x-1)}+4$$

ganzrat. Fkt. ist 4:

$$\frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}-4$$

$$\frac{4\cdot x^3}{x^3+2\cdot x^2-x-2}-4$$

simplify(ans)

$$\frac{-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)}{(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$$

echt gebr. rat. Fkt. ist $\frac{-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)}{(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

Ansatz PBZ:

$$\frac{-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)}{(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)}{(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

ans*(x+2)·(x+1)·(x−1)

$$-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)=(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\right)$$

simplify(ans)

$$-8\cdot x^2+4\cdot x+8=A\cdot x^2+B\cdot x^2+C\cdot\left(x^2+3\cdot x+2\right)+B\cdot x-A-2\cdot B$$

expand(ans)

$$-8\cdot x^2+4\cdot x+8=A\cdot x^2+B\cdot x^2+C\cdot x^2+B\cdot x+3\cdot C\cdot x-A-2\cdot B+2\cdot C$$

Koeff.−vergleich:

$-8=A+B+C \Rightarrow Gl1$

$$-8=A+B+C$$

$4=B+3C \Rightarrow Gl2$

$$4=B+3\cdot C$$

$8=-A-2\cdot B+2\cdot C \Rightarrow Gl3$

$$8=-A-2\cdot B+2\cdot C$$

$$\begin{cases} Gl1 \\ Gl2 \\ Gl3 \end{cases}\Bigg|_{A,B,C}$$

$$\left\{A=-\frac{32}{3}, B=2, C=\frac{2}{3}\right\}$$

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1} \mid ans$$

$$\frac{-32}{3\cdot(x+2)}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{3\cdot(x-1)}$$

$$\int_{\square}^{\square}(4+ans)\,dx+C$$

$$\frac{-32\cdot\ln(|x+2|)}{3}+2\cdot\ln(|x+1|)+\frac{2\cdot\ln(|x-1|)}{3}+4\cdot x+C$$

Alterntiv: x−Werte einsetzen

$$-8\cdot x^2+4\cdot x+8=A\cdot x^2+B\cdot x^2+C\cdot x^2+B\cdot x+3\cdot C\cdot x-A-2\cdot B+2\cdot C \Rightarrow Gl$$

$$-8\cdot x^2+4\cdot x+8=A\cdot x^2+B\cdot x^2+C\cdot x^2+B\cdot x+3\cdot C\cdot x-A-2\cdot B+2\cdot C$$

$Gl \mid x=0 \Rightarrow Gl1$

$$8=-A-2\cdot B+2\cdot C$$

$Gl \mid x=1 \Rightarrow Gl2$

$$4=6\cdot C$$

$Gl \mid x=-1 \Rightarrow Gl3$

$$-4=-2\cdot B$$

$$\begin{cases} Gl1 \\ Gl2 \\ Gl3 \end{cases}\Bigg|_{A,B,C}$$

$$\left\{A=-\frac{32}{3}, B=2, C=\frac{2}{3}\right\}$$

usw.

stop

Aufg. 11j

==========

$$\int \frac{3e^{x}+4/e^{x}+2}{1+(e^{x})^{2}}dx+C$$

$$-4\cdot e^{-x}+C-\ln(e^{-2\cdot x}+1)+\tan^{-1}(e^{-x})$$

$R(t)=\dfrac{3t+4/t+2}{1+t^{2}}$ mit $t=e^{x}$, $dt=e^{x}dx=tdx$

Subst.:

$$\int \frac{3t+4/t+2}{1+t^{2}}\frac{1}{t}dt$$

$$\frac{3t+4/t+2}{1+t^{2}}\frac{1}{t}$$

$$\frac{3\cdot t+\frac{4}{t}+2}{t\cdot(t^{2}+1)}$$

expand(ans, t)

$$\frac{-(2\cdot t+1)}{t^{2}+1}+\frac{2}{t}+\frac{4}{t^{2}}$$

PBZ für echt gebr. rat. Fkt.

$$\int \frac{-(2\cdot t+1)}{t^{2}+1}+\frac{2}{t}+\frac{4}{t^{2}}dt$$

$$-\ln(t^{2}+1)+2\cdot\ln(|t|)-\tan^{-1}(t)-\frac{4}{t}$$

ans+C | $t=e^{x}$

$$-4\cdot e^{-x}+2\cdot x+C-\ln(e^{2\cdot x}+1)-\tan^{-1}(e^{x})$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}(-4\cdot e^{-x}+2\cdot x+C-\ln(e^{2\cdot x}+1)-\tan^{-1}(e^{x}))$$

$$\frac{(3\cdot e^{2\cdot x}+2\cdot e^{x}+4)\cdot e^{-x}}{e^{2\cdot x}+1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-4\cdot e^{-x}-\ln\left(e^{-2\cdot x}+1\right)+\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)$$

$$\frac{(3\cdot e^{2\cdot x}+2\cdot e^{x}+4)\cdot e^{-x}}{e^{2\cdot x}+1}$$

Die beiden Lösungsdarstellungen sind identisch!

Nachweis: Es gilt

$2\cdot x-\ln\left(e^{2\cdot x}+1\right)=-\ln\left(e^{-2\cdot x}+1\right) \Leftrightarrow$

$\ln(e^{2\cdot x})-\ln\left(e^{2\cdot x}+1\right)+\ln\left(e^{-2\cdot x}+1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{e^{2\cdot x}(e^{-2\cdot x}+1)}{e^{2\cdot x}+1}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{1+e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}+1}\right)=0$ usw.

außerdem $\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)=-\tan^{-1}\left(e^{x}\right)+\text{const}.$

denn $\arctan(\frac{1}{t})+\arctan(t)=\frac{\pi}{2}$ $(t>0)$,

wobei $\frac{\pi}{2}$ in C eingeht.

Damit erhält man über das CAS Anregungen, über unterschiedliche Darstellungen nachzudenken.

stop

Aufg. 19b

========

$$\int_0^{\infty} x e^{x} dx$$

$$\infty$$

Das Integral divergiert, d.h. es ex. nicht.

schrittweise:

$$\int_0^v x e^x dx$$

$$v \cdot e^v - e^v + 1$$

$$\lim_{v \to \infty} \left((v-1) \cdot e^v + 1 \right)$$

$$\infty$$

stop

Aufg. 19f

========

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$\frac{3}{2}$$

Das Integral konvergiert, d.h. es existiert.

schrittweise:

$$\int_u^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$\frac{-3 \cdot u^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\lim_{u \to 0^+} \left(\frac{-3 \cdot u^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{3}{2}$$

stop