

TEST 1 (Prof. Preuß)

=====

Aufg. 1

geg. Mengen

$$A = \{n \mid n \in \mathbf{N}, n \leq 6\},$$

$$B = \{m \mid m \in \mathbf{N}, 1 < m < 13, m \text{ gerade Zahl}\}$$

ges. $A \cup B$, $A \cap B$

Lösung:

$$\text{seq}(n, n, 0, 6, 1) \Rightarrow A$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{seq}(2n, n, 1, 6, 1) \Rightarrow B$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

Weitere Berechnung im CAS nicht möglich:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} = \\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

$$A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} = \\ \{2, 4, 6\}$$

Neu 2012: Berechnung im CAS mit dem Programm

Menge(..., ..., ...)

$$A := "\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}"$$

$$"\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}"$$

```

B:="{2,4,6,8,10,12}"
                                     "{2,4,6,8,10,12}"
Menge("{0,1,2,3,4,5,6}", "u", "{2,4,6,8,10,12}")
                                     done

```

```

Ergebnis
                                     "{0,1,2,3,4,5,6,8,10,12}"
Menge("{0,1,2,3,4,5,6}", "n", "{2,4,6,8,10,12}")
                                     done

```

```

Ergebnis
                                     "{2,4,6}"

```

Neu 2012: alternativ: Berechnung im CAS mit den Programmen

SetUnion(..., ...) bzw. **SetInter(..., ...)**

Syntax von A, B beachten: ohne { und }

```

A:="0,1,2,3,4,5,6"
                                     "0,1,2,3,4,5,6"
B:="2,4,6,8,10,12"
                                     "2,4,6,8,10,12"
SetUnion(A,B)
                                     done

```

```

Result
                                     "{0,1,2,3,4,5,6,8,10,12}"
SetInter(A,B)
                                     done

```

```

Result
                                     "{2,4,6}"

```

Aufg. 2

Zusammenfassen: $x \cdot (y+z) + y \cdot (z-x) - (x+y) \cdot z$

Lösung:

```

x \cdot (y+z) + y \cdot (z-x) - (x+y) \cdot z
                                     -z \cdot (x+y) - y \cdot (x-z) + x \cdot (y+z)

```

simplify(ans)

0

per Hand sind Zwischenschritte anzugeben	f(*)=
--	-------

Aufg. 3

Vereinfachen (binom. Formeln)

$$(3x-2y) \cdot (2y-3x) - (2x-y)^2$$

Lösung:

$$(3x-2y) \cdot (2y-3x) - (2x-y)^2$$

$$-(3 \cdot x - 2 \cdot y)^2 - (2 \cdot x - y)^2$$

simplify(ans)

$$-13 \cdot x^2 - 5 \cdot y^2 + 16 \cdot x \cdot y$$

per Hand sind Zwischenschritte anzugeben	f(*)=
--	-------

Aufg. 4

quadr. Ergänzung für $4a^2+36a+40$

Lösung:

$$4a^2+36a+40$$

$$4 \cdot a^2 + 36 \cdot a + 40$$

$$\text{factor}\left(4a^2+36a+\left(\frac{36a}{2 \cdot 2a}\right)^2\right) - \left(\frac{36a}{2 \cdot 2a}\right)^2 + 40$$

$$(2 \cdot a + 9)^2 - 41$$

Probe:

$$(2 \cdot a + 9)^2 - 41$$

expand(ans)

$$(2 \cdot a + 9)^2 - 41$$

$$4 \cdot a^2 + 36 \cdot a + 40$$

Aufg. 5

Def.-bereich für $\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}$ angeben und

vereinfachen

Lösung: $D_b = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -1\}$

$$\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

simplify(ans)

$$\frac{-(x-1)}{x^3+x^2+x+1}$$

factor(ans)

$$\frac{-(x-1)}{(x^2+1) \cdot (x+1)}$$

Hinweis: Lösung in \mathbb{C}

$$\text{solve}(x^2-1=0, x)$$

$$\{x=-1, x=1\}$$

$$\text{solve}(x^2+1=0, x)$$

$$\{x=-j, x=j\}$$

$$D_b = \{x \mid x \in \mathbb{C}, x \neq 1, x \neq -1, x \neq j, x \neq -j\}$$

per Hand sind Zwischenschritte anzugeben

f(*)=

Aufg. 6

geg. Bruttopreis 64,96€ (16% MWS)

a) ges. enthaltene MWS

b) ges. Rabatt, Voraussetzung: 5% Rabatt auf
Nettopreis**Lösung:**

a)

$$64.96 - 64.96 / 1.16$$

8.96

Die MWS beträgt 8,96€, d.h. Nettopreis 56,00€

b)

$$56.00 \times 0.05$$

2.8

Der Rabatt auf den Nettopreis beträgt 2,80€

$$56 \times 0.95 \times 1.16$$

61.712

$$56 \times 0.95 \times 1.16 - 64.96$$

-3.248

Die Ersparnis beträgt 3,25€.

Ausblick auf das Menü Finanzmathematik

einfache Verzinsung (=MWS)

**Aufg. 7**ges. Db für $(\sqrt{a-b} \times \sqrt{a+b})^{2^2}$ und Vereinfachung**Lösung:**

Interpretation einer Mehrfachpotenz:

Was bedeutet a^{b^c} ?

$$\text{judge}(a^{b^c} = a^{(b^c)})$$

TRUE

$$\text{judge}(a^{b^c} = (a^b)^c)$$

Undefined

konkret:

$$(\sqrt{a-b} \times \sqrt{a+b})^2$$

$$(a-b)^2 \cdot (a+b)^2$$

$$D_b = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a-b \geq 0, a+b \geq 0\},$$

d.h. in der a - b -Ebene sind die Bereiche

$a-b < 0$ **oder** $a+b < 0$ ausgeschlossen:

also muss gelten $a \geq b$ und $a \geq -b$,

d.h. $a \geq \max(b, -b) = |b| \geq 0$

=====

Beachten Sie die Verwendung der Worte **und** bzw.

oder in einer Aussage!

Komma in $D_b = \{\dots \in \mathbb{R}^2 \mid a-b \geq 0, a+b \geq 0\}$ bedeutet
Aufzählung, d.h. **und**.

Aussagenlogik: **A und B** negiert ergibt \bar{A} **oder** \bar{B} .

=====

Damit ist der D_b der rechte Winkelraum zwischen
den Geraden $a=b$ und $a=-b$.

D_b in x - y -Ebene ($x=a, y=b$)	Y1: ... Y2: ...
--	--------------------

Umrechnung: $a \geq b$ und $a \geq -b$ bedeutet $y \leq x$ und $y \geq -x$

$$\text{simplify}\left(\left(\sqrt{a-b} \times \sqrt{a+b}\right)^2\right)$$

$$(a+b)^2 \cdot (a-b)^2$$

`expand(ans)`

$$a^4 + b^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$(a^2 - b^2)^2$$

$$(a^2 - b^2)^2$$

`expand(ans)`

$$a^4 + b^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2$$

Mögliche Vereinfachungen sind:

$$(a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \text{ oder } (a^2 - b^2)^2$$

Aufg. 8

Vereinfachen: $\ln(1+2n+n^2)+1-2\ln(1+n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Lösung:

$$\ln(1+2n+n^2)+1-2\ln(1+n)$$

$$\ln(n^2+2 \cdot n+1)-2 \cdot \ln(n+1)+1$$

`simplify(ans) ⇒ Term`

$$\ln((n+1)^2)-2 \cdot \ln(n+1)+1$$

`Term | n=0`

1

`Term | n > 0`

1

`simplify(Term | n > 0)`

1

$$\text{simplify}\left(\frac{n^2+2\cdot n+1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\ln(1)+1$$

1

1

Aufg. 9

Auflösung nach n:

$$a) x = \frac{n \cdot y}{n \cdot z + 1} \quad b) a = 3x^n$$

Lösung:

a) Voraussetzung $x \cdot z - y \neq 0$:

$$x = \frac{n \cdot y}{n \cdot z + 1}$$

$$x = \frac{n \cdot y}{n \cdot z + 1}$$

$$\text{solve}(\text{ans}, n)$$

$$\left\{ n = \frac{-x}{x \cdot z - y} \right\}$$

Spezialfall $x \cdot z = y$:

$$x = \frac{n \cdot y}{n \cdot z + 1} \mid y = x \cdot z$$

$$x = \frac{n \cdot x \cdot z}{n \cdot z + 1}$$

$$\text{solve}\left(x = \frac{n \cdot x \cdot z}{n \cdot z + 1}, n\right)$$

No Solution

keine Lösung für n im Fall $x \neq 0$: $x \cdot (n \cdot z + 1) \neq n \cdot x \cdot z$

Im Fall $x = 0$ ist n nicht eindeutig bestimmbar.

b) Voraussetzung $x \neq 1$ und $x > 0$

$$a = 3x^n$$

$$a=3 \cdot x^n$$

solve(ans,n)

$$\left\{ n = \frac{\ln(a)}{\ln(x)} - \frac{\ln(3)}{\ln(x)} \right\}$$

simplify(ans)

$$\left\{ n = \frac{\ln\left(\frac{a}{3}\right)}{\ln(x)} \right\}$$

schrittweise:

$$\frac{a}{3} = x^n \quad | \ln(\dots)$$

$$\ln\left(\frac{a}{3}\right) = \ln(x^n) = n \times \ln(x)$$

$$n = \ln\left(\frac{a}{3}\right) / \ln(x)$$

oder

$$n = \log_x\left(\frac{a}{3}\right)$$

$$\text{judge}\left(\ln\left(\frac{a}{3}\right) / \ln(x) = \log_x\left(\frac{a}{3}\right)\right)$$

TRUE

Spezialfall $x=1$ oder $x=0$ oder $x<0$:

Im Fall $x=1$ ist n nicht eindeutig bestimmbar (für $a=3$)

Im Fall $x=0$ ($n>0$) muss $a=0$ gelten.

Im Fall $x<0$ gibt es nur in Spezialfällen eine Lösung, z.B.

$x=-3$ und $a=27$ muss $n=2$ gelten:

$$a=3x^n | x=-3 \text{ and } a=27$$

$$27=3 \cdot (-3)^n$$

solve(ans,n)

$$\{n=2\}$$

Aufg. 10

$\left(\sum_{k=0}^4 (k^2) \right) \times \prod_{m=1}^3 (m^2)$ ist zu berechnen

Lösung:

$$\left(\sum_{k=0}^4 (k^2) \right) \times \prod_{m=1}^3 (m^2)$$

$$1080$$

schrittweise:

$$\text{seq}(k^2, k, 0, 4, 1)$$

$$\{0, 1, 4, 9, 16\}$$

sum(ans)

$$30$$

$$\text{seq}(m^2, m, 1, 3, 1)$$

$$\{1, 4, 9\}$$

prod(ans)

$$36$$

$$30 \times 36$$

$$1080$$

□

Aufg. 2

The screenshot shows a window titled "Datei Edit Aktion" with a toolbar containing icons for file operations and mathematical functions. The main text area contains the following algebraic steps:

$$\begin{aligned} & x \cdot (y+z) + y \cdot (z-x) - (x+y) \cdot z \\ &= x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z - y \cdot x - x \cdot z - y \cdot z \\ &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

The status bar at the bottom displays the input expression: $\text{Äq: } x \cdot (y+z) + y \cdot (z-x) - (x+y) \cdot z$

Aufg. 3

The screenshot shows a window titled "Datei Edit Aktion" with a toolbar. The main text area contains the following algebraic steps:

$$\begin{aligned} & (3 \cdot x - 2 \cdot y) \cdot (2 \cdot y - 3 \cdot x) - (2 \cdot x - y)^2 \\ &= -(3 \cdot x - 2 \cdot y)^2 - (2 \cdot x - y)^2 \\ &= -(9 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2) - (4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2) \\ &= -13 \cdot x^2 - 5 \cdot y^2 + 16 \cdot x \cdot y \\ &= 0 \end{aligned}$$

The status bar at the bottom displays the input expression: $\text{Äq: } (3 \cdot x - 2 \cdot y) \cdot (2 \cdot y - 3 \cdot x) - (2 \cdot x - y)^2$

Aufg. 5

The screenshot shows a window titled "Datei Edit Aktion" with a toolbar. The main text area contains the following algebraic steps:

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1} \\ &= \frac{(x-1) \cdot (x^2+1)}{(x^2-1) \cdot (x^2+1)} - \frac{x \cdot (x^2-1)}{(x^2+1) \cdot (x^2-1)} \\ &= \frac{x^3 - x^2 + x - 1 - x^3 + x}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+1)} \\ &= \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+1)} \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2+1)} \\ &= \frac{x-1}{(x+1) \cdot (x^2+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

The status bar at the bottom displays the input expression: $\text{Äq: } ((x-1)/(x^2-1)) - (x/(x^2+1))$

Aufg. 6

▼ Edit Berechnungen

◀ ▶ ✂ 📄 📊

Einfacher Zins

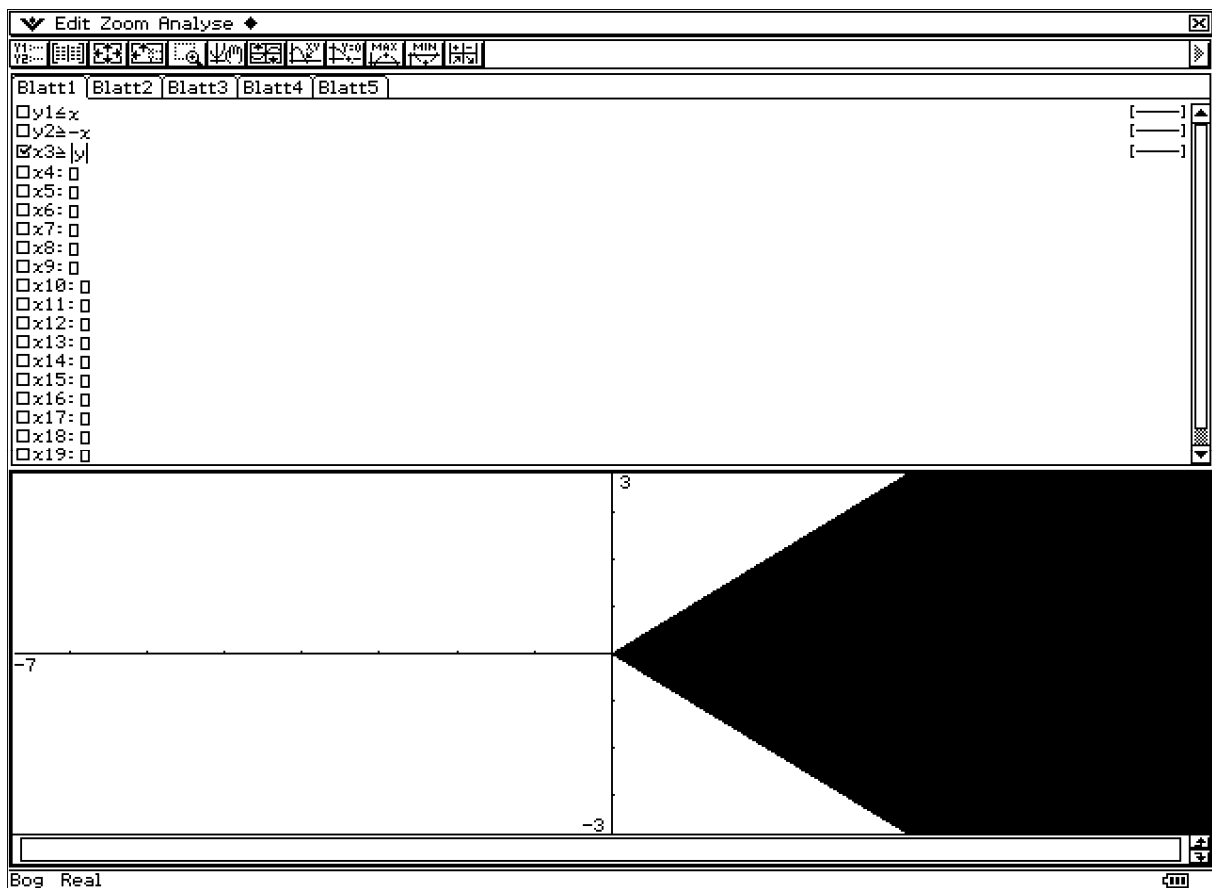
Tage	365
I%	16
PV	-56
S1	8.96
SFV	84.96

▼Hilfe Format

Berechnung und Anzeige des zukünftigen Betrages (Endkapital, Ausgangsbetrag züglich erwirtschafteter Zinsen)

Löse 365

Aufg. 7



TEST 2 (Prof. Preuß)

=====

Aufg. 1

Skalarprodukt im \mathbf{R}^3

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$5e_1 - e_2 + 4e_3 \Rightarrow a$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$4e_1+2e_2+3e_3 \Rightarrow b$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\text{dotP}(a,b)$

30

$$\frac{\text{dotP}(a,b)}{\text{norm}(a)\text{norm}(b)}$$

0.8596023826

$\cos^{-1}(\text{ans})$

30.72803229

Der Winkel beträgt $30,73^\circ$.

Hinweis: Taschenrechnersymbolik von $\arccos(\dots)$
ist $\cos^{-1}(\dots)$

Nicht verwechseln mit $\frac{1}{\cos(\dots)} = \sec(\dots)$ in

geschriebenen Form: $\frac{1}{\cos(\dots)} \neq \arccos(\dots)$!!!

Aufgaben 2 bis 10: Lösungsmengen suchen:

Aufg. 2

$$3(x-1)=-4(2x-1)$$

$$3 \cdot (x-1) = -4 \cdot (2 \cdot x-1)$$

$\text{solve}(\text{ans}, x)$

$$\left\{ x = \frac{7}{11} \right\}$$

Aufg. 3

$$2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3 - 2x + 2x^2)$$

solve(ans, x)

$$2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3}{2}$$

{x=-4, x=0}

Aufg. 4

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 2 - x$$

solve(ans, x)

$$x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = -x + 2$$

{x=1}

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 1 - 2 + x = 0$$

factor(ans)

$$x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1 = 0$$

$$(x-1)^3 = 0$$

Aufg. 5

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

solve(ans, x)

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

{x=-1, x=1}

$$\text{factor}(x^4 + x^2 - 2 = 0)$$

$$(x^2 + 2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 0$$

Aufg. 6

$$\frac{x-3}{x-5} = \frac{x-1}{x+1}$$

x≠5 und x≠-1

$$\frac{x-3}{x-5} = \frac{x-1}{x+1}$$

solve(ans,x)

{x=2}

$(x-3)(x+1)=(x-1)(x-5)$

$(x+1) \cdot (x-3)=(x-1) \cdot (x-5)$

expand(ans)

$x^2 - 2 \cdot x - 3 = x^2 - 6 \cdot x + 5$

ans-x²

$-2 \cdot x - 3 = -6 \cdot x + 5$

Die lineare Gl. hat eine eindeutige Lösung.

Aufg. 7

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} = 0$

$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x+1} = 0$

Summe zweier pos. Wurzeln ist Null, d.h. jede Wurzel ist Null: $x=-1$.

solve(ans,x)

{x=-1}

umständlicher Lösungsweg:

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow \text{Equation}$

$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x+1} = 0$

Equation²

$\left(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x+1}\right)^2 = 0$

expand(ans)

$x^2 + 2 \cdot \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x+1} + x = 0$

$$\text{ans} = -x^2 - x$$

$$2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{x + 1} = -x^2 - x$$

$$\text{ans}^2$$

$$4 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x + 1) = (x^2 + x)^2$$

$$\text{solve}(\text{ans}, x)$$

$$\{x = -1, x = 2\}$$

$$\text{factor}(4 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x + 1) - (x^2 + x)^2 = 0)$$

$$-(x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2 = 0$$

$x = 2$ ist eine Scheinlösung!

Aufg. 8

$$|3x + 1| = 5$$

$$|3 \cdot x + 1| = 5$$

$$\text{solve}(\text{ans}, x)$$

$$\left\{x = -2, x = \frac{4}{3}\right\}$$

$$\text{solve}(3x + 1 = 5, x)$$

$$\left\{x = \frac{4}{3}\right\}$$

$$\text{solve}(3x + 1 = -5, x)$$

$$\{x = -2\}$$

Aufg. 9

$$2^{9x - 3} = 8^{2x + 1}$$

$$2^{9 \cdot x - 3} = 8^{2 \cdot x + 1}$$

$$8^{2x + 1} = (2^3)^{2x + 1} = 2^{3(2x + 1)}$$

Exponentenvergleich:

$$9x-3=3(2x+1)$$

$$\text{solve}(\text{ans}, x)$$

$$\text{solve}(2^{9x-3}=8^{2x+1}, x)$$

$$9 \cdot x - 3 = 3 \cdot (2 \cdot x + 1)$$

$$\{x=2\}$$

$$\{x=2\}$$

Aufg. 10

$$\frac{1}{x+1} \geq 3$$

$$\text{solve}(\text{ans}, x)$$

$$\frac{1}{x+1} \geq 3$$

$$\left\{-1 < x \leq -\frac{2}{3}\right\}$$

schrittweise: $x \neq -1$

$1 \geq 3(x+1)$ für $x+1 > 0$, hieraus ergibt sich keine Lösung!

$1 \leq 3(x+1)$ für $x+1 < 0$, hieraus: $x \leq -\frac{2}{3}$ und $x > -1$ aus der Fallunterscheidung!

TEST 3 (Prof. Preuß)

=====

Aufg. 1 (nichtlineares Gleichungssystem)

$$\begin{cases} x^2 - y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Bigg|_{x, y}$$

$$\{(x=-1, y=-3), (x=3, y=5)\}$$

schrittweise:

$$\text{solve}(2x - y = 1, y)$$

$$\{y = 2 \cdot x - 1\}$$

$$x^2 - y = 4 \mid \text{ans}$$

$$x^2 - 2 \cdot x + 1 = 4$$

$$\text{solve}(\text{ans}, x)$$

$$\{x = -1, x = 3\}$$

$$2 \cdot \{-1, 3\} - 1$$

$$\{-3, 5\}$$

Es gibt also zwei Lösungspaare $(x, y) = (-1, 3)$ und $(x, y) = (3, 5)$.

Aufg. 2 (lineares Gleichungssystem)

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -5 \\ 3x + 3y + z = 6 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Bigg|_{x, y, z}$$

$$\{x=2, y=-1, z=3\}$$

in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Erweiterte Matrix (augmentierte Matrix):

`augment(A,b)` \Rightarrow Ab

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nutzung des `rref`-Befehls

(**Diagonalisierung** der Erweiterten Matrix):

`rref(Ab)`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Die Lösung steht in der letzten Spalte: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Anderer Weg, sofern die **inverse Matrix** A^{-1} existiert:

Lösung der Matrixgleichung $\mathbf{A} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{b}$ ist $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{b}$:

$\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

in Vektorform:

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ d.h. die rechte Seite } \mathbf{b}$$

ist eine Linearkombination der in \mathbf{A} stehenden Spaltenvektoren. Die Vektorgleichung ist lösbar, wenn \mathbf{b} von den links vorkommenden Vektoren linear abhängig ist. Das ist hier der Fall:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lit.-Hinweis:

http://www.htw-dresden.de/~paditz/images/ClassPad_01.pdf

Quelle:

<http://www.casio-europe.com/de/calc/sgr/lehrerschule/unterrichtsmaterial/literaturclasspad/paditz/>

Titel-Nachweis (HTW-Bibl.):

<http://www2.htw-dresden.de/~paditz/images/>

Casio4.jpg

<http://swb.bsz-bw.de/DB=2.1/PPNSET?PPN=113615949>

Weiterführend:

http://www2.htw-dresden.de/~paditz/LinEqSys_AVRank_eActivity.Main.pdf

vcp-file:

<http://www.htw-dresden.de/~paditz/Austauschverfahren1.vcp>

<http://www.htw-dresden.de/~paditz/Austauschverfahren2.vcp>

Aufg. 3

geg: Nutzung des griech. Großbuchstaben Zeta, da Z_1, Z_2, \dots als Systemvariable gesperrt ist.

$$\sqrt{3} + j \Rightarrow Z_1$$

$$\sqrt{3} + j$$

$$1 - 2j \Rightarrow Z_2$$

$$1 - 2 \cdot j$$

$$Z_1 + Z_2$$

$$\sqrt{3} + 1 - j$$

$$Z_1 - Z_2$$

$$\sqrt{3} - 1 + 3 \cdot j$$

$$Z_1 \times Z_2$$

$$(1 - 2 \cdot j) \cdot (\sqrt{3} + j)$$

cExpand(ans)

$\frac{Z1}{Z2}$

$$\sqrt{3} + 2 - (2 \cdot \sqrt{3} - 1) \cdot j$$

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{2 \cdot j}{5} \right) \cdot (\sqrt{3} + j)$$

cExpand(ans)

$$\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{2}{5} + \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5} + \frac{1}{5} \right) \cdot j$$

conjg(Z1)

$$\sqrt{3} - j$$

conjg(Z2)

$$1 + 2 \cdot j$$

abs(Z1)

$$2$$

abs(Z2)

$$\sqrt{5}$$

Lit.-Hinweis:

<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/Casio1.jpg>

<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/Casio11.jpg>

Nachweis: (HTW-Bibl.!))

<http://swb.bsz-bw.de/DB=2.1/PPNSET?PPN=093868359>

Aufg. 4

Db von $f(x) = \frac{\ln(x+4)}{(x-1)(x+3)}$

Db = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4 \text{ und } x \neq 1 \text{ und } x \neq -3\}$, d.h.

Db = $(-4, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$

Die Funktion hat damit drei Kurvenäste (und zwei Definitionslücken bei $x=-3$ und $x=1$)

Schaubild der Funktion	Y1: ... Y2: ...
------------------------	--------------------

Define $f(x) = \frac{\ln(x+4)}{(x-1)(x+3)}$

	done
$\lim_{x \rightarrow -3^-} (f(x))$	$-\frac{1}{4}$
$\lim_{x \rightarrow -3^+} (f(x))$	$-\frac{1}{4}$
$\lim_{x \rightarrow -3} (f(x))$	$-\frac{1}{4}$
$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x))$	-0
$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x))$	0
$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x))$	Undefined

einseitige Grenzwerte in den Definitionslücken.

Aufg. 5

Nullstellen $f(x) = e^x - e^{-x}$

Define $f(x)=e^x-e^{-x}$

done

$f(x)$

e^x-e^{-x}

judge($f(x)=2 \times \sinh(x)$)

TRUE

Zusammenhang zum Sinus Hyperbolicus:

$f(x)=2 \times \sinh(x)$

solve($f(x)=0, x$)

$\{x=0\}$

solve($f(x)=0, x$)

$\{x=0, x=\pi \cdot j\}$

Im Bereich der komplexen Zahlen gibt es weitere
Lösungen!

z.B. $x=\pi \cdot j$ (!Periodizität der e-Funktion in \mathbb{C} ergibt
zusätzliche Lösungen)

Lit.-Hinweis:

[http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
images/Casio1.jpg](http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/Casio1.jpg)

[http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
images/Casio11.jpg](http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/Casio11.jpg)

Nachweis: (HTW-Bibl.!))

[http://swb.bsz-bw.de/DB=2.1/PPNSET?PPN=
093868359](http://swb.bsz-bw.de/DB=2.1/PPNSET?PPN=093868359)

Aufg. 6

Define $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

done

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$, d.h. zwei Kurvenäste und eine Definitionslücke bei $x = -2$.

`expand(f(x), x)`

$$\frac{-1}{x+2} + 2$$

`lim (f(x))
x → -2-`

0

`lim (f(x))
x → -2+`

-0

$W = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$, da der echt gebrochene Anteil nicht Null wird.

Nullstelle: $x = -3/2$:
`solve(f(x)=0, x)`

$$\left\{ x = -\frac{3}{2} \right\}$$

Schnittpunkt mit y-Achse: $P(0, 3/2)$:
`f(0)`

$\frac{3}{2}$

Polstelle $x = -2$, einseitige Grenzwerte s.o.

Asymptote $y = 2$ (waagerechte Gerade)

Schaubild zu $y = f(x)$	Y1: ... Y2: ...
-------------------------	--------------------

Aufg. 7

`sin(2x) - sin(x)cos(x) = 0` ⇒ Equation

$$-\cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(2 \cdot x) = 0$$

`solve(Equation, x)`

$$\left\{ x = \pi \cdot \text{constn}(1), x = \pi \cdot \text{constn}(2) + \frac{\pi}{2} \right\}$$

solve(Equation, x, 0, 0, 2π)

{x=0, x=1.570796327, x=3.141592654, x=4.71238898, x=

Es gibt fünf Lösungen im Intervall $[0, 2\pi]$:

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$

schrittweise Lösung mittels Theorem:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, d.h.

$2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(x) = \sin(x)\cos(x) = 0$

Die Lösungen sind die Nullstellen von $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ im betrachteten Intervall.

Hinweis zur Arbeit im Main-Menü:

=====

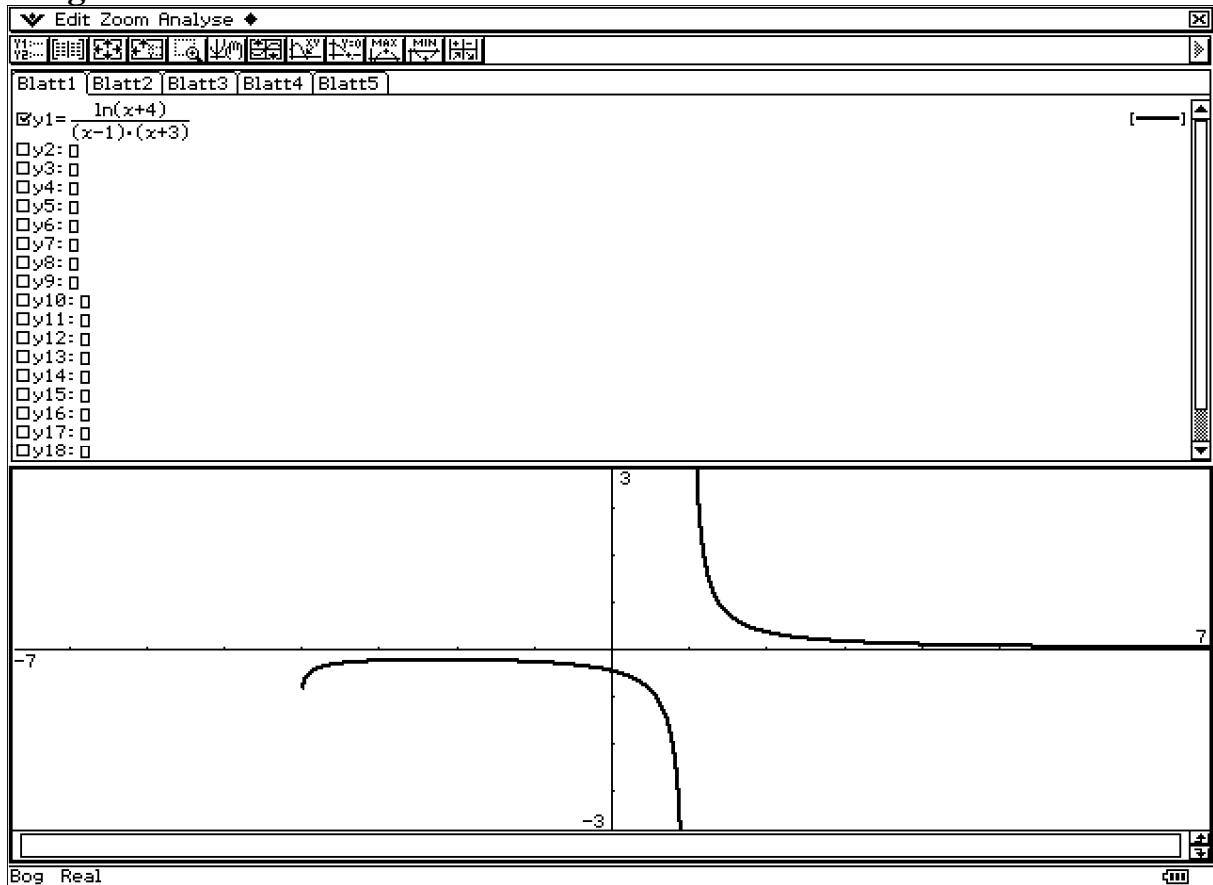
Die wichtigsten Befehle und Funktionen sind über die Kopfzeile unter **Aktion** bzw. **Interaktiv** zu erreichen. Damit muss man die Befehle/Funktionen nicht über das virtuelle Keyboard oder buchstabenweise eingeben. Im **Interaktiv**-Menü erhält man zusätzliche Eingabefenster und muss somit nicht die genaue Syntax der Befehlseingabe kennen und kann auf das Suchen der Syntax im Bedienhandbuch verzichten.

z.B. Syntax von solve(...) in **Aufg. 7**:

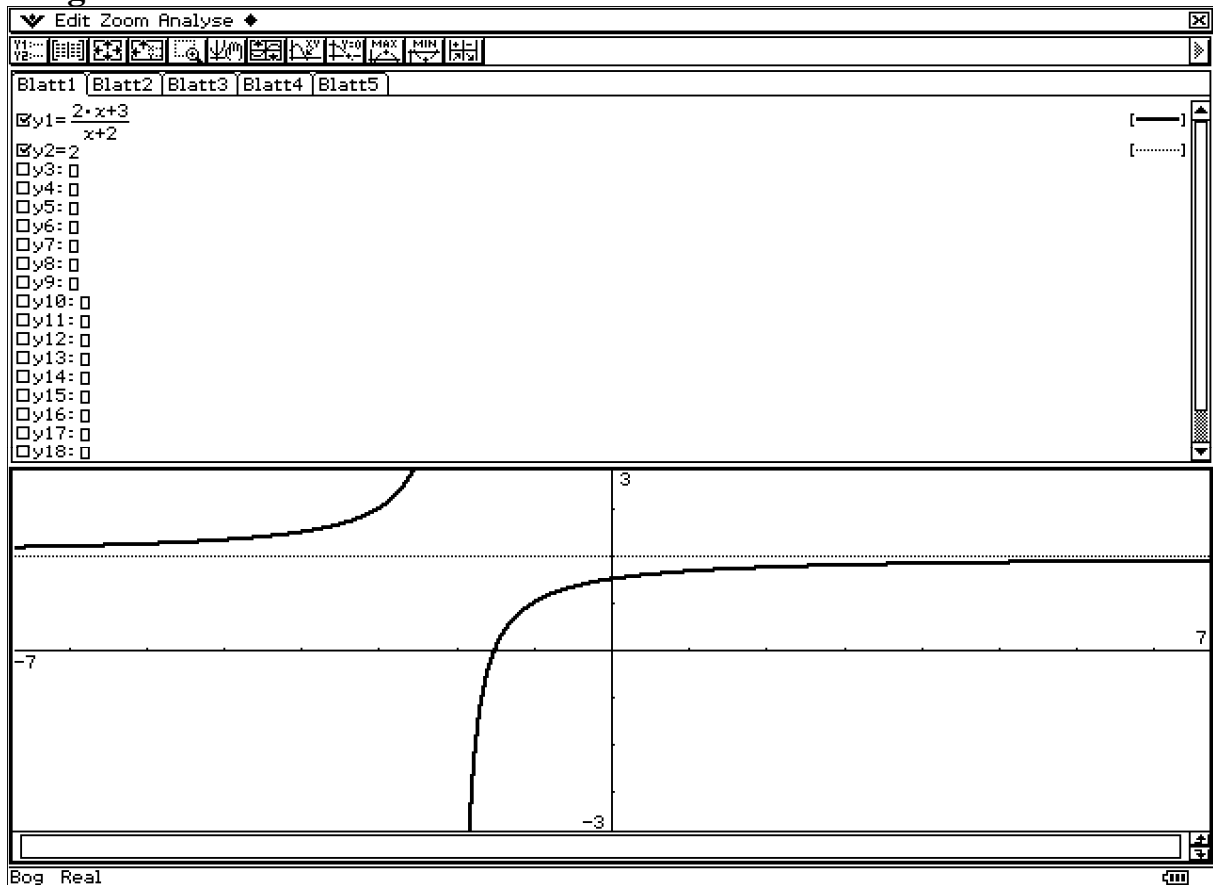
solve(Equation, x, 0, 0, 2π) hat die Syntax solve(Equation, ges. Größe, Startwert, a, b), wobei $[a, b]$ das Suchintervall ist.

Die Eingabe von Startwert, a, b ist optional.

Aufg. 4



Aufg. 6



TEST 4 (Prof. Preuß)

=====

Aufg. 1 - 4: (Ableitungen)

Aufg. 1: (Summenregel)

Define $f(x)=5x^2+3\sqrt{x}-7\ln(x)+2e^x-2\sin(x)-\cos(x)$

done

f(x)

$$2 \cdot e^x + 5 \cdot x^2 - \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) - 7 \cdot \ln(x) + 3 \cdot \sqrt{x}$$

$\frac{d}{dx}(f(x))$

$$\frac{4 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot e^x + 20 \cdot x^{\frac{5}{2}} - 4 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos(x) + 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin(x) + 3 \cdot x - 14}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

expand(ans)

$$2 \cdot e^x - 2 \cdot \cos(x) + \sin(x) + 10 \cdot x + \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{7}{x}$$

diff(f(x),x)

$$\frac{4 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot e^x + 20 \cdot x^{\frac{5}{2}} - 4 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos(x) + 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin(x) + 3 \cdot x - 14}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

expand(ans)

$$2 \cdot e^x - 2 \cdot \cos(x) + \sin(x) + 10 \cdot x + \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{7}{x}$$

Es gibt also 2 Möglichkeiten zur Differenziation:
diff-Befehl oder d/dx-Eingabemaske
Es wird summandenweise differenziert!

Aufg. 2: (Produktenregel)

Define $g(t)=t^2 \ln(t) \tan(t)$

done

$g(t)$

$$t^2 \cdot \tan(t) \cdot \ln(t)$$

$\frac{d}{dt}(g(t))$

$$t^2 \cdot (\tan(t))^2 \cdot \ln(t) + t^2 \cdot \ln(t) + 2 \cdot t \cdot \tan(t) \cdot \ln(t) + t \cdot \tan(t)$$

simplify(ans)

$$t \cdot (t \cdot ((\tan(t))^2 \cdot \ln(t) + \ln(t)) + 2 \cdot \tan(t) \cdot \ln(t) + \tan(t))$$

Hier findet die Produktenregel Anwendung.

$$(u \cdot v \cdot w)' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w'$$

usw.

Aufg. 3: (Quotientenregel)

Define $h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1}$

done

$h(x)$

$$\frac{\sin(x)}{x^2+1}$$

$\frac{d}{dx}(h(x))$

$$\frac{x^2 \cdot \cos(x) - 2 \cdot x \cdot \sin(x) + \cos(x)}{(x^2+1)^2}$$

expand(ans)

$$\frac{x^2 \cdot \cos(x)}{x^4 + 2 \cdot x^2 + 1} - \frac{2 \cdot x \cdot \sin(x)}{x^4 + 2 \cdot x^2 + 1} + \frac{\cos(x)}{x^4 + 2 \cdot x^2 + 1}$$

Aufg. 4: (Kettenregel)

Define $f(x) = \sin(e^x + x)$

done

$f(x)$

$\sin(e^x + x)$

$\frac{d}{dx}(f(x))$

$\cos(e^x + x) \cdot (e^x + 1)$

Aufg. 5: (Kurvendiskussion)

Define $f(x) = x^2 e^{-x}$

done

$f(x)$

$x^2 \cdot e^{-x}$

$\frac{d}{dx}(f(x)) = 0$

$-(x^2 - 2 \cdot x) \cdot e^{-x} = 0$

$\text{solve}(\text{ans}, x)$

$\{x=0, x=2\}$

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) |_{x=0}$

2

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) |_{x=2}$

$-2 \cdot e^{-2}$

Damit ist $x=0$ Min.-stelle und $x=2$ Max.-stelle.

$y=0$ ist Min.-wert, $y=4 \cdot e^{-2}$ ist Max.-wert.

```
fMin(f(x),x)
```

```
{MinValue=0,x=0,x=0}
```

```
fMin(f(x),x,-100,100)
```

```
{MinValue=0,x=0}
```

```
fMax(f(x),x)
```

```
{MaxValue=0,x=-0}
```

```
fMax(f(x),x,0,10)
```

```
{MaxValue=4 \cdot e^{-2},x=2}
```

```
Define y1(x)=f(x)
```

```
done
```

Im Schaubild sind die Extrema gut erkennbar.

Schaubild der Funktion	Y1: ... Y2: ...
------------------------	--------------------

Aufg. 6-9 (Integrale)

Aufg. 6 (unbest. Integral, Summenregel)

$$\int 3\cos(x) - 5x^2 + 4e^x dx + C$$

$$\frac{12 \cdot e^x - 5 \cdot x^3 + 9 \cdot \sin(x)}{3} + C$$

```
expand(ans)
```

$$4 \cdot e^x - \frac{5 \cdot x^3}{3} + 3 \cdot \sin(x) + C$$

```
dSolve(y'=3cos(x)-5x^2+4e^x,x,y)
```

$$\left\{ y = 4 \cdot e^x - \frac{5 \cdot x^3}{3} + 3 \cdot \sin(x) + \text{const}(1) \right\}$$

Beachten Sie die Integrationskonstante $C = \text{const}(1)$, wobei C per Hand und die Systemgröße $\text{const}(1)$ automatisch eingefügt wird.

Aufg. 7 (echt gebr. rat. Funktion)

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+4x} dx + C$$

$$\frac{\ln(|x^4+4 \cdot x|)}{4} + C$$

Integraltyp $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ beachten:

$$\frac{x^3+1}{x^4+4x} = \frac{1}{4} \times \frac{4x^3+4}{x^4+4x}$$

oder Substitution $t=x^4+4x$, $dt=(4x^3+4)dx$ nutzen.

Aufg. 8 (bestimmtes Integral)

$$\int_0^{\pi} \sin(t) dt$$

2

$$\int \sin(t) dt$$

Define $F(t) = -\cos(t)$

$-\cos(t)$

done

$F(\pi) - F(0)$

2

Aufg. 9 (vorzeichenbehaftete Flächenanteile)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) dt$$

0

Download dieses Dokuments (alle Tests):

<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mathe-IntensivDocT.pdf>

Aufg. 5

