Prof. Dr. Ludwig Paditz, Mathe-Intensivkurs 2012
Einführung in die CAS-Software (ClassPad)
Version 03.06.1000

neu: Mengenlehre implementiert
(Stand Juli 2012)

vgl. Add-In-Anwendung
(nur im Taschenrechner oder als eigenes
PC-Programm)

und Programme, s. library-Ordner

Mengenlehre, grafische Darstellungen
======================================

Rechenoperationen der Mengenlehre,
z.B. A∪B oder A∩B,
kann der CAS-Rechner nicht ausführen!
(obwohl die Operationszeichen im Zeichensatz
vorhanden sind)
Derzeit können diese Symbole nur zur
Textverarbeitung genutzt werden.

Im Projektseminar für Informatikstudenten wurde die
Mengenlehre für den ClassPad programmiert:
- Mengenlehre für reelle Zahlen als Add-In
- Mengenlehre für endliche Mengen
  (Zahlen oder andere nichtnumerische Elemente)
  als Programm **Menge(...,...,...)**
  mit drei Eingabeparametern, s.u.

B 1. Symbole im CAS

Φ ... leere Menge
Ω ... Grundmenge
N ... Menge der natürlichen Zahlen
R ... Menge der reellen Zahlen

B 2. Darstellung von Mengen als Listen (endliche Listen können im CAS generiert werden)

N={0,1,2,3,...}
A={1,2,3,4,5}
A kann im CAS generiert werden:

```
seq(a,a,1,5,1)→A
                                              {1,2,3,4,5}
```

somit A=(a|a∈**N** und 1≤a≤5)

B={0}∪A=(0,1,2,3,4,5)

B kann im CAS generiert werden:

```
seq(a,a,0,5,1)→B
                                            {0,1,2,3,4,5}
```

oder Listenverknüpfung (augmentieren)

```
augment({0},{1,2,3,4,5})
                                            {0,1,2,3,4,5}
```

===

neu:

Mengenlehre mit dem Programm Menge(...,...,...),
drei Parameter, jeweils direkt als Zeichenkette

einzugeben:

A:={1,2,3,4,5}

{1,2,3,4,5}

B:={0}

{0}

Menge("{1,2,3,4,5}","∪","{0}")

done

Ergebnisvariable ist Ergebnis

Ergebnis

"{1,2,3,4,5}"

Das Ergebnis ist unkorrekt. Die Zahl Null muss derzeit als 0. oder 0.0 oder 0.000 oder .0 usw. statt 0 eingegeben werden, damit die interne Zeichen-Verarbeitung der **einelementigen** Menge im Programm **Menge** korrekt abläuft. Im nächsten Projektseminar wird das Programm **Menge** aktualisiert.

Menge("{1,2,3,4,5}","∪","{0,1}")

done

Ergebnis

"{0,1,2,3,4,5}"

Menge("{1,2,3,4,5}","∪","{0.}")

done

Ergebnis

"{0,1,2,3,4,5}"

Menge("{1,2,3,4,5}","∪","{0.0}")

done

Ergebnis

"{0,1,2,3,4,5}"

Menge("{1,2,3,4,5}","∪","{0.000}")

done

Ergebnis

"{0,1,2,3,4,5}"

Menge("{1,2,3,4,5}","∪","{.0}")

done

Ergebnis

"{0,1,2,3,4,5}"

alternativ:

Mengenlehre mit dem Programm SetUnion(...,...),
zwei Parameter, Elemente jeweils als Zeichenkette einzugeben:

A:="1,2,3,4,5"

"1,2,3,4,5"

B:="0"

"0"

SetUnion(A,B)

done

Ergebnisvariable ist Result
Result

"{0,1,2,3,4,5}"

SetUnion(A,"0.000")

done

Result

"{1,2,3,4,5,0.000}"

Im Programm **SetUnion** wird das Element 0.000 nicht zu 0 vereinfacht.
Jetzt keine aufsteigende Sortierung.

Ausweg: sortA-Befehl
sortA({1,2,3,4,5,0.000})

{0,1,2,3,4,5}

==

$C=\{0,2,4,6,...\}=\{x|\frac{x}{2}\in\mathbf{N}\}$

D kann im CAS generiert werden:
seq(2d+1,d,0,5)⇒D

{1,3,5,7,9,11}

$D=\{m|m=2d+1 \wedge d\in\mathbf{N} \wedge d\le5\}$

B 3. Lösungsmengen (solve-Befehl)

solve(x^2-3x+2=0,x)

{x=1,x=2}

{1,2}⇒A

{1,2}

solve(x^2-3x+5=0,x)

No Solution

{}⇒B

{}

B ist die leere Menge.

C={D,r,e,s,d,n}={D,d,e,n,r,s}
Mengen sind ungeordnete Zusammenfassungen gleichartiger Objekte (unterscheidbare Elemente aus der Grundmenge der Groß- und Kleinbuchstaben).
Gleiche Elemente in C werden nicht mehrfach angegeben.

======================================

neu: Mengen mit alphanumerischen Elementen
C:="D,r,e,s,d,e,n"

"D,r,e,s,d,e,n"

SetUnion(C," ")

done

Result

"{d,D,e,n,r,s}"

alternativ:
Verarbeitung im Programm **Menge** (Direkteingabe)

Menge("{D,r,e,s,d,e,n}","∪","{ }")

done

Ergebnis

"{d,D,e,n,r,s}"

Ergebnis **alphanumerisch sortiert!**
=======================================

solve(x^2=4,x)

{x=-2,x=2}

solve(x^4=16,x)

{x=-2,x=2}

{-2,2}→D

{-2,2}

x^2=4 und x^4=8 können nicht gleichzeitig gelten:
E={} leere Menge

B 4. Darstellung reeller Intervalle als Lösungsmengen

solve((x-a)(x-b)≥0,x)|a<b

{(x-a)·(x-b)≥0}

solve((x-a)(x-b)≥0|a<b,x)

{(x-a)·(x-b)≥0}

keine Auswertung ohne konkrete Vorgabe der Zahlen a,b.

```
solve((x-3)(x-5)≥0,x)
                                                {x≤3,5≤x}
solve((x-3)(x-5)>0,x)
                                                {x<3,5<x}
```

Die Intervallsymbolik [a,b] oder (a,b)=]a,b[usw. kann im CAS nicht verarbeitet werden (nur als Textverarbeitung)

vgl. hierzu das Add-In **Real Sets**

B 5. Mengenrelationen

Mengenrelationen, z.B. A⊂B, A⊆B, können im CAS nicht verarbeitet werden (nur als Textverarbeitung)
Mengenoperationen, z.B. A∪B, A∩B, A\B, Ā, A×B, können im CAS nicht verarbeitet werden (nur als Textverarbeitung)

Ausweg:
Das Programm **Menge** kann diese Operationen und Relationen mit **endlichen** Mengen auswerten.

```
Menge("{1,2,3,4,5}","⊂","{0,1,2,3,4,5}")
                                                done
Ergebnis
                                                "true"
Menge("{0,1,2,3,4,5}","⊂","{1,2,3,4,5}")
                                                done
Ergebnis
                                                "false"
Menge("{0,1,2,3,4,5}","=","{1,2,3,4,5}")
                                                done
Ergebnis
```

"false"

```
Menge("{1,2,3,4,5}","⊆","{0,1,2,3,4,5}")
                                                    done
Ergebnis
                                                  "true"
```

B 6. Mengenoperationen, s.o.

```
Menge("{1,2,3,4,5,6,7,8,9}","∪","{0,1,2,3,4}")
                                                    done
Ergebnis
                                   "{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}"
Menge("{1,2,3,4,5,6,7,8,9}","∩","{0,1,2,3,4}")
                                                    done
Ergebnis
                                               "{1,2,3,4}"
Menge("{1,2,3,4,5,6,7,8,9}","-","{0,1,2,3,4}")
                                                    done
Ergebnis
                                             "{5,6,7,8,9}"
Menge("{0,1,2,3,4}","-","{1,2,3,4,5,6,7,8,9}")
                                                    done
Ergebnis
                                                   "{0}"
Menge("{0,1,2}","×","{8,9}")
                                                    done
Ergebnis
                 "{(0,8),(0,9),(1,8),(1,9),(2,8),(2,9)}"
Menge("{0,-1,2}","×","{8,9}")
                                                    done
Ergebnis
               "{(-1,8),(-1,9),(0,8),(0,9),(2,8),(2,9)}"
Menge("{9,8}","×","{0,-1,2}")
                                                    done
```

Ergebnis

"{(8,-1),(8,0),(8,2),(9,-1),(9,0),(9,2)}"

Menge("{9,8}","P","{Dummy}")

done

Ergebnis

"{∅,{9},{8},{9,8}}"

Potenzmenge: Menge aller Teilmengen von {9,8}

B 8. Produktmengen in der x-y-Ebene darstellen (2D-Grafik)

$A \times B = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 2\}$ als 2D-Grafik im 2D-Grafikmenü:

2D-Ungleichungsgrafik (elementare Syntax mit ≤-Symbol)

Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

2D-Ungleichungsgrafik (komprimierte Syntax mit ◆-Symbol)

Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

====================================

A 1. und **A 2.**

endliche Mengen und Intervalle, s. Add-In **Real Sets**

A 3.

$\mathbf{A} = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$ ... Einheitskreis

(Kreislinie)

2D-Grafik: Einheitskreis (Kreislinie)
Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

B=$\{(x,y)|(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ x^2+y^2\le 1\}$ ... Einheitskreis (Kreislinie mit Innengebiet=Kreisfläche mit Rand)

2D-Grafik: Einheitskreis (Kreisfläche mit Rand)
Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

C=$\{(x,y)|(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ y=x\}$ ... Gerade (Winkelhalbierende)

2D-Grafik: Gerade in x-y-Ebene
Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

D=$\{(x,y)|(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ y\ge x\}$ ... Halbebene (oberhalb der Winkelhalbierenden) mit Rand

2D-Grafik: spezielle Halbebene
Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

Der Mengendurchschnitt "∩" erfasst nur diejenigen Zahlenpaare (x,y), die beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen.
Die Mengenvereinigung "∪" erfasst alle diejenigen Zahlenpaare (x,y), die mindestens eine Bedingung erfüllen.

z.B. B∪D als 2D-Grafik
2D-Grafik: B∪D
Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

z.B. B∩D als 2D-Grafik
2D-Grafik: B∩D
Die untere Funktion wird stückweise definiert (piecewise-Befehl, spezielle Eingabemaske)

Prof. Dr. Ludwig Paditz, Mathe-Intensivkurs 2012
Einführung in die CAS-Software (ClassPad)
Version 03.06.1000

Elementares Rechnen mit reellen Zahlen:
==

Nutzung von CAS-Befehlen:
Grundformat: "Anordnung fallend" einstellen

B 1.a

5·(3x+2)

$$5\cdot(3\cdot x+2)$$

expand(ans)

$$15\cdot x+10$$

judge(5·(3x+2)=15·x+10)

TRUE

B 1.b

factor(15·x+10)

$$5\cdot(3\cdot x+2)$$

B 2.

expand$\left((a+b)^2\right)$

$$a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$$

simplify(ans)

$$(a+b)^2$$

expand$\left((a-b)^2\right)$

$$a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$$

simplify(ans)

$$(a-b)^2$$

expand((a+b)(a-b))

$$a^2-b^2$$

factor(ans)

$$(a+b)\cdot(a-b)$$

B 3.

expand$\left((2a+b)^2+(2a-b)(2a+b)\right)$

$$8\cdot a^2+4\cdot a\cdot b$$

schrittweise Umformen in einem extra Fenster:

schrittweise Umformen	f(x)=

expand((a+b+c)(a-b+c))

$$a^2-b^2+c^2+2\cdot a\cdot c$$

schrittweise Umformen	f(x)=

B 4.a

factor$\left(16x^2-9y^2\right)$

$$(4\cdot x+3\cdot y)\cdot(4\cdot x-3\cdot y)$$

B 4.b

factor$\left(9\boldsymbol{x}^2+12\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{y}^2\right)$

$$(3\cdot x+2\cdot y)^2$$

factor$\left(9x^2+12xy+4y^2\right)$

$$9\cdot x^2+4\cdot y^2+12\cdot xy$$

Die zweibuchstabige Variable xy wird nicht als Produkt $x\cdot y$ interpretiert.
Die Systemvariablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind einbuchstabig und nicht für Zeichenketten zugelassen, d.h. $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$

judge($xy=x\cdot y$)

Undefined

judge($\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$)

TRUE

schrittweises Umformen	f(x)=

B 5. quadratische Ergänzung

```
judge(4x^2+24x×y+9y^2=(2x)^2+2×2x×6y+36y^2-36y^2
```

TRUE

```
4x^2+24x×y+9y^2=(2x+6y)^2-27y^2
```

$$4\cdot x^2+9\cdot y^2+24\cdot x\cdot y=(2\cdot x+6\cdot y)^2-27\cdot y^2$$

```
judge(ans)
```

TRUE

B 6. Kontrolle der handschriftlichen Lösungen mit CAS (judge-Befehl oder expand-Befehl)

übungsaufgaben:
================
Klammerpaare in Formeln im CAS als runde Klammern!

Bem:
geschweifte Klammern für Listen, z.B.
{1,2,3,4,5}⇒Liste1

{1,2,3,4,5}

eckige Klammern für Vektoren und Matrizen, z.B.

$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$⇒Vektor1

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matrix1}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

A 1.a

simplify(b−(a+2−(c+d−(3−a))+b))

$c+d-5$

A 1.b

simplify(c+(−d−3−(−(−4−b))−(d−2)−c))

$-b-2\cdot d-5$

A 1.c

simplify(−(a+b−(b+c−d−3−(a+b+c−d))))

$-2\cdot a-b-3$

A 1.d

simplify(a+c−(a+d+2−(b+c−(c−d))))

$b+c-2$

A 2.a

simplify(a×(b+c)−(a+b)c+b×(c−a))

0

A 2.b

simplify(a×(c+b×(a−c))−c×(b×(a−1)+a)−b×(c−a×(b−a)▸

$a\cdot b\cdot(b-2\cdot c)$

A 2.c

simplify((a+b)(a−c)−(a−b)(b+c))

$a^2+b^2-2\cdot a\cdot c$

A 2.d

simplify((a+b−c)(a+c)−(a−c)(a+b+c))

$2\cdot b\cdot c$

A 2.e

simplify((a+b)(a−(b−c)c)−(a+b×(a−c))(b−c))

$-a\cdot\left(b^2-c^2-a-c\right)$

```
expand(ans)
```

$$-a\cdot b^2+a\cdot c^2+a^2+a\cdot c$$

A 2.f

```
simplify((a+b-c)(a-b+c)+(a-b-c)(a+b+c))
```

$$2\cdot\left(a^2-b^2-c^2\right)$$

Hinweis: Eingabefehler ergeben natürlich nicht das gewünschte Ergebnis!

Die CAS-Darstellung des Ergebnisses entspricht nicht unbedingt der Umformung per Hand, so dass z.B. noch die Reihenfolge der Summanden im Ergebnis geändert werden muss, um völlige Identität zu erhalten.
oder z.B. judge-Befehl nutzen.

A 3.a

```
simplify((2a+b)(2a-b)-(b+c)(b-c))
```

$$4\cdot a^2-2\cdot b^2+c^2$$

A 3.b

```
simplify((a+b+c)(-a+b+c)+(a-b-2c)^2-2(b+c)^2)
```

$$3\cdot c^2-2\cdot a\cdot b-4\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c$$

A 3.c

```
simplify((a+b)(b-a)+(a+b-c)(a-b-c)-(b-c)^2)
```

$$-b^2-2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c$$

A 3.d

```
simplify((2b-3a)(3a-2b)-(2a-b)^2)
```

$$-13\cdot a^2-5\cdot b^2+16\cdot a\cdot b$$

A 4.a

```
factor(4a^2+20a×b+25b^2)
```

$(2 \cdot a+5 \cdot b)^2$

A 4.b

factor(169x^2-312x×y+144y^2)

$(13 \cdot x-12 \cdot y)^2$

A 4.c

factor(x^2+2x×y+y^2-9z^2)

$(x+y+3 \cdot z) \cdot (x+y-3 \cdot z)$

A 4.d

factor(x^2+6x×z-y^2+9z^2)

$(x+y+3 \cdot z) \cdot (x-y+3 \cdot z)$

A 4.e

factor(16a^2+24a×b+9b^2)

$(4 \cdot a+3 \cdot b)^2$

Quadratische Ergänzung im CAS:

A 5.a

$\text{factor}\left(64x\char`^2+112x+(\frac{112x}{2\times 8x})\char`^2\right)-(\frac{112x}{2\times 8x})\char`^2+64$

$(8 \cdot x+7)^2+15$

A 5.b

$\text{factor}\left(4x\char`^2+36x+(\frac{36x}{2\times 2x})\char`^2\right)-(\frac{36x}{2\times 2x})\char`^2+36$

$(2 \cdot x+9)^2-45$

A 5.c

$\text{factor}\left(16x\char`^2+56x+(\frac{56x}{2\times 4x})\char`^2\right)-(\frac{56x}{2\times 4x})\char`^2+196$

$(4 \cdot x+7)^2+147$

A 5.d

$\text{factor}\left(16x\char`^2-40x+\left(\frac{-40x}{2\times 4x}\right)\char`^2\right)-\left(\frac{-40x}{2\times 4x}\right)\char`^2+100$

$(4 \cdot x-5)^2+75$

Prof. Dr. Ludwig Paditz, Mathe-Intensivkurs 2012
Einführung in die CAS-Software (ClassPad)
Version 03.06.1000

Bruchrechnung:
=================

B 1.

$7\times\frac{3}{5}$

$$\frac{21}{5}$$

$7\frac{3}{5}$

$$\frac{21}{5}$$

$7+\frac{3}{5}$

$$\frac{38}{5}$$

Hinweis:

gemischte Größen, z.B. $7\frac{3}{5}$, müssen als $7+\frac{3}{5}$ eingegeben werden, andernfalls interpretiert der Rechner die Eingabe als Produkt.
Tipp: Gemischte Zahlen möglichst vermeiden (vgl. Bartsch S. 56, Kemnitz S. 14)

$\frac{17}{3}/5$

$$\frac{17}{15}$$

$\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}$

$$\frac{3}{20}$$

$$\frac{3}{4}\frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{20}$$

Feststellung: ein fehlendes Operationszeichen wird als Multiplikationszeichen interpretiert!

$$\frac{3}{4}/\frac{1}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{1}$$

$$\frac{15}{4}=\frac{15}{4}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$$

$$\frac{7}{5}$$

alle weiteren Ergebnisse werden als Zeilenvektor (g) bis l)) bzw. als Liste (m) bis r)) generiert:

Eingabe in eckigen Klammern, Zahlen durch Komma getrennt:

$$[\frac{3}{5}-\frac{4}{5},\frac{2}{3}+\frac{4}{5},\frac{2}{3}-\frac{4}{5},\frac{2}{3}+\frac{5}{6},\frac{3}{4}-\left(2+\frac{1}{5}\right),\frac{3}{4}-2\frac{1}{5}]$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{22}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{3}{2} & -\frac{29}{20} & \frac{7}{20}\end{bmatrix}$$

Eingabe mit 2D-Eingabemaske: $\begin{bmatrix}\square & \square & \square & \square & \square & \square\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{5}-\frac{4}{5} & \frac{2}{3}+\frac{4}{5} & \frac{2}{3}-\frac{4}{5} & \frac{2}{3}+\frac{5}{6} & \frac{3}{4}-\left(2+\frac{1}{5}\right) & \frac{3}{4}-2\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\left[-\frac{1}{5}\quad \frac{22}{15}\quad -\frac{2}{15}\quad \frac{3}{2}\quad -\frac{29}{20}\quad \frac{7}{20}\right]$$

$$\left\{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\left(2+\frac{1}{6}\right),\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+3\frac{3}{4},\frac{\frac{3}{2}}{15},\frac{40}{\frac{5}{3}},\frac{3}{2\frac{4}{5}},\frac{2}{3+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$\left\{-\frac{7}{10},\frac{29}{12},\frac{1}{10},24,\frac{15}{8},\frac{8}{15}\right\}$$

Die 2D-Eingabemasken gestatten die Eingabe so, wie sie in gedruckter Form vorliegt.
Die Eingabemasken findet man im **virtuellen Keyboard.**

B 2.
a) $a\times b\times c\neq 0$, d.h. $a\neq 0$, $b\neq 0, c\neq 0$.

$$\text{simplify}\left(\frac{21a^2b^5c}{105ab^3c^3}\right)$$

$$\frac{a^2\cdot b^5}{5\cdot ab^3\cdot c^2}$$

$$\text{simplify}\left(\frac{21a^2b^5c}{105a\times b^3c^3}\right)$$

$$\frac{a\cdot b^2}{5\cdot c^2}$$

□

Zuerst wurde ab als **zweibuchstabige Einzelvariable** interpretiert, so dass ein Multiplikationszeichen eingefügt werden muss!

Download:

http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
Mathe-Intensiv2012-Preuss.vcp bzw.
Mathe-IntensivDoc2012.pdf

ClassPad Manager Professional Edition, vgl.
http://www.casio-schulrechner.de/de/produkte/
zubehoer/classpadmanager30/

zugehöriger CAS-Grafiktaschenrechner:
http://www.casio-schulrechner.de/de/produkte/
grafikrechner/casrechner/classpad330/

CASIO Worldwide Educational Website:
http://edu.casio.com/