

Elementares Rechnen mit reellen Zahlen:

=====

Nutzung von CAS-Befehlen:

Grundformat: "Anordnung fallend" einstellen

B 1.a

$5 \cdot (3x+2)$

$5 \cdot (3 \cdot x+2)$

`expand(ans)`

$15 \cdot x+10$

`judge(5 \cdot (3x+2)=15 \cdot x+10)`

TRUE

B 1.b

`factor(15 \cdot x+10)`

$5 \cdot (3 \cdot x+2)$

B 2.

`expand((a+b)2)`

$a^2+b^2+2 \cdot a \cdot b$

`simplify(ans)`

$(a+b)^2$

`expand((a-b)2)`

$a^2+b^2-2 \cdot a \cdot b$

`simplify(ans)`

$(a-b)^2$

`expand((a+b)(a-b))`

a^2-b^2

`factor(ans)`

$$(a+b) \cdot (a-b)$$

B 3.

$$\text{expand}((2a+b)^2 + (2a-b)(2a+b))$$

$$8 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b$$

schrittweise Umformen in einem extra Fenster:

schrittweise Umformen	f(x)=
-----------------------	-------

$$\text{expand}(a+b+c)(a-b+c)$$

$$a^2 - b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c$$

schrittweise Umformen	f(x)=
-----------------------	-------

B 4. a

$$\text{factor}(16x^2 - 9y^2)$$

$$(4 \cdot x + 3 \cdot y) \cdot (4 \cdot x - 3 \cdot y)$$

B 4. b

$$\text{factor}(9x^2 + 12xy + 4y^2)$$

$$(3 \cdot x + 2 \cdot y)^2$$

$$\text{factor}(9x^2 + 12xy + 4y^2)$$

$$9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 12 \cdot xy$$

Die zweibuchstabige Variable xy wird nicht als Produkt $x \cdot y$ interpretiert.

Die Systemvariablen x und y sind einbuchstabig und nicht für Zeichenketten zugelassen, d.h. $xy = x \cdot y$

$$\text{judge}(xy = x \cdot y)$$

Undefined

$$\text{judge}(x \cdot y = x \cdot y)$$

TRUE

B 5. quadratische Ergänzung

```
judge(4x^2+24x*y+9y^2=(2x)^2+2*2x*6y+36y^2-36y^2,▶
                                         TRUE
```

$$4x^2+24x*y+9y^2=(2x+6y)^2-27y^2$$

$$4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 + 24 \cdot x \cdot y = (2 \cdot x + 6 \cdot y)^2 - 27 \cdot y^2$$

```
judge(ans)
                                         TRUE
```

B 6. Kontrolle der handschriftlichen Lösungen mit CAS (judge-Befehl oder expand-Befehl)

übungsaufgaben:

=====

Klammerpaare in Formeln im CAS als runde Klammern!

Bem:

geschweifte Klammern für Listen, z.B.

{1,2,3,4,5} ⇒ Liste1

{1,2,3,4,5}

eckige Klammern für Vektoren und Matrizen,

z.B.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ⇒ Vektor1

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matrix1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A 1.a

$$\text{simplify}(b-(a+2-(c+d-(3-a))+b))$$

$$c+d-5$$

A 1.b

$$\text{simplify}(c+(-d-3-(-(-4-b))-(d-2)-c))$$

$$-b-2 \cdot d-5$$

A 1.c

$$\text{simplify}(- (a+b-(b+c-d-3-(a+b+c-d))))$$

$$-2 \cdot a-b-3$$

A 1.d

$$\text{simplify}(a+c-(a+d+2-(b+c-(c-d))))$$

$$b+c-2$$

A 2.a

$$\text{simplify}(a \times (b+c)-(a+b)c+b \times (c-a))$$

$$0$$

A 2.b

$$\text{simplify}(a \times (c+b \times (a-c))-c \times (b \times (a-1)+a)-b \times (c-a \times (b-a)))$$

$$a \cdot b \cdot (b-2 \cdot c)$$

A 2.c

$$\text{simplify}((a+b)(a-c)-(a-b)(b+c))$$

$$a^2+b^2-2 \cdot a \cdot c$$

A 2.d

$$\text{simplify}((a+b-c)(a+c)-(a-c)(a+b+c))$$

$$2 \cdot b \cdot c$$

A 2.e

$$\text{simplify}((a+b)(a-(b-c)c)-(a+b \times (a-c))(b-c))$$

$$-a \cdot (b^2-c^2-a-c)$$

expand(ans)

$$-a \cdot b^2 + a \cdot c^2 + a^2 + a \cdot c$$

A 2.f

simplify((a+b-c)(a-b+c)+(a-b-c)(a+b+c))

$$2 \cdot (a^2 - b^2 - c^2)$$

Hinweis: Eingabefehler ergeben natürlich nicht das gewünschte Ergebnis!

Die CAS-Darstellung des Ergebnisses entspricht nicht unbedingt der Umformung per Hand, so dass z.B. noch die Reihenfolge der Summanden im Ergebnis geändert werden muss, um völlige Identität zu erhalten.

oder z.B. judge-Befehl nutzen.

A 3.a

simplify((2a+b)(2a-b)-(b+c)(b-c))

$$4 \cdot a^2 - 2 \cdot b^2 + c^2$$

A 3.b

simplify((a+b+c)(-a+b+c)+(a-b-2c)^2-2(b+c)^2)

$$3 \cdot c^2 - 2 \cdot a \cdot b - 4 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

A 3.c

simplify((a+b)(b-a)+(a+b-c)(a-b-c)-(b-c)^2)

$$-b^2 - 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

A 3.d

simplify((2b-3a)(3a-2b)-(2a-b)^2)

$$-13 \cdot a^2 - 5 \cdot b^2 + 16 \cdot a \cdot b$$

A 4.a

factor(4a^2+20a×b+25b^2)

$$(2 \cdot a + 5 \cdot b)^2$$

A 4. b

$$\text{factor}(169x^2 - 312x \cdot y + 144y^2)$$

$$(13 \cdot x - 12 \cdot y)^2$$

A 4. c

$$\text{factor}(x^2 + 2x \cdot y + y^2 - 9z^2)$$

$$(x + y + 3 \cdot z) \cdot (x + y - 3 \cdot z)$$

A 4. d

$$\text{factor}(x^2 + 6x \cdot z - y^2 + 9z^2)$$

$$(x + y + 3 \cdot z) \cdot (x - y + 3 \cdot z)$$

A 4. e

$$\text{factor}(16a^2 + 24a \cdot b + 9b^2)$$

$$(4 \cdot a + 3 \cdot b)^2$$

Quadratische Ergänzung im CAS:

A 5. a

$$\text{factor}\left(64x^2 + 112x + \left(\frac{112x}{2 \cdot 8x}\right)^2\right) - \left(\frac{112x}{2 \cdot 8x}\right)^2 + 64$$

$$(8 \cdot x + 7)^2 + 15$$

A 5. b

$$\text{factor}\left(4x^2 + 36x + \left(\frac{36x}{2 \cdot 2x}\right)^2\right) - \left(\frac{36x}{2 \cdot 2x}\right)^2 + 36$$

$$(2 \cdot x + 9)^2 - 45$$

A 5. c

$$\text{factor}\left(16x^2 + 56x + \left(\frac{56x}{2 \cdot 4x}\right)^2\right) - \left(\frac{56x}{2 \cdot 4x}\right)^2 + 196$$

$$(4 \cdot x + 7)^2 + 147$$

A 5. d

$$\text{factor}\left(16x^2 - 40x + \left(\frac{-40x}{2 \cdot 4x}\right)^2\right) - \left(\frac{-40x}{2 \cdot 4x}\right)^2 + 100$$

$$(4 \cdot x - 5)^2 + 75$$

▼ Datei Edit Aktion

expand((a-b)^2)

simplify(ans)

expand((a+b)(a-b))

factor(ans)

B 3.

expand((2a+b)^2+(2a-b)(2a+b))

schrittweise Umformen in einem extra Fenster

schrittweise Umformen

$a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$

$(a-b)^2$

a^2-b^2

$(a+b)\cdot(a-b)$

$8\cdot a^2+4\cdot a\cdot b$

Fehler!

Nicht äquivalent

OK

$(2\cdot a+b)^2+(2\cdot a-b)\cdot(2\cdot a+b)$

$= (2\cdot a)^2+2\cdot 2\cdot a\cdot b+b^2+(2\cdot a)^2-b^2$

$= 1$

Äq: $(2\cdot a+b)^2+(2\cdot a-b)\cdot(2\cdot a+b)$

▼ Datei Edit Aktion

expand((a+b)(a-b))

factor(ans)

B 3.

expand((2a+b)^2+(2a-b)(2a+b))

schrittweise Umformen in einem extra Fenster:

schrittweise Umformen

expand((a+b+c)(a-b+c))

schrittweise Umformen

a^2-b^2

$(a+b)\cdot(a-b)$

$8\cdot a^2+4\cdot a\cdot b$

$a^2-b^2+c^2+2\cdot a\cdot c$

$(a+b+c)\cdot(a-b+c)$

$= (a+b)\cdot(a-b+c)+c\cdot(a-b+c)$

$= (a+b)\cdot(a-b)+(a+b)\cdot c+c\cdot(a-b)+c^2$

$= a^2-b^2+a\cdot c+b\cdot c+c\cdot a-c\cdot b+c^2$

$= a^2-b^2+2\cdot a\cdot c+c^2$

$= 0$

Äq: $(a+b+c)\cdot(a-b+c)$

▼ Datei Edit Aktion

$\text{factor}(16x^2-9y^2)$ $(4 \cdot x + 3 \cdot y) \cdot (4 \cdot x - 3 \cdot y)$

B 4. b

$\text{factor}(9x^2+12xy+4y^2)$ $(3 \cdot x + 2 \cdot y)^2$

$\text{factor}(9x^2+12xy+4y^2)$ $9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 12 \cdot xy$

Die zweibuchstabile Variable xy wird nicht als Produkt x·y interpretiert.
 Die Systemvariablen **x** und **y** sind einbuchstabig und nicht für Zeichenketten zugelassen, d.h. **xy=x·y**

`judge(xy=x·y)` Undefined

`judge(x·y=x·y)` TRUE

schrittweises Umformen f(x)=

$9 \cdot x^2 + 12 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2$
 $= 9 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2$
 $= 3 \cdot x \cdot (3 \cdot x + 2 \cdot y) + 2 \cdot y \cdot (3 \cdot x + 2 \cdot y)$
 $= (3 \cdot x + 2 \cdot y) \cdot (3 \cdot x + 2 \cdot y)$
 $= (3 \cdot x + 2 \cdot y)^2$
 $= \square$

Äq: $9 \cdot x^2 + 12 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2$

Prof. Dr. Ludwig Paditz, Mathe-Intensivkurs 2011
Einführung in die CAS-Software (ClassPad)

**neu: Mengenlehre implementiert
(Stand Mai 2011)**

**vgl. Add-In-Anwendung
(nur im Taschenrechner)**

und Programme, s. library-Ordner

**Mengenlehre, grafische Darstellungen
=====**

**Rechenoperationen der Mengenlehre,
z.B. $A \cup B$ oder $A \cap B$,
kann der CAS-Rechner nicht ausführen!
(obwohl die Operationszeichen im Zeichensatz
vorhanden sind)
Derzeit können diese Symbole nur zur
Textverarbeitung genutzt werden.**

B 1. Symbole im CAS

**\emptyset ... leere Menge
 Ω ... Grundmenge
 \mathbb{N} ... Menge der natürlichen Zahlen
 \mathbb{R} ... Menge der reellen Zahlen**

**B 2. Darstellung von Mengen als Listen
(endliche Listen können im CAS generiert
werden)**

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A kann im CAS generiert werden:

`seq(a, a, 1, 5, 1) ⇒ A`

`{1, 2, 3, 4, 5}`

somit $A = \{a \mid a \in \mathbf{N} \text{ und } 1 \leq a \leq 5\}$

$B = \{0\} \cup A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

B kann im CAS generiert werden:

`seq(a, a, 0, 5, 1) ⇒ B`

`{0, 1, 2, 3, 4, 5}`

=====

neu:

Mengenlehre mit dem Programm

menge(..., ..., ...),

drei Parameter, jeweils als Zeichenkette einzugeben:

`A:="{1, 2, 3, 4, 5}"`

`"{1, 2, 3, 4, 5}"`

`B:="{0}"`

`"{0}"`

`menge(A, "U", B)`

`done`

Ergebnisvariable ist BB

`BB`

`"{1, 2, 3, 4, 5, 0}"`

neu:

Mengenlehre mit dem Programm

SetUnion(..., ...),

zwei Parameter, Elemente jeweils als Zeichenkette einzugeben:

A:="1,2,3,4,5"

"1,2,3,4,5"

B:="0"

"0"

SetUnion(A,B)

done

Ergebnisvariable ist Result

Result

"{0,1,2,3,4,5}"

=====

$C = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{x \mid \frac{x}{2} \in \mathbf{N}\}$

D kann im CAS generiert werden:

$\text{seq}(2d+1, d, 0, 5) \Rightarrow D$

{1,3,5,7,9,11}

$D = \{m \mid m = 2d+1 \text{ und } d \in \mathbf{N} \text{ und } d \leq 5\}$

B 3. Lösungsmengen (solve-Befehl)

$\text{solve}(x^2-3x+2=0, x)$

{x=1, x=2}

{1,2} $\Rightarrow A$

{1,2}

$\text{solve}(x^2-3x+5=0, x)$

No Solution

{ } $\Rightarrow B$

{ }

B ist die leere Menge.

$C = \{D, r, e, s, d, n\} = \{D, d, e, n, r, s\}$

Mengen sind ungeordnete Zusammenfassungen gleichartiger Objekte (unterscheidbare Elemente aus der Grundmenge der Groß- und Kleinbuchstaben). Gleiche Elemente in C werden nicht mehrfach angegeben.

=====

neu:

C:="D,r,e,s,d,e,n"

"D,r,e,s,d,e,n"

SetUnion(C,C)

done

Result

"{D,d,e,n,r,s}"

Ergebnis **alphanumerisch sortiert!**

C:="{D,r,e,s,d,e,n}"

"{D,r,e,s,d,e,n}"

menge(C,"U",C)

done

BB

"{D,r,e,s,d,n}"

Ergebnis **nicht alphanumerisch sortiert!**

=====

solve($x^2=4$, x)

{x=-2, x=2}

solve($x^4=16$, x)

{x=-2, x=2}

$(-2, 2) \ni \emptyset$

{-2, 2}

$x^2=4$ und $x^4=8$ können nicht gleichzeitig gelten:

$E = \{\}$ leere Menge

B 4. Darstellung reeller Intervalle als Lösungsmengen

<code>solve((x-a)(x-b) ≥ 0, x) a < b</code>	$\{(x-a) \cdot (x-b) \geq 0\}$
<code>solve((x-a)(x-b) ≥ 0 a < b, x)</code>	$\{(x-a) \cdot (x-b) \geq 0\}$
<code>solve((x-3)(x-5) ≥ 0, x)</code>	$\{x \leq 3, 5 \leq x\}$
<code>solve((x-3)(x-5) > 0, x)</code>	$\{x < 3, 5 < x\}$

Die Intervallsymbolik $[a, b]$ oder $(a, b) =]a, b[$ usw. kann im CAS nicht verarbeitet werden (nur als Textverarbeitung)

B 5.

Mengenrelationen, z.B. $A \subset B$, $A \supset B$, können im CAS nicht verarbeitet werden (nur als Textverarbeitung)

Mengenoperationen, z.B. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, \bar{A} , $A \times B$, können im CAS nicht verarbeitet werden (nur als Textverarbeitung)

B 8. Produktmengen in der x-y-Ebene darstellen (2D-Grafik)

$A \times B = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2\}$ als 2D-Grafik im 2D-Grafikmenü:

2D-Ungleichungsgrafik (elementare Syntax mit \leq)	Y1: ... Y2: ...
---	--------------------

Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen,
Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

2D-Ungleichungsgrafik (komprimierte Syntax mit \rightarrow)	Y1: ... Y2: ...
--	--------------------

Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen,
Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

A 3.

$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$... Einheitskreis
(Kreislinie)

2D-Grafik: Einheitskreis (Kreislinie)	Y1: ... Y2: ...
---------------------------------------	--------------------

Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen,
Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

$B = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$... Einheitskreis
(Kreislinie mit Innengebiet = Kreisfläche mit Rand)

2D-Grafik: Einheitskreis (Kreisfläche mit Rand)	Y1: ... Y2: ...
---	--------------------

Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen,
Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

$C = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x\}$... Gerade
(Winkelhalbierende)

2D-Grafik: Gerade in x-y-Ebene	Y1: ... Y2: ...
--------------------------------	--------------------

Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen,

Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

$D = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x\}$... Halbebene (oberhalb der Winkelhalbierenden) mit Rand

2D-Grafik: spezielle Halbebene	Y1: ... Y2: ...
--------------------------------	--------------------

Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

Der Mengendurchschnitt "∩" erfasst nur diejenigen Zahlenpaare (x, y) , die beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen.

Die Mengenvereinigung "∪" erfasst alle diejenigen Zahlenpaare (x, y) , die mindestens eine Bedingung erfüllen.

z.B. BUD als 2D-Grafik

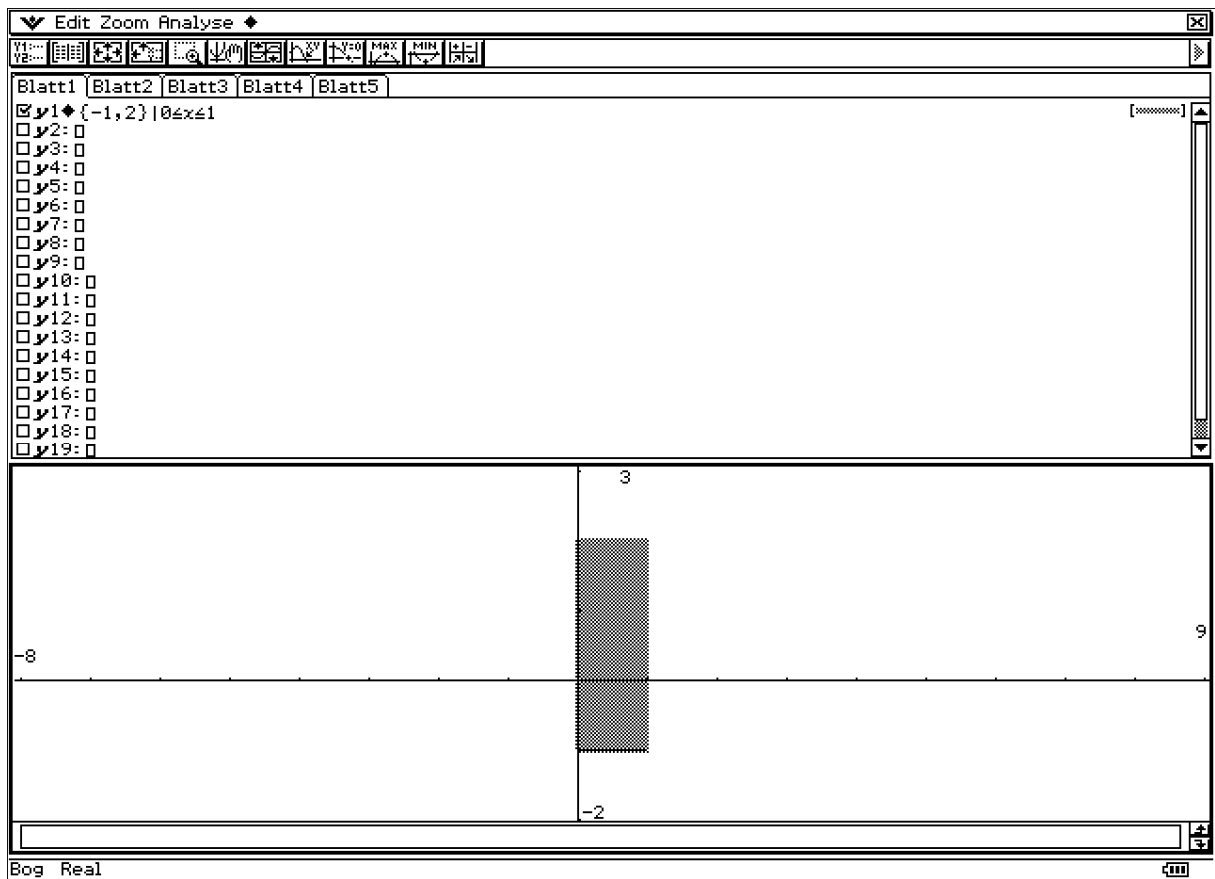
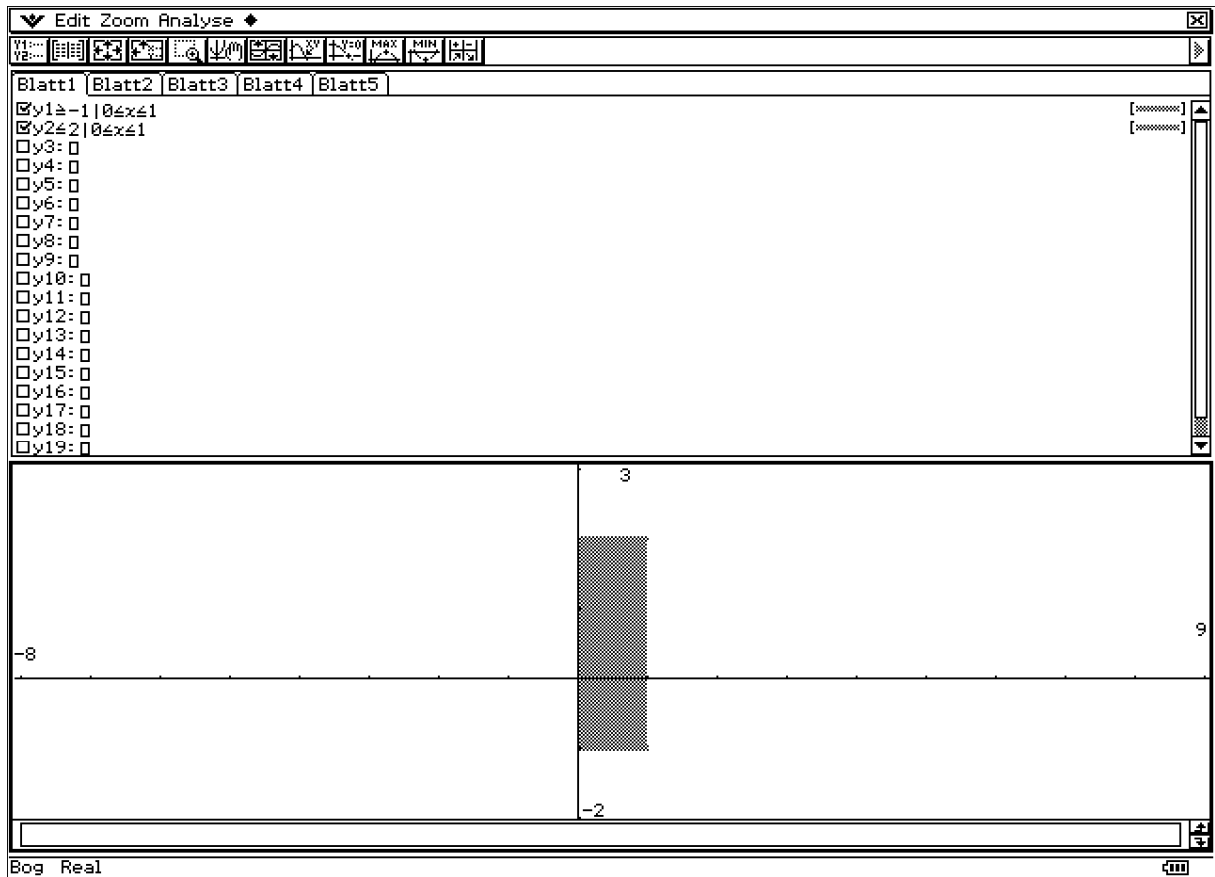
2D-Grafik: BUD	Y1: ... Y2: ...
----------------	--------------------

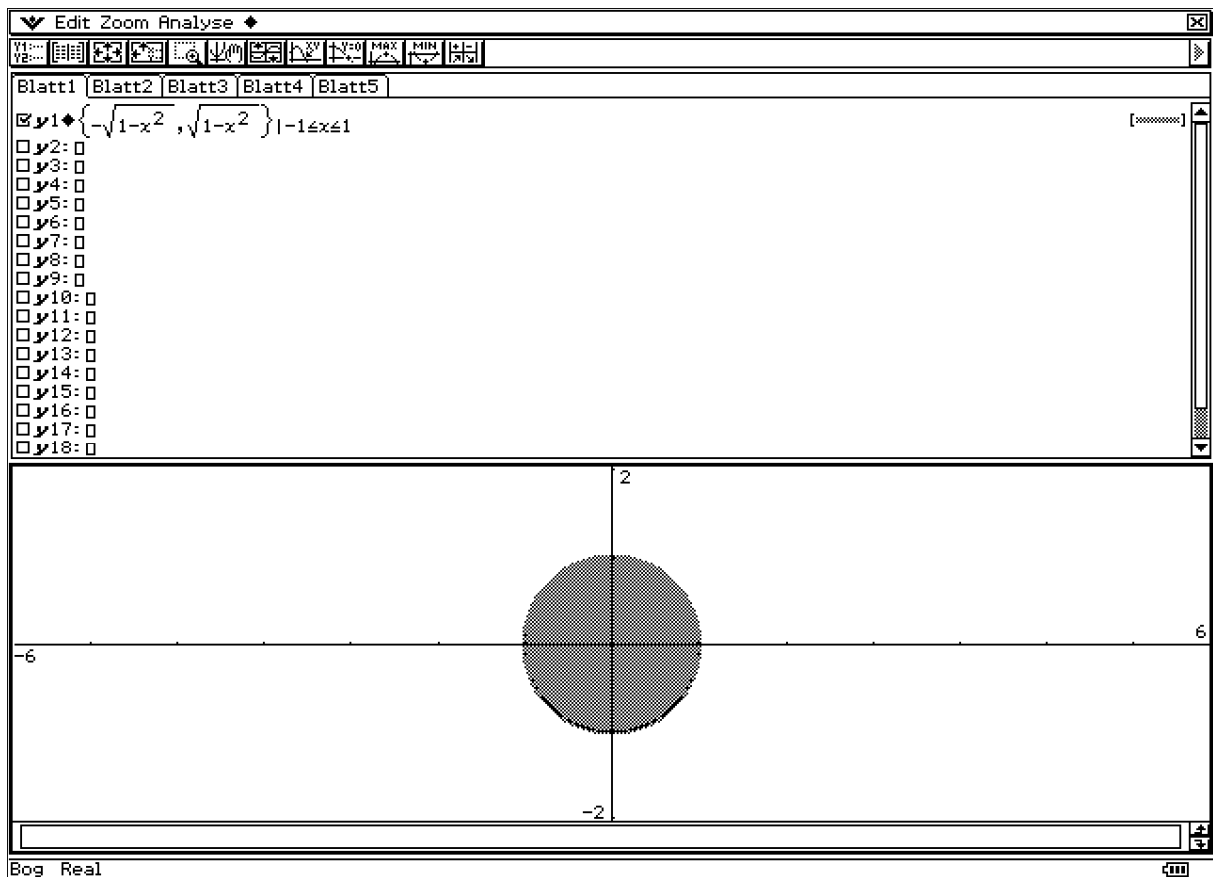
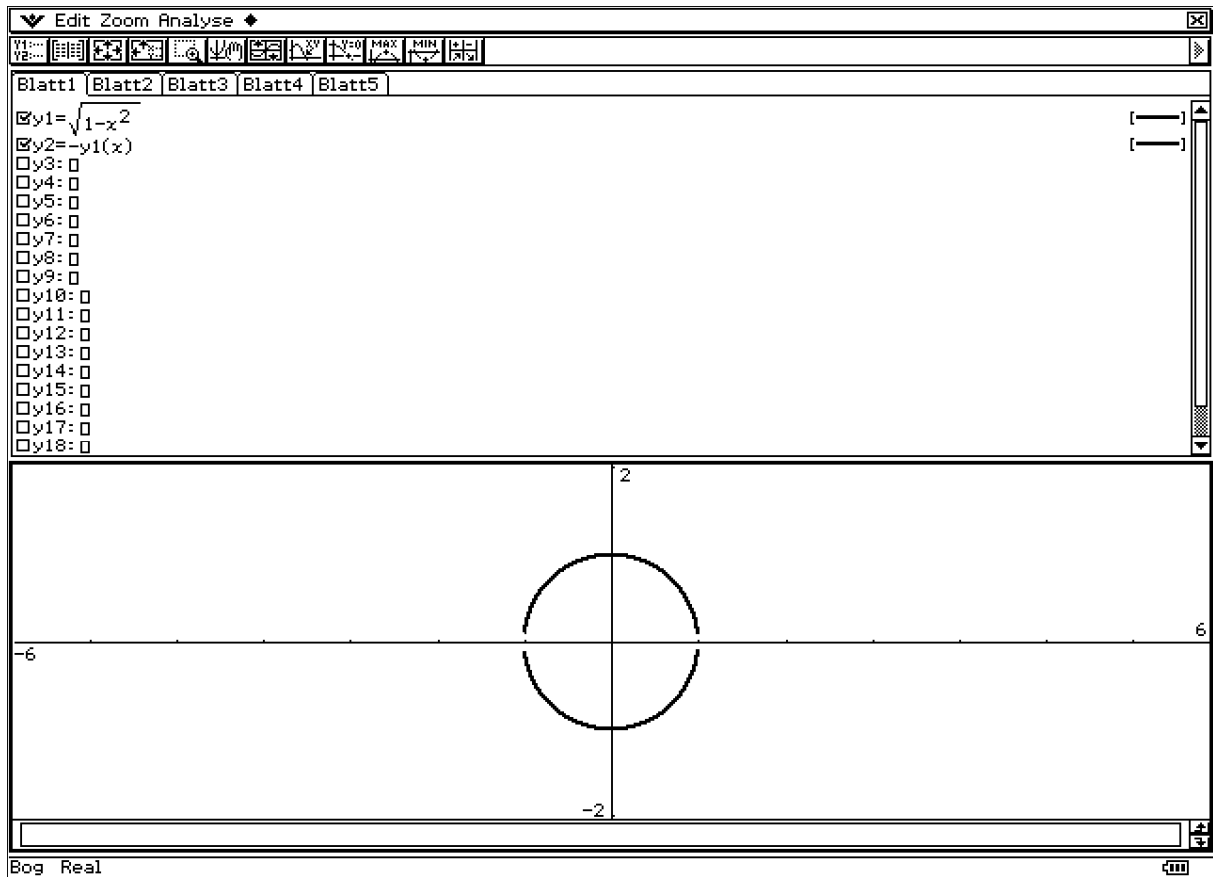
Hinweis: Betrachtungsfenstereinstellung vornehmen, Grafikzeichenstil einstellen, Zoom: quadratisch

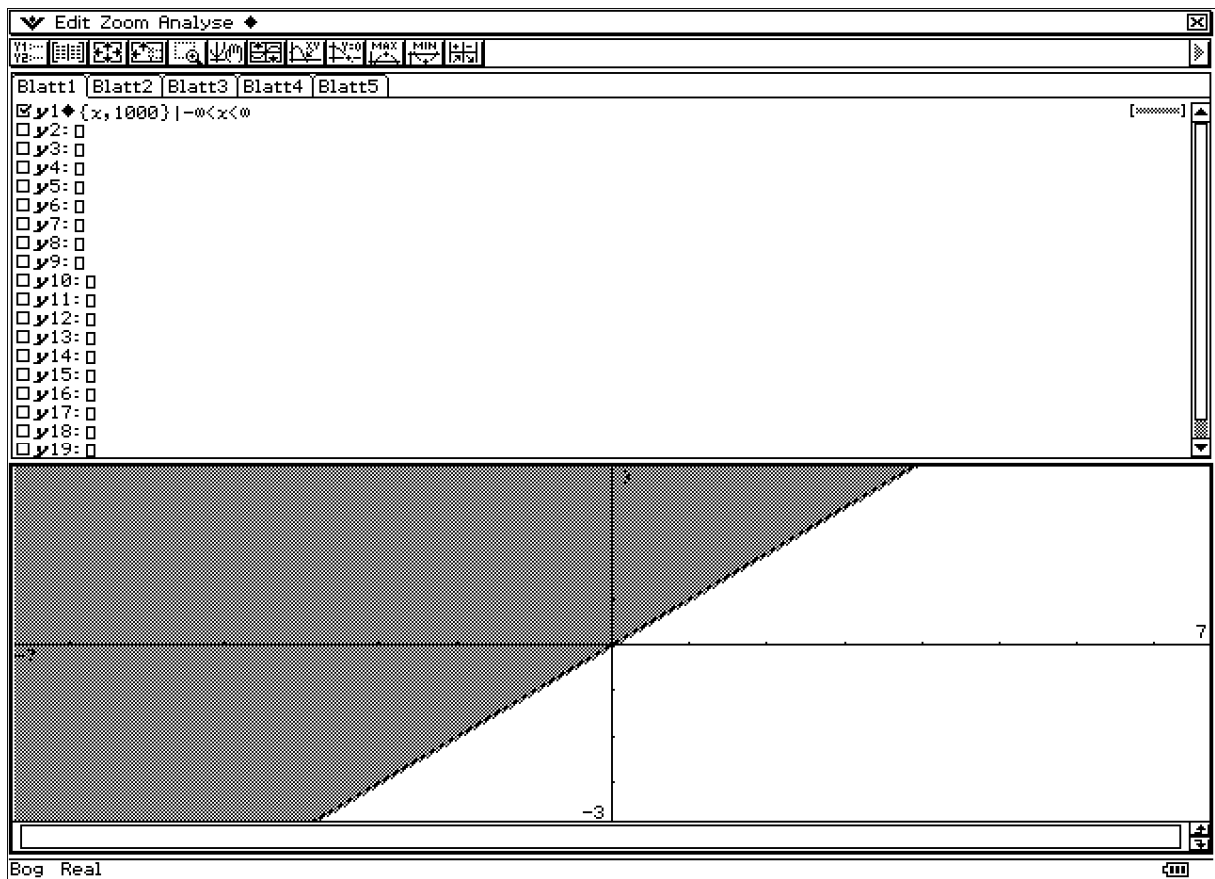
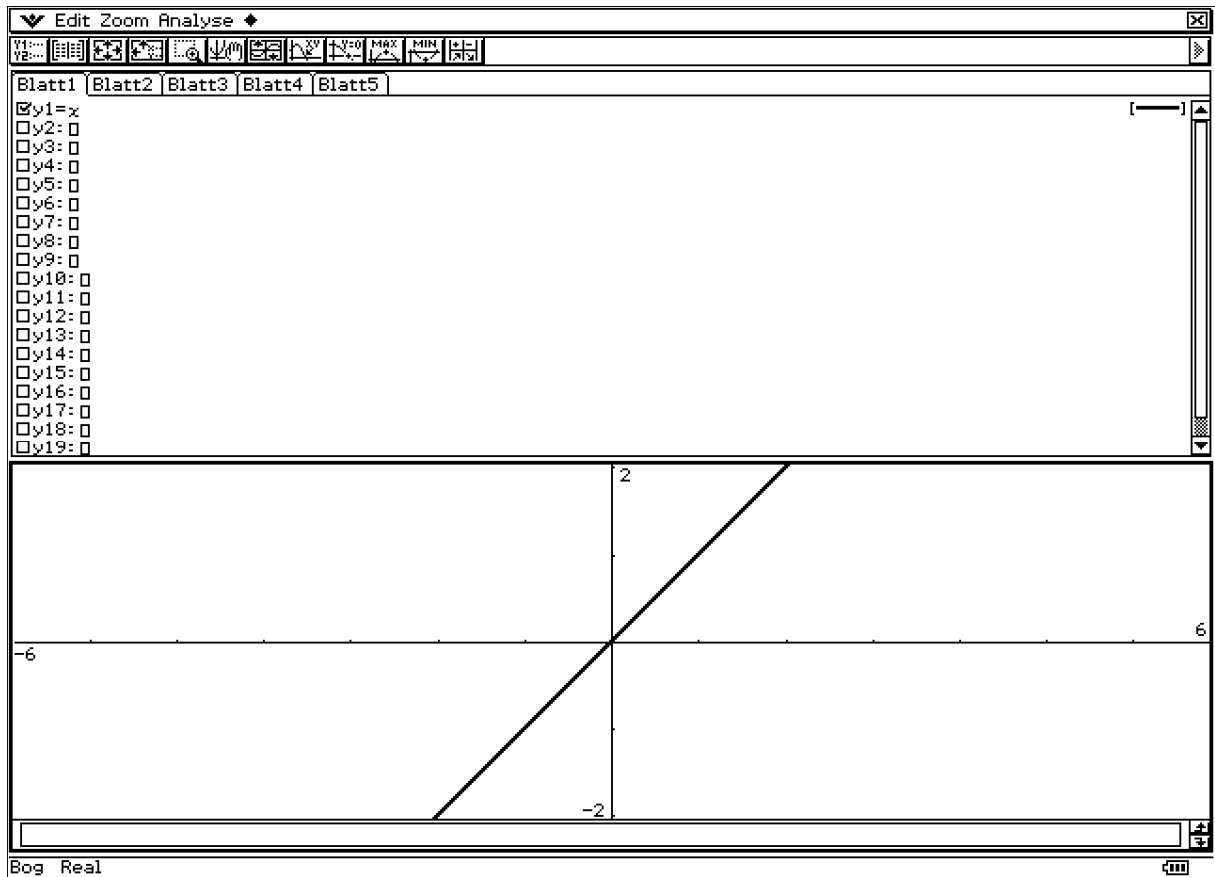
z.B. BnD als 2D-Grafik

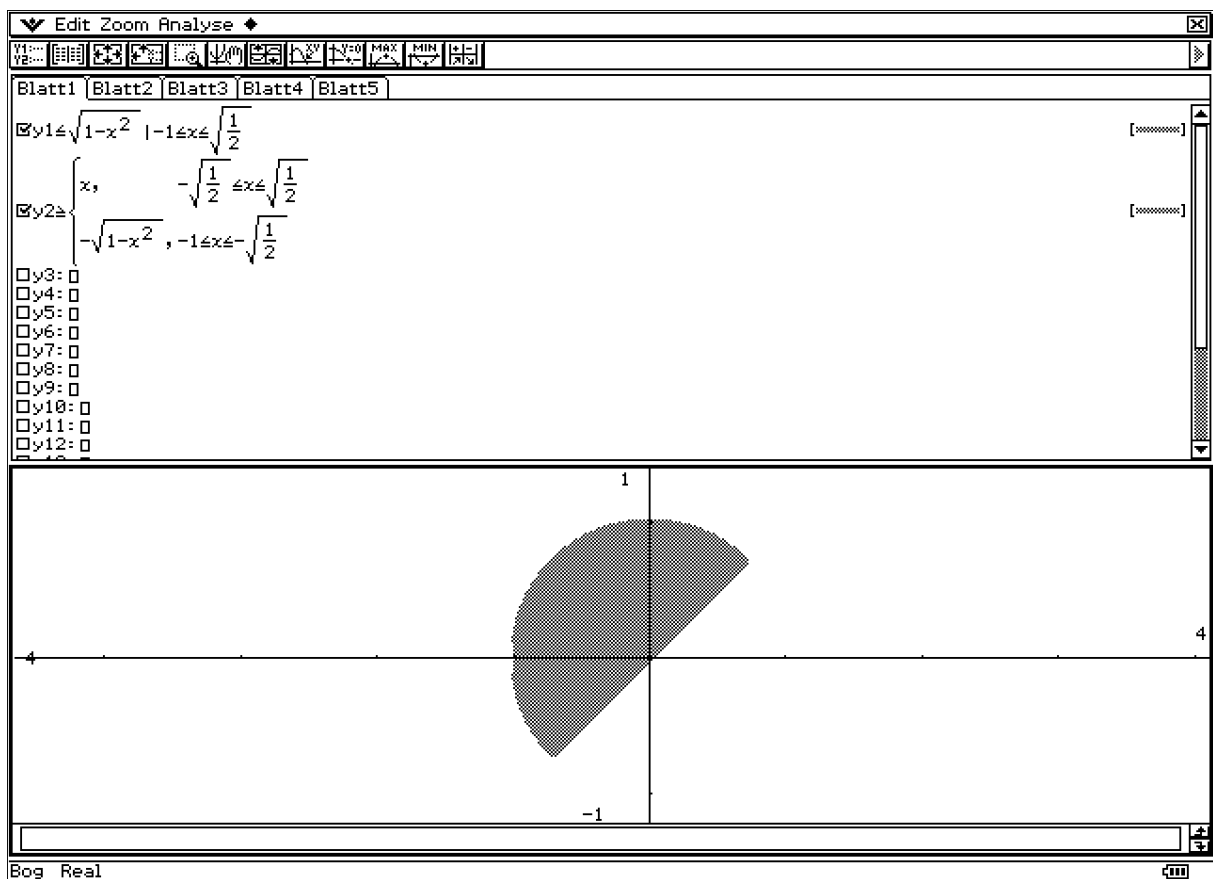
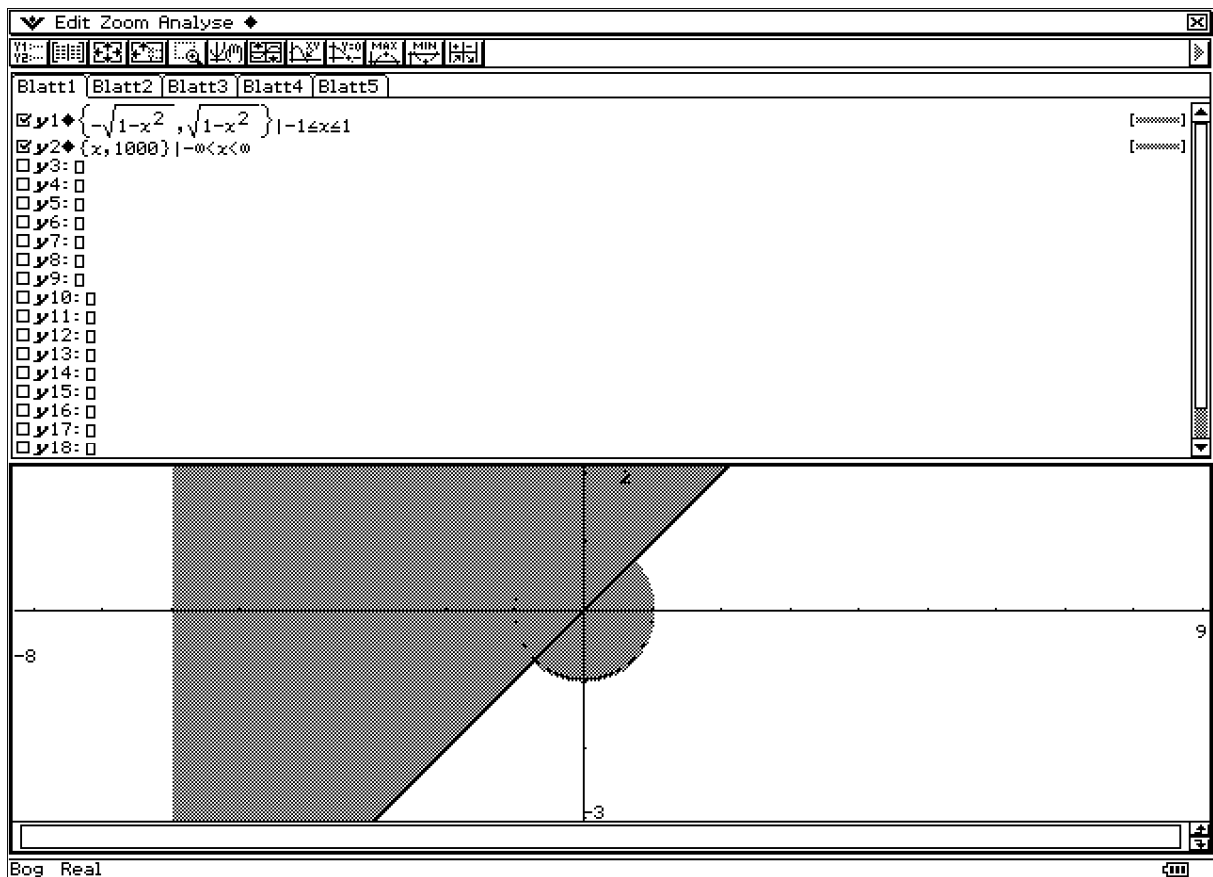
2D-Grafik: BnD	Y1: ... Y2: ...
----------------	--------------------

Die untere Funktion wird stückweise definiert (piecewise-Befehl, spezielle Eingabemaske)









Bruchrechnung:

=====

B 1.

$$7 \times \frac{3}{5}$$

$$\frac{21}{5}$$

$$7 \frac{3}{5}$$

$$\frac{21}{5}$$

$$7 + \frac{3}{5}$$

$$\frac{38}{5}$$

Hinweis:

gemischte Größen, z.B. $7 \frac{3}{5}$, müssen als $7 + \frac{3}{5}$

eingegeben werden, andernfalls interpretiert der Rechner die Eingabe als Produkt.

Tipp: Gemischte Zahlen möglichst vermeiden (vgl. Bartsch S. 56, Kemnitz S. 14)

$$\frac{17}{3} / 5$$

$$\frac{17}{15}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{20}$$

$$\frac{3}{4} \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{20}$$

Feststellung: ein fehlendes Operationszeichen wird als Multiplikationszeichen interpretiert!

$$\frac{3}{4} / \frac{1}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{1}$$

$$\frac{15}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{7}{5}$$

alle weiteren Ergebnisse werden als Zeilenvektor (g) bis l)) bzw. als Liste (m) bis r)) generiert:

Eingabe in eckigen Klammern, Zahlen durch Komma getrennt:

$$\left[\frac{3}{5} - \frac{4}{5}, \frac{2}{3} + \frac{4}{5}, \frac{2}{3} - \frac{4}{5}, \frac{2}{3} + \frac{5}{6}, \frac{3}{4} - \left(2 + \frac{1}{5} \right), \frac{3}{4} - 2 \frac{1}{5} \right]$$
$$\left[-\frac{1}{5}, \frac{22}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{3}{2}, -\frac{29}{20}, \frac{7}{20} \right]$$

Eingabe mit 2D-Eingabemaske: []

$$\left[\frac{3}{5} - \frac{4}{5}, \frac{2}{3} + \frac{4}{5}, \frac{2}{3} - \frac{4}{5}, \frac{2}{3} + \frac{5}{6}, \frac{3}{4} - \left(2 + \frac{1}{5} \right), \frac{3}{4} - 2 \frac{1}{5} \right]$$
$$\left[-\frac{1}{5}, \frac{22}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{3}{2}, -\frac{29}{20}, \frac{7}{20} \right]$$

$$\left\{ \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \left(2 + \frac{1}{6} \right), \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}, \frac{\frac{3}{2}}{15}, \frac{40}{\frac{5}{3}}, \frac{3}{2\frac{4}{5}}, \frac{2}{3 + \frac{3}{4}} \right\}$$

$$\left\{ -\frac{7}{10}, \frac{29}{12}, \frac{1}{10}, 24, \frac{15}{8}, \frac{8}{15} \right\}$$

Die 2D-Eingabemasken gestatten die Eingabe so, wie sie in gedruckter Form vorliegt.

Die Eingabemasken findet man im **virtuellen Keyboard**.

B 2.

a) $a \times b \times c \neq 0$, d.h. $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

$$\text{simplify}\left(\frac{21a^2b^5c}{105ab^3c^3}\right)$$

$$\frac{a^2 \cdot b^5}{5 \cdot ab^3 \cdot c^2}$$

$$\text{simplify}\left(\frac{21a^2b^5c}{105a \times b^3c^3}\right)$$

$$\frac{a \cdot b^2}{5 \cdot c^2}$$

Zuerst wurde ab als **zweibuchstabige Einzelvariable** interpretiert, so dass ein Multiplikationszeichen eingefügt werden muss!

Download:

<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mathe-Intensiv2011-Preuss.vcp> bzw.
Mathe-IntensivDoc2011.pdf

ClassPad Manager Professional Edition, vgl.

<http://www.casio-schulrechner.de/de/produkte/zubehoer/classpadmanager30/>

zugehöriger CAS-Grafiktaschenrechner:

<http://www.casio-schulrechner.de/de/produkte/grafikrechner/casrechner/classpad330/>

CASIO Worldwide Educational Website:

<http://edu.casio.com/>