Prof. Dr. Ludwig Paditz, Mathe-Intensivkurs 2013
Einführung in die CAS-Software (ClassPadManager)
Version 03.06.1000

Testat 2 (Prof. Dr. Scholz)
========================

Nutzung des CAS zur Selbstkontrolle der eigenen Rechenschritte -
Ziel: Vermeidung von Rechenfehlern!

1. Aufg.: Für welche $x \in \mathbf{R}$ ist $\sqrt{8-2x^2}$ definiert?

Der reelle Term $\sqrt{8-2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, ist für $8-2x^2 \geq 0$ definiert, d.h.
$8 \geq 2x^2$ bzw. $x^2 \leq 4$ und somit $|x| \leq 2$, d.h. $-2 \leq x \leq 2$.

Kontrolle im TR:
solve($8-2x^2 \geq 0$,x)

$\{-2 \leq x \leq 2\}$

Schnelle Lösung im CAS:
solve($\sqrt{8-2x^2} \geq 0$,x)

$\{-2 \leq x \leq 2\}$

Der Lösungsansatz muss gefunden werden, das CAS erledigt den Rest der Aufgabe.

2.Aufg.
$A_0 = \pi \times [R^2 + r^2 + s(R+r)]$ nach s auflösen:

Wir beginnen mit dem CAS und erhalten eine Fehlermeldung:

"Falscher Argumenttyp"

$\text{solve}\left(A_0=\pi\times[R^2+r^2+s(R+r)],s\right)$

Wir müssen die Syntax der Software beachten:
s(...) bezeichnet eine Funktion (analog zu **f(x)**).
Wir fügen ein Multiplikationszeichen ein:

erneut **"Falscher Argumenttyp"**

$\text{solve}\left(A_0=\pi\times[R^2+r^2+s\times(R+r)],s\right)$

Die Software benutzt eckige Klammern nur für Vektoren und Matrizen, die hier nicht vorliegen.
Wir nutzen nunmehr durchweg runde Klammern:

$\text{solve}\left(A_0=\pi\times(R^2+r^2+s\times(R+r)),s\right)$

$$\left\{s=\frac{-\left(R^2+r^2\right)}{R+r}\right\}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich falsch, da z.B. A_0 verschwunden ist!
Das Betriebssystem hat A_0 mit dem Wert 0 belegt:
A_0

0

DelVar A_0

Der Versuch A_0 zu löschen scheitert:
Fehlermeldung A_0 **"verriegelt oder geschützt"**
A_0 ist eine Systemvariable, die hier also nicht zur Anwendung kommen sollte:

solve(A0=π×(R^2+r^2+s×(R+r)),s)

$$\left\{s=\frac{-\left(\left(R^2+r^2\right)\cdot\pi-A0\right)}{(R+r)\cdot\pi}\right\}$$

Nachdem wir die Variable $\mathbf{A_0}$ mit **A0** umbezeichnet hatten, konnte das CAS die Aufgabe korrekt lösen.

collect(ans)

$$\left\{s=\frac{-R^2}{R+r}-\frac{r^2}{R+r}+\frac{A0}{(R+r)\cdot\pi}\right\}$$

Die Handrechnung (ohne Hilfsmittel) könnte wie folgt aussehen:

$$A_0 = \pi\times[R^2+r^2+s(R+r)] \quad |:\pi$$

$$\frac{A_0}{\pi} = R^2+r^2+s(R+r) \quad |-R^2-r^2$$

$$\frac{A_0}{\pi}-R^2-r^2 = s(R+r) \quad |:(R+r)$$

$$s=\frac{\frac{A_0}{\pi}-R^2-r^2}{R+r}=\frac{A_0}{\pi(R+r)}-\frac{R^2+r^2}{R+r}$$

3. Aufg.: Termvereinfachung (so weit wie möglich)

alle vorkommenden Variablen a,x,y,z seien positiv.

a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a^2}}{1+\dfrac{a-\dfrac{a^2-1}{a}}{a}}$ Doppelbruch vereinfachen (Hauptnenner finden):

$$1-\frac{1}{a^2}=\frac{a^2-1}{a^2} \text{ und}$$

$$a-\frac{a^2-1}{a}=\frac{a^2-\left(a^2-1\right)}{a}=\frac{1}{a} \text{ und}$$

$$1+\frac{a-\dfrac{a^2-1}{a}}{a}=\frac{a+\dfrac{1}{a}}{a}=\frac{\dfrac{a^2+1}{a}}{a}=\frac{a^2+1}{a^2}$$

Damit geht der Ausgangsbruch über in

$$\frac{\dfrac{a^2-1}{a^2}}{\dfrac{a^2+1}{a^2}}=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

Kontrolle im CAS:

$$\text{simplify}\left(\frac{1-\dfrac{1}{a^2}}{1+\dfrac{a-\dfrac{a^2-1}{a}}{a}}\right)$$

$$\frac{(a+1)\cdot(a-1)}{a^2+1}$$

Nach der 3. binomischen Formel gilt:
expand((a+1)·(a-1))

$$a^2-1$$

Damit wird die Handrechnung durch das CAS bestätigt.

b) $\left(\dfrac{\boldsymbol{x}^3\boldsymbol{y}^{-5}2\boldsymbol{z}^4\sqrt{\boldsymbol{y}^{20}}}{(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z})^4\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right)^{-1}}\right)^2$ Doppelbruch vereinfachen (Potenzgesetze beachten):

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}^3\boldsymbol{y}^{-5}2\boldsymbol{z}^4\sqrt{\boldsymbol{y}^{20}}}{(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z})^4\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right)^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{\boldsymbol{x}^3\boldsymbol{y}^{-5}2\boldsymbol{z}^4\boldsymbol{y}^{10}}{\boldsymbol{x}^4\boldsymbol{y}^4\boldsymbol{z}^4\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-1}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2}{1}\right)^2=4,$$

d.h. alle Variablen kürzen sich heraus!

Kontrolle im CAS:

$$\text{simplify}\left(\left(\frac{\boldsymbol{x}^3\boldsymbol{y}^{-5}2\boldsymbol{z}^4\sqrt{\boldsymbol{y}^{20}}}{(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z})^4\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right)^{-1}}\right)^2\right)$$

$$4$$

Hinweis: Es wurden die einbuchstabigen Systemvariablen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ verwendet.
Werden die normalen Buchstaben x,y,z der Tastatur verwendet, ist xyz eine dreibuchstabige Variable!

$$\text{simplify}\left(\left(\frac{x^3y^{-5}2z^4\sqrt{y^{20}}}{(xyz)^4\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}}\right)^2\right)$$

$$\frac{4\cdot x^8\cdot y^8\cdot z^8}{xyz^8}$$

Korrektur: x×y×z statt xyz eingeben!

$$\text{simplify}\left(\left(\frac{x^3y^{-5}2z^4\sqrt{y^{20}}}{(x\times y\times z)^4\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}}\right)^2\right)$$

$$4$$

4. Aufg.: Gleichungen/Ungleichungen nach $x\in\mathbb{R}$ auflösen:

a) $|x-4|-2|x-1|\geq x+1$

im CAS:
solve($|x-4|-2|x-1|\geq x+1$, x)

$$\left\{x\leq\frac{5}{4}\right\}$$

per Hand:
die inneren Terme $x-4$ und $x-1$ in den Betragsstrichen ändern ihr Vorzeichen bei $x=4$ bzw. $x=1$.
Es ergeben sich folgende Fallunterscheidungen:
$-\infty<x\leq 1$ oder $1<x\leq 4$ oder $4<x<\infty$

1. Fall: $-\infty<x\leq 1$
$|x-4|=4-x$ und $|x-1|=1-x$

Ungl. lautet nunmehr:
$4-x-2(1-x)\geq x+1$, d.h.
$4-x-2+2x\geq x+1$,
$2\geq 1$ wahre Aussage für alle betrachteten x: $-\infty<x\leq 1$

2. Fall: $1<x\leq 4$
$|x-4|=4-x$ und $|x-1|=x-1$
Ungl. lautet nunmehr:
$4-x-2(x-1)\geq x+1$, d.h.
$4-x-2x+2\geq x+1$,
$5\geq 4x$, d.h. $x\leq\frac{5}{4}$
Ungl. in diesem Fall erfüllt für alle x mit $1<x\leq\frac{5}{4}$

3. Fall: $4<x<\infty$
$|x-4|=x-4$ und $|x-1|=x-1$
Ungl. lautet nunmehr:
$x-4-2(x-1)\geq x+1$, d.h.
$x-4-2x+2\geq x+1$,
$-2x\geq 3$, d.h. $x\leq-\frac{3}{2}$
Ungl. in diesem Fall für kein x erfüllt.

Endergebnis: Ungl. für $x\leq\frac{5}{4}$ erfüllt!

5. Aufg.: Umkehrfunktion
geg. $y=f(x)=2+e^{x-1}$, $1\leq x<\infty$,
ges. f^{-1}

Lösung im CAS:
solve($y=2+e^{x-1}$,x)

$\{x=\ln(y-2)+1\}$

$x=f^{-1}(y)=\ln(y-2)+1$

Umbezeichnung der Variablen:
$y=f^{-1}(x)=\ln(x-2)+1$

per Hand:

$y=2+e^{x-1}$ |-2

$y-2=e^{x-1}$ |$\ln(...)$

$\ln(y-2)=x-1$ |$+1$

$x=\ln(y-2)+1$ usw.

6. Aufg.: Kurvendiskussion

geg. $y=f(x)=(x^2-3)e^x$

ges. Db(f), Nullstellen, Extrempunkte, Tangente bei $x_0=0$.

Lösung:

Db(f)=**R** ist offensichtlich

Nullstellen $x_n=\pm\sqrt{3}$ ebenso offensichtlich

Define $f(x)=(x^2-3)e^x$

done

f(x)

$(x^2-3)\cdot e^x$

notwendige Bedingung:

$\frac{d}{dx}(f(x))=0$

$x^2\cdot e^x+2\cdot x\cdot e^x-3\cdot e^x=0$

solve(ans,x)

$\{x=-3,x=1\}$

hinreichende Bedingung:

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$

$$x^2 \cdot e^x + 4 \cdot x \cdot e^x - e^x$$

ans|x=-3

$$-4 \cdot e^{-3}$$

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))|x=1$

$$4 \cdot e$$

Damit ist **x=-3=xmax** und **x=1=xmin.**

f(x)|x=-3

$$6 \cdot e^{-3}$$

f(x)|x=1

$$-2 \cdot e$$

fMin(f(x))

$$\{MinValue=-2 \cdot e, x=1\}$$

fMax(f(x))

$$\{MaxValue=\infty, x=\infty\}$$

fMax(f(x),x,-5,0)

$$\{MaxValue=6 \cdot e^{-3}, x=-3\}$$

Die FMax- bzw. FMin-Befehle suchen Extremwerte global bzw. im vorgeg. Suchintervall!

Lösung:

Pmin(1;$-2 \cdot e$) und Pmax(-3;$6 \cdot e^{-3}$)

Tangente: y=m×x+n mit m=f'(0)=-3, denn

$\frac{d}{dx}(f(x))|x=0$

$$-3$$

n=y-3x|x=0 and y=f(x)

$$n=-3$$

Ergebnis: y=-3x-3 (Tangente)

2D-Grafik	Y1:… Y2:…

7. Aufg.: Flächenberechnung(Integral)
obere Begrenzung: y=sin(x)
untere Begrenzung: y=x(x-π) (Parabel)

Lösung: beide Kurven schneiden sich in den Nullstellen x=0 und x=π

Integralansatz:

$$A=\int_0^{\pi} \sin(x)-x\cdot(x-\pi)dx$$

$$A=\frac{\pi^3}{6}+2$$

approx(ans)

$$A=7.16771278$$

Ergebnis: A=7,1677[FE]

2D-Grafik	Y1:… Y2:…

8. Aufg.:
geg. $P_1(1|0|-1)$, $P_2(0|2|1)$, $P_3(-1|0|0) \in E$ (Ebene)
a) ges. Parameterdarst. und parameterfreie Darst. von **E**
b) ges. Abstand P(2|1|0) von **E**

Lösung:

a) Parameterdarst.

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow P_1$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} \Rightarrow P_2$$

$$\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow P_3$$

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + s \times \left(\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right) + t \times \left(\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}-s-2\cdot t+1\\2\cdot s\\2\cdot s+t-1\end{bmatrix}$$

$x(s,t)=1-s-2t,\ \ y(s,t)=2s,\ \ z(s,t)=-1+2s+t,\ \ s,t\in\mathbf{R}.$

parameterfreie Darst.

Parameter s,t eliminieren:

$x=1-s-2t$ ergibt $s=1-2t-x$

somit

y=2(1-2t-x) und z=-1+t+y

daraus: t=z+1-y

schließlich:
y=2(1-2(z+1-y)-x)

solve(y=2(1-2(z+1-y)-x),z)

$$\left\{z=\frac{-x}{2}+\frac{3\cdot y}{4}-\frac{1}{2}\right\}$$

Ergebnis:
2x-3y+4z=-2

anderer Weg:
Ansatz Ax+By+Cz=D und geg. Punkte einsetzen (D frei wählbar)

$$\left.\begin{cases} A\times 1+B\times 0-C\times 1=D \\ A\times 0+B\times 2+C\times 1=D \\ -A\times 1+B\times 0+C\times 0=D \end{cases}\right|_{A,B,C}$$

$$\left\{A=-D, B=\frac{3\cdot D}{2}, C=-2\cdot D\right\}$$

ans|D=-2

$$\{A=2, B=-3, C=4\}$$

Ergebnis:
2x-3y+4z=-2

b)
Hessesche Normalform

$$(2x-3y+4z+2=0)\times\frac{1}{\text{norm}([2\ \ -3\ \ 4])}$$

$$\frac{\sqrt{29}\cdot(2\cdot x-3\cdot y+4\cdot z+2)}{29}=0$$

$$\frac{\sqrt{29}\cdot(2\cdot x-3\cdot y+4\cdot z+2)}{29}\,|\,(x=2,y=1,z=0)$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{29}}{29}$$

approx(ans)

0.5570860145

Der Abstand beträgt $\frac{3}{29}\sqrt{29} \approx 0{,}557$.

Anderer Lösungsweg:

$$\frac{\text{crossP}\left(\left(\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right),\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)\right)}{\text{norm}\left(\text{crossP}\left(\left(\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right),\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)\right)\right)}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{2\cdot\sqrt{29}}{29}\\ \frac{-3\cdot\sqrt{29}}{29}\\ \frac{4\cdot\sqrt{29}}{29}\end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(\left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right),\text{ans}\right)$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{29}}{29}$$

Der Abstand ist die Höhe des Spates (Spatvolumen über dem Einheits-Parallelogramm, gebildet aus den Richtungsvektoren der Ebene)

Dritter Lösungsweg:

Lot von P auf E fällen, Lotfußpunkt L ermitteln.

Abstand=|PL|

$$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+u\times\text{crossP}\left(\left(\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right),\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)\right)$$

$$\begin{bmatrix}2\cdot u+2\\-3\cdot u+1\\4\cdot u\end{bmatrix}$$

2x-3y+4z=-2|{x=2u+2,y=1-3u,z=4u}

$$2\cdot(2\cdot u+2)+3\cdot(3\cdot u-1)+16\cdot u=-2$$

solve(ans,u)

$$\left\{u=-\frac{3}{29}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}2\cdot u+2\\-3\cdot u+1\\4\cdot u\end{bmatrix}|u=-\frac{3}{29}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{52}{29}\\\frac{38}{29}\\-\frac{12}{29}\end{bmatrix}$$

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}\frac{52}{29}\\\frac{38}{29}\\-\frac{12}{29}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{29}}{29}$$

Zusatzaufg.:

$$\int_{\square}^{\square} \frac{\cos(x)+1}{\sin(x)+x}\,dx + C$$

$$\ln(|\sin(x)+x|)+C$$

Integraltyp $\int_{\square}^{\square} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ ergibt mit Subst. $t=f(x)$:

$dt=f'(x)dx$, d.h.

$$\int_{\square}^{\square} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int_{\square}^{\square} \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|+C = \ln(f(x))+C$$

Formelsammlung:

Bartsch (22.Aufl.): S. 474 (logarithmische Integration)

Eichholz/Vilkner (5.Aufl.): S. 175 (Substitutionsmethode) $f(z(x))=\frac{1}{z(x)}$ setzen.

Download:

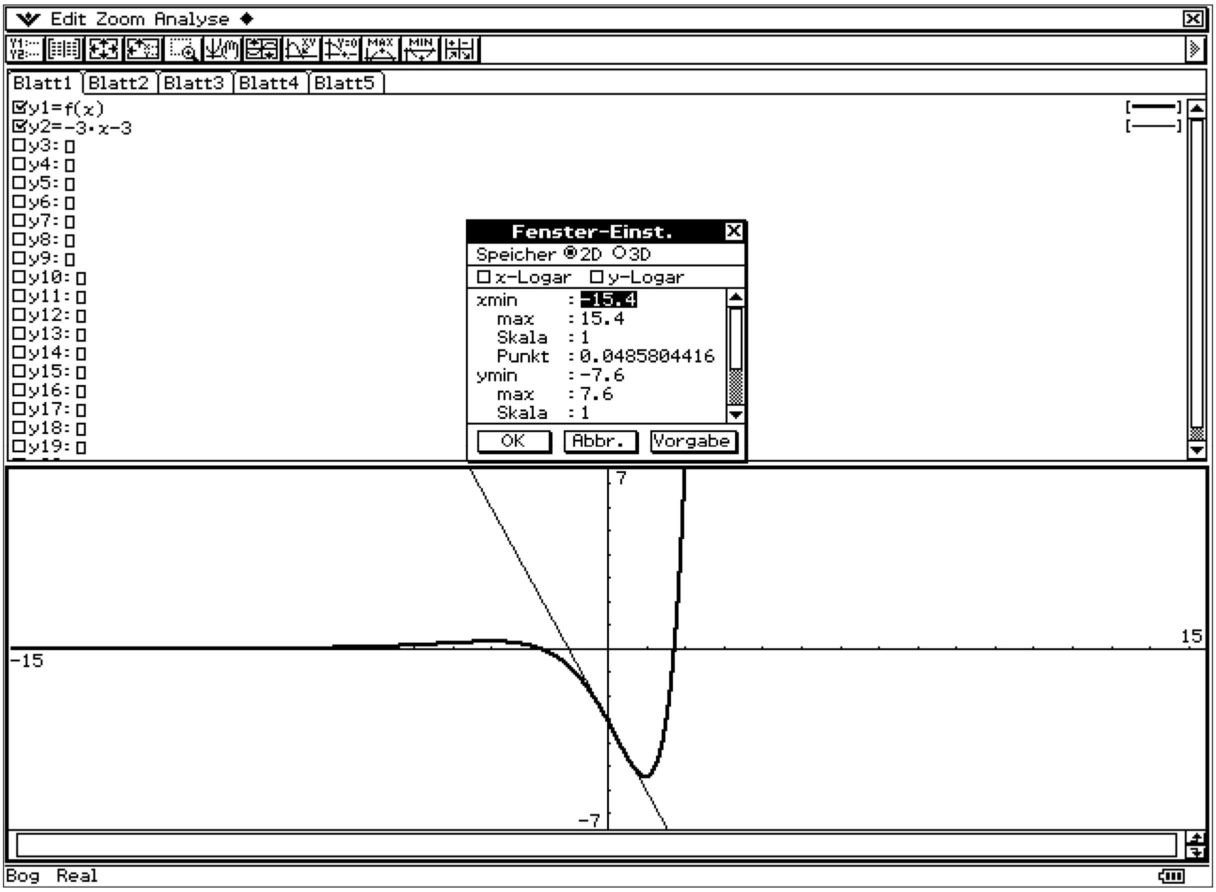
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mathe-Intensiv2013-Scholz.vcp

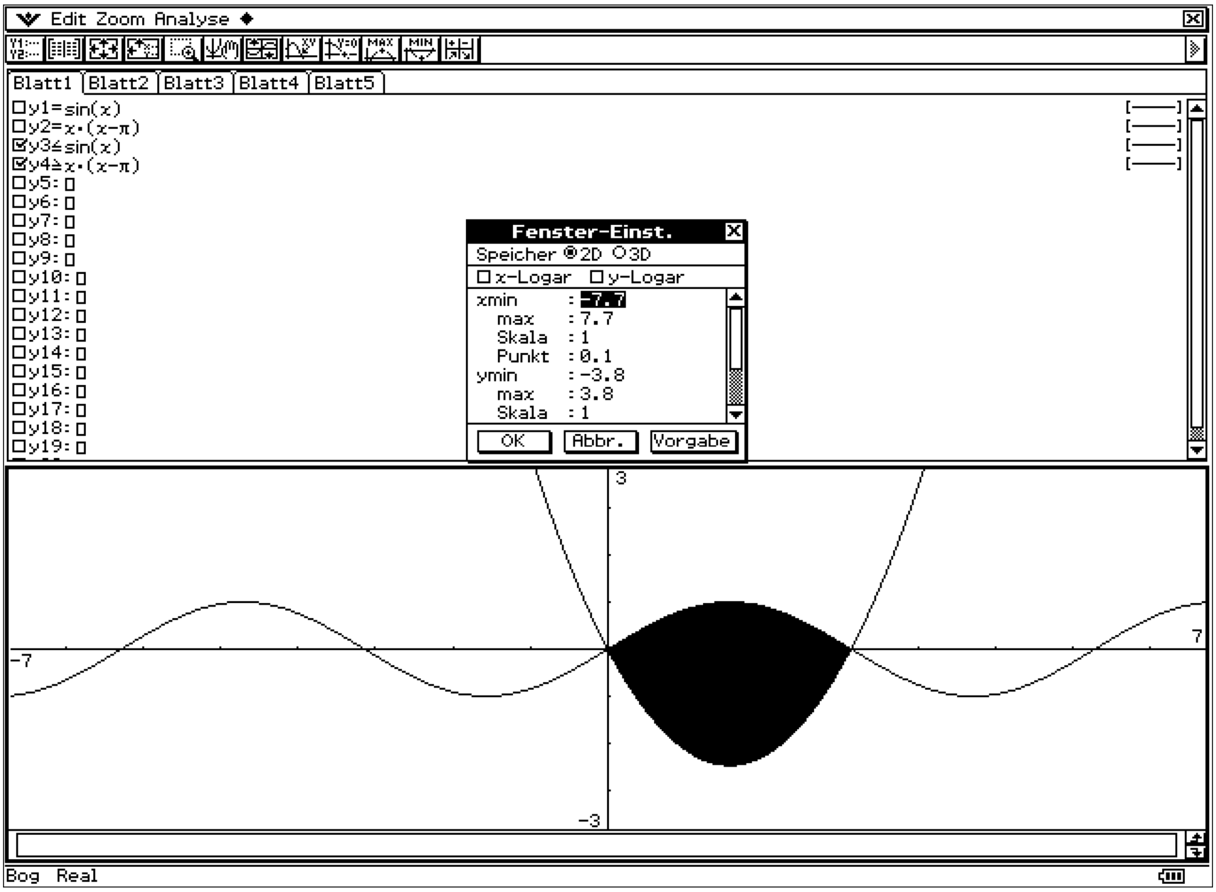
bzw.

http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mathe-Intensiv2013DocST2.pdf

Anlage:

Bilder zu den in den obigen Menüstreifen hinterlegten Fenstern


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=f(x)
y2=-3·x-3
Fenster-Einst.
Speicher 2D 3D
x-Logar y-Logar
xmin : -15.4
max : 15.4
Skala : 1
Punkt : 0.0485804416
ymin : -7.6
max : 7.6
Skala : 1
OK Abbr. Vorgabe
7
-15
15
-7
Bog Real


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=sin(x)
y2=x·(x-π)
y3≤sin(x)
y4≥x·(x-π)
Fenster-Einst.
Speicher 2D 3D
x-Logar y-Logar
xmin : -7.7
max : 7.7
Skala : 1
Punkt : 0.1
ymin : -3.8
max : 3.8
Skala : 1
OK Abbr. Vorgabe
3
-7
7
-3
Bog Real