Intensivkurs Mathematik 2013
Arbeit mit der CAS-Software - Prof.Dr.L.Paditz

Test 1 (Dr.Kohl)
================

Aufg. A1 (a)
=============
zuerst die Aufgabe verstehen:

$\{n|n\in\mathbf{N},\ n\le 6\}$ bedeutet $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$\{m|m\in\mathbf{Z},\ -2<m<9,\ 2|m\}$ bedeutet:
m gerade Zahl und m echt zwischen -2 und 9:
$\{0,2,4,6,8\}$

Bereitstellung als Folge:
seq(n,n,0,6,1)⇒A

{0,1,2,3,4,5,6}

seq(m,m,0,8,2)⇒B

{0,2,4,6,8}

Nutzung des Programms Menge
(Zeichenkettenverarbeitung**!**):

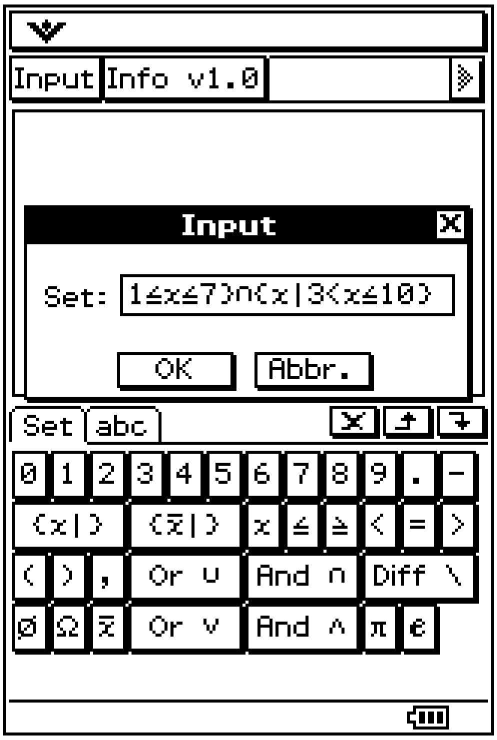
Menge("{0,1,2,3,4,5,6}","∪","{0,2,4,6,8}")

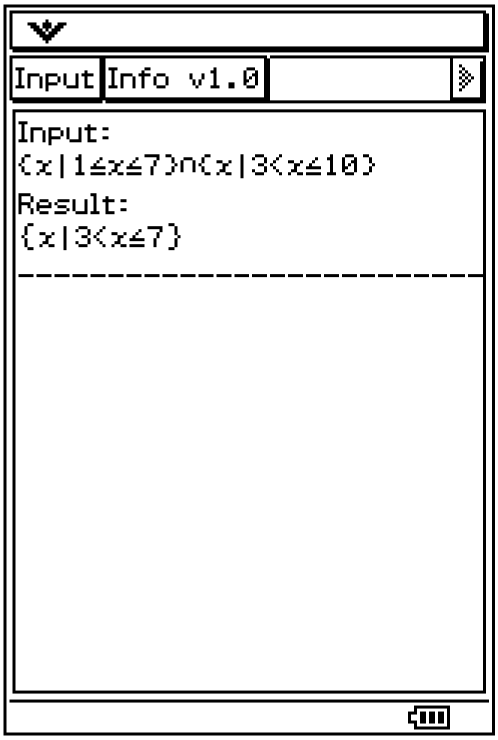
done

Ergebnis

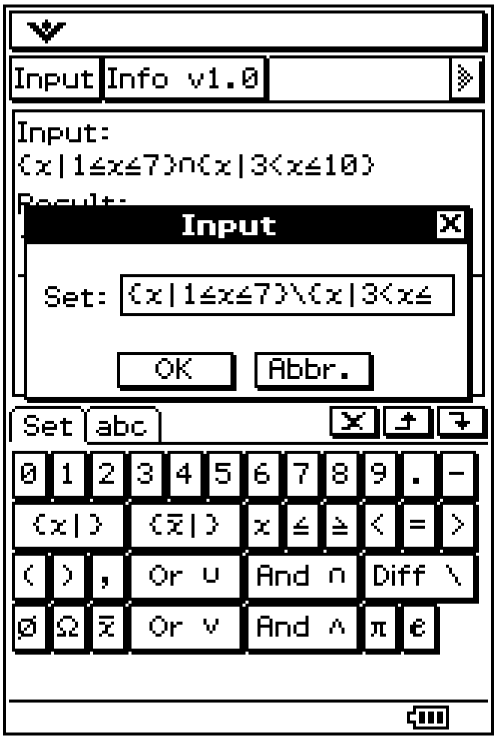
"{0,1,2,3,4,5,6,8}"

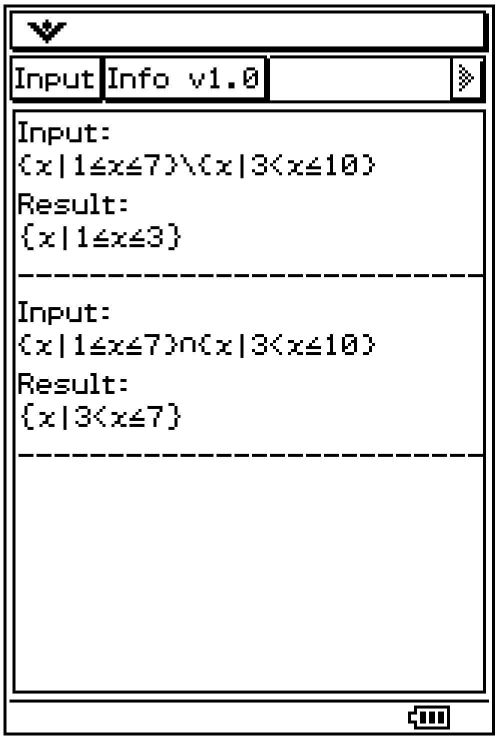
Aufg. A1 (b)
=============
Intervallarithmetik:
Nutzung des Add-Ins **Real Sets**





Ergebnis: (3, 7]





Ergebnis: [1,3]

Aufg. A2 (a)
============

```
x*(y+z)+y*(z-x)-(x+y)*(-z)
                                        z·(x+y)-y·(x-z)+x·(y+z)
judge(x*(y+z)+y*(z-x)-(x+y)*(-z)=ans)
                                                           TRUE
```

Die erste Umformung wurde mit judge überprüft und als wahr erkannt.

```
simplify(z·(x+y)-y·(x-z)+x·(y+z))
                                                      2·z·(x+y)
```

Das Endergebnis lautet 2z(x+y).
Nun sind noch Zwischenschritte zu finden.
Ausmultiplizieren:

```
zx+zy-yx+yz+xy+xz=zx+zy+yz+xz

judge(zx+zy-yx+yz+xy+xz=zx+zy+yz+xz)
                                                      Undefined
```

ohne Multiplikationszeichen kann die Gleichung nicht beurteilt werden, da die Software zweibuchstabige Variablennamen erkennt und nicht xy=x*y setzt, usw.

```
judge(z·x+z·y-y·x+y·z+x·y+x·z=z·x+z·y+y·z+x·z)
                                                           TRUE
```

Vereinfachung von z·x+z·y+y·z+x·z:

```
judge(z·x+z·y+y·z+x·z=2z·x+2z·y)
                                                           TRUE
```

und schließlich

```
judge(2z·x+2z·y=2z(x+y))
                                                      Undefined
```

erneut fehlt ein Multiplikationszeichen, da z(x+y) als Funktion z mit dem Argument x+y interpretiert wird.

judge(2z·x+2z·y=2z·(x+y))

TRUE

Was lehrt uns diese Aufgabe?
Die Syntax ist durch die Software vorgegeben und muss streng eingehalten werden.
Andernfalls kommt es zu Fehlermeldungen oder unvermuteten falschen Ergebnissen.

Ergebnis:
x·(y+z)+y·(z-x)-(x+y)·(-z)=2z·(x+y)

Empfehlung:
auch in der Niederschrift stets den Malpunkt mitschreiben und bei Funktionen stets das Klammerpaar um das Argument setzen. Dann bleibt alles richtig und ist softwarekonform.

z.B. statt sinx stets sin(x) schreiben usw.
(da sinx sicher nicht sin*x oder gar s*i*n*x bedeutet)

z.B. statt xy stets x*y schreiben,
ebenso bei gemischten Zahlen das + benutzen:
statt $7\frac{3}{4}$ besser $7+\frac{3}{4}$ oder 7,75 schreiben, was dann auch softwarekonform ist.
Aufpassen: das Dezimalkomma ist in der (englischen) Software als Dezimalpunkt einzugeben.

Aufg. A2 (b)
============

$(3x-y)^2+(3x-2y)(2y-3x)$

$$(3\cdot x-y)^2-(3\cdot x-2\cdot y)^2$$

die Software fügt hinter Zahlen den Malpunkt automatisch ein und nimmt einfache Vereinfachungen sofort vor.

simplify$((3\cdot x-y)^2-(3\cdot x-2\cdot y)^2)$

$$3\cdot y\cdot(2\cdot x-y)$$

das Ergebnis kommt nun sofort, jetzt sind wieder Zwischenschritte zu notieren:

binomische Formeln:

expand$((3x-y)^2)$⇒A

$$9\cdot x^2+y^2-6\cdot x\cdot y$$

expand$((3\cdot x-2\cdot y)^2)$⇒B

$$9\cdot x^2+4\cdot y^2-12\cdot x\cdot y$$

Differenz:

A−B

$$-3\cdot y^2+6\cdot x\cdot y$$

Ausklammern:

factor(ans)

$$3\cdot y\cdot(2\cdot x-y)$$

Ergebnis:

$(3x-y)^2+(3x-2y)(2y-3x)=3y\cdot(2\cdot x-y)$

Aufg. A3

=========

quadratische Ergänzung:

$4a^2+36a+40 = \left(4a^2+2*2*9a+9^2\right)-9^2+40$

judge$(4a^2+36a+40=\left(4a^2+2*2*9a+9^2\right)-9^2+40)$

TRUE

judge($4a^2+2*2*9a+9^2=(2a+9)^2$)

TRUE

judge($-9^2+40=-41$)

TRUE

somit $4a^2+36a+40 = (2a+9)^2-41$

judge($4a^2+36a+40 = (2a+9)^2-41$)

TRUE

Aufg. A4 (a)

===========

Division durch Null vermeiden:

$x^2-4\neq 0$, d.h. $x\neq\pm 2$, und $x^2+2x\neq 0$, d.h. $x*(x+2)\neq 0$

somit $x\notin\{-2,0,2\}$

simplify$\left(\frac{5x-2}{x^2-4}-\frac{4x+2}{x^2+2x}\right)$

$$\frac{x+2}{x\cdot(x-2)}$$

Zwischenschritte:

Nenner faktorisieren, Hauptnenner finden, erweitern:

$$\frac{5x-2}{x^2-4}-\frac{4x+2}{x^2+2x} = \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}-\frac{4x+2}{x*(x+2)} =$$

$$\frac{x*(5x-2)-(4x+2)(x-2)}{x*(x+2)(x-2)}$$

Zähler vereinfachen:

simplify($x*(5x-2)-(4x+2)(x-2)$)

$$(x+2)^2$$

Kürzen:

$$\frac{(x+2)^2}{x*(x+2)(x-2)} = \frac{x+2}{x\cdot(x-2)}$$

Ergebnis:

$$\frac{5x-2}{x^2-4}-\frac{4x+2}{x^2+2x} = \frac{x+2}{x\cdot(x-2)} \text{ für } x\in\mathbf{R}\backslash\{-2,0,2\}$$

Aufg. A4 (b)

===========

$2^2=4$, d.h.

$$\text{judge}\left(\left(\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}\right)^{2^2}=\left(\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}\right)^4\right)$$

TRUE

Negative Wurzelradikanten vermeiden: $-3\le x\le 3$.
Nun Potenzieren:

$$\left(\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}\right)^4=$$

$$\left((3-x)^{\frac{1}{2}}\right)^4\left((x+3)^{\frac{1}{2}}\right)^4=$$

$$(3-x)^{\frac{1}{2}*4}(x+3)^{\frac{1}{2}*4}=(3-x)^2(x+3)^2=$$

$$((x-3)(x+3))^2=\left(x^2-9\right)^2=x^4-18x^2+81$$

Kontrolle:

$$\text{expand}\left(\left(\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}\right)^{2^2}\right)$$

$$x^4-18\cdot x^2+81$$

Ergebnis:

$$\left(\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}\right)^{2^2}=x^4-18x^2+81 \text{ für } -3\le x\le 3.$$

Aufg. A5 (a)

===========

$$\frac{71.40EUR}{1.19}$$

$60 \cdot EUR$

Der Nettopreis beträgt 60€.

Aufg. A5 (b)
============
11*71.40EUR

$785.4 \cdot EUR$

11 Stunden kosten 785,40€, mit Rabatt jedoch nur 714€.

$$\frac{714EUR}{785.40EUR}$$

0.9090909091

1-ans

0.09090909091

ans*100

9.090909091

Der Rabatt beträgt rund 9,091%.

Kontrolle:
785.40EUR*0.09091

$71.400714 \cdot EUR$

Der Rabatt entspricht genau dem Preis für eine Stunde 71,40€.

Aufg. A6
=========
Der natürliche Logarithmus ist ein Exponent zur Basis e,

d.h. ln(1)=0, da $e^0=1$, um das Argument 1 des ln zu erhalten.

Weiter: $2\ln(n+1) = \ln\left((n+1)^2\right)$ (Logarithmengesetz) und

$\ln(1+2n+n^2)=\ln((n+1)^2)$ (Binomische Formel)

Somit:

$\ln(1+2n+n^2)+\ln(1)-2\ln(n+1)=$

$\ln(1+2n+n^2)-2\ln(n+1)=$

$\ln((n+1)^2)-\ln((n+1)^2)=0$

Kontrolle:

simplify(ln(1+2n+n^2)+ln(1)-2ln(n+1))

$$\ln((n+1)^2)-2\cdot\ln(n+1)$$

ans|n≥0

$$0$$

Unter der Bedingung n≥0 kann die Software das Ergebnis verifizieren.

Bem.: Ist über die Variable n nichts bekannt, wird keine Vereinfachung vorgenommen.

=======================

z.B. im Bereich der komplexen Zahlen gilt für ein reelles n:

$\text{simplify}(\ln((n+1)^2)-2\cdot\ln(n+1)|n=-1)$

Undefined

$\text{simplify}(\ln((n+1)^2)-2\cdot\ln(n+1)|n<-1)$

$$-2\cdot(\ln(n+1)-\ln(-n-1))$$

$\text{simplify}(\ln((n+1)^2)-2\cdot\ln(n+1)|n=-2)$

$$-2\cdot\pi\cdot i$$

$\text{simplify}(\ln((n+1)^2)-2\cdot\ln(n+1)|n=-10)$

$$-2\cdot\pi\cdot i$$

Es liegt die Vermutung nahe, dass für n<-1 gilt:

$\ln\left((n+1)^2\right)-2\cdot\ln(n+1) = -2\cdot\pi\cdot j$

========================

Aufg. A7 (a)

============

$\text{solve}\left(x=\frac{n*y}{n*z+1},n\right)$

$$\left\{n=\frac{-x}{x\cdot z-y}\right\}$$

schrittweise:

$\left(x=\frac{n*y}{n*z+1}\right)*(n*z+1)$

$$x\cdot(n\cdot z+1)=n\cdot y$$

expand(ans)

$$n\cdot x\cdot z+x=n\cdot y$$

ans-x-n*y

$$n\cdot x\cdot z-n\cdot y=-x$$

factor(ans)

$$n\cdot(x\cdot z-y)=-x$$

ans/(x·z-y)

$$n=\frac{-x}{x\cdot z-y}$$

Ergebnis: $n=\frac{x}{y-x*z}$

wobei zuletzt mit (-1) erweitert wurde.

Aufg. A7 (b)

============

$\text{solve}(a=3^n,n)$

$$\left\{n=\frac{\ln(a)}{\ln(3)}\right\}$$

schrittweise: beide Seiten mit ln logarithmieren

$\ln\left(a=3^{n}\right)$

$$\ln(a)=n\cdot\ln(3)$$

ans/ln(3)

$$\frac{\ln(a)}{\ln(3)}=n$$

oder per Def.: $n=\log_3(a)$

Umformung im CAS:

$n=\log_3(a)$

$$n=\frac{\ln(a)}{\ln(3)}$$

Aufg. A8

========

$$\left(\sum_{k=0}^{4}\left(k^2\right)\right)*\prod_{m=1}^{3}\left(m^2\right)$$

$$1080$$

denn

seq(k^2,k,0,4,1)

$$\{0,1,4,9,16\}$$

sum(ans)

$$30$$

seq(m^2,m,1,3,1)

$$\{1,4,9\}$$

prod(ans)

$$36$$

30*36

$$1080$$

Das Ergebnis lautet 1080 und die Teilschritte sind mit der Software gut nachvollziehbar.

Download:

http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
Mathe-Intensiv2013-Kohl.vcp

http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
Mathe-Intensiv2013DocKT1.pdf

Das Add-In:

http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
Mengenlehre-Add-In-Real-Sets.zip