HTW Dresden, Lehrbereich Mathematik
Prof. Dr. Ludwig Paditz

6. Mathematik-Intensivkurs 2015 (31.08.-25.09.2015)
================================

Einführung in die Mathematik-Software ClassPad Manager
Professional Edition (Subscription Version 02.00.4000)

Testaufgaben für Studienanfänger
================================

Quelle: http://t1p.de/aufgaben

Aufg. 1
========

Weisen Sie mit den Mitteln der Bruchrechnung nach, ob die
Behauptung $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{7} < \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ richtig ist!

Minimalwissen:
1. Ungleichungen ändern sich nicht, wenn auf beiden Seiten das Gleiche addiert oder subtrahiert wird.
2. Ungleichungen ändern sich nicht, wenn auf beiden Seiten mit einer **positiven** Zahl multipliziert oder dividiert wird.

Lösung im CAS:

$$\mathrm{judge}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{7}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)$$

FALSE

$\text{collect}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\right)$

$$\frac{85}{84}$$

$\text{collect}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)$

$$\frac{41}{42}$$

$\frac{85}{84}<\frac{41}{42}=\frac{82}{84}$ ist demnach falsch!

Lösung 1 durch Termumformung per Hand:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\ \ ?\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\quad |-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\ \ ?\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{7}\quad |-\frac{1}{7}$

$\frac{1}{4}+\frac{2}{7}\ \ ?\ \ \frac{1}{2}\quad |-\frac{1}{4}$

$\frac{2}{7}\ \ ?\ \ \frac{1}{4}=\frac{2}{8}$

Damit gilt: $\frac{2}{7}>\frac{2}{8}$, d.h.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{7}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

Damit ist die Behauptung falsch.

Lösung 2 durch Termumformung per Hand:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\ \ ?\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\quad |*3*4*7$

$4*7+3*7+3*3*4\ \ ?\ \ 3*2*7+4*7+3*4$

$28+21+36\ \ ?\ \ 42+28+12$

$85\ \ ?\ \ 82$

Damit gilt: 85 > 82, d.h.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{7} > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

Damit ist die Behauptung falsch.

Andere Lösungswege sind denkbar (z.B. Hauptnenner bilden).

Aufg. 2

=======

Eine Kugel befindet sich in einem Zylinder. Die Radien der Kugel und des Zylinders sollen (idealisiert) gleich groß sein. Wie hoch muss der Zylinder bei einem Durchmesser von 18 cm sein, damit das Volumen der Kugel 30 % des Volumens des Zylinders beträgt?

Minimalwissen:

1. Umgang mit Variablen: Radius R, Zylinderhöhe h, Naturkonstante π
2. Volumenformel für Kugel und Zylinder (!Zahlentafel)

Kugel: $Vk=\frac{4}{3}*\pi*R^3$, Zylinder: $Vz=\pi*R^2*h$

3. Ansatz mit Prozentrechnung: $Vk=Vz*\frac{30}{100}$
4. Bruchrechnung

Lösung im CAS:

$Vk:=\frac{4}{3}*\pi*R^3$

$$\frac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3}$$

$Vz:=\pi*R^2*h$

$$R^2\cdot h\cdot\pi$$

$solve\left(Vk=Vz*\frac{30}{100}, h\right)$

$$\left\{h=\frac{40\cdot R}{9}\right\}$$

$ans|R=9$

$$\{h=40\}$$

Lösung durch Termumformung per Hand:

$$\frac{4}{3}*\pi*R^3 = \pi*R^2*h*\frac{30}{100} \quad |:\left(\pi*R^2*\frac{30}{100}\right)$$

$$\frac{\frac{4}{3}*\pi*R^3}{\pi*R^2*\frac{30}{100}} = h \quad |\text{Doppelbruch vereinfachen}$$

$$\frac{4}{3}*\frac{\pi*R^3}{\pi*R^2}*\frac{100}{30} = h \quad |\text{kürzen}$$

$$\frac{40*R}{9} = h$$

mit $R=9$ folgt $h=40$[cm]

Zusatz: graphische Darstellung (3D-Grafik)
======================================

Zylinder und Kugel über eine passende Parameterdarstellung gleichzeitig darstellen:
Es gelte $s\in[0,\pi]$ und $t\in[0,\pi]$.

Zylinder im Schnitt (Halbzylinder):

Define xst1(s,t)=9cos(s)

done

Define yst1(s,t)=9sin(s)

done

Define zst1(s,t)=$\frac{40}{\pi}$t

done

Kugel im Schnitt (Halbkugel, M(0,0,9)):

Define xst2(s,t)=9cos(s)sin(t)

done

Define yst2(s,t)=9sin(s)sin(t)

done

Define zst2(s,t)=9+9cos(t)

done

Druch die Definition außerhalb des 3D-Grafik-Editors sind dann dort alle eingegebenen Flächen aktiv.

Voreinstellung des Betrachtungsquaders:

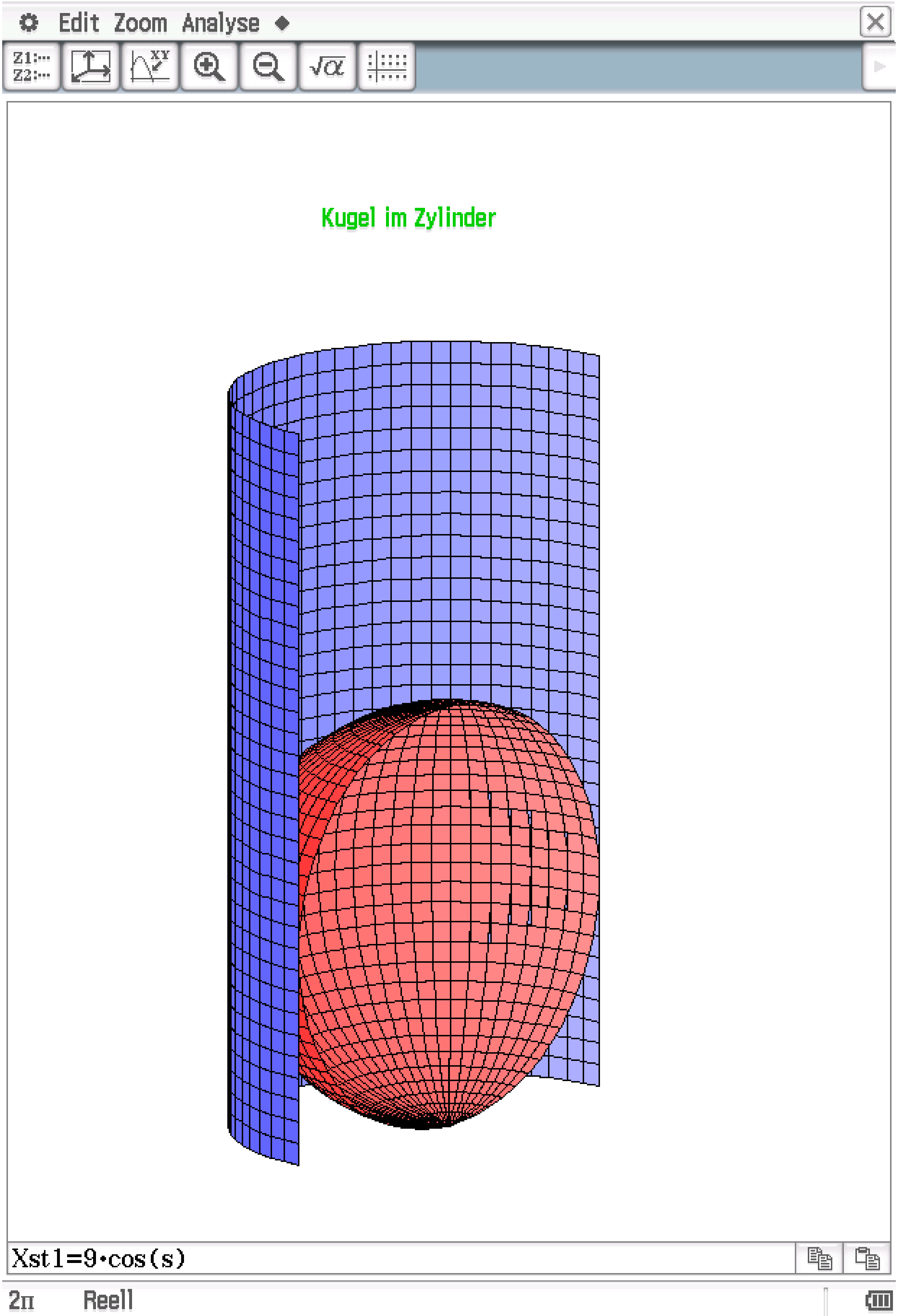
$-20<x<20$, $-20<y<20$, $0<z<40$,

Anzahl der Gridlinien (für x bzw. s) 35,

Anzahl der Gridlinien (für y bzw. t) 35,

Kugel im Zylinder	Z1:… Z2:…

stop


Edit Zoom Analyse
Z1:…
Z2:…
Kugel im Zylinder
Xst1=9·cos(s)
2π
Reell

Aufgabe 3

==========

Im Stammbaum einer Familie hat immer eine Person drei Kinder, jedes Kind wieder drei Kinder usw. Es gibt genau eine Person als "Stammvater", die drei Kinder hat, aber im Stammbaum selbst keinen Vorfahren besitzt. Alle Personen, die dieselbe Anzahl von Vorfahren besitzen, bilden eine Generation. Der "Stammvater" repräsentiert die Generation 1. Das Geschlecht und ein eventueller Ehepartner einer Person spielen keine Rolle.
Im Stammbaum gibt es nun eine merkwürdige Regel: Eines der drei Kinder des "Stammvaters" hat keine Nachkommen. Diese Eigenschaft, dass eines der drei Kinder keine Nachkommen hat, tritt regelmäßig bei allen Personen in jeder zweiten Generation auf.
Es sind insgesamt 2332 Personen im Stammbaum, wobei in jeder Generation die maximal mögliche Anzahl von Personen vorhanden ist. Wie viele Generationen besitzt der Stammbaum?

Minimalwissen:

1. Textaufgabe verstehen und formelmäßig umsetzen
2. Zahlenfolgen, rekursive Darstellung
3. Partialsummenfolge (Zahlenreihe)
4. optional: Kenntnisse Summenzeichen, Produktzeichen

Skizze eines Stammbaumes:

Generation: G^{+}(sehr kinderreich), G_{-}(weniger Kinder)

G_1 G^2 G_3 G^4 G_5 G^6 G_7

↱ ↴ ↱ ↴

↱ 1→ 1,1,1→ 3,0,3→ 3·3+3·3=18→ 12·3+6·0=36

1→ 1→ 1,1,1→ 3,0,3→ 3·3+3·3=18→ 12·3+6·0=36

↗ ↳ 1→ 1,1,1→ 3,0,3→ 3·3+3·3=18→ 12·3+6·0=36

1→ 1→ 0

↘ ↱ 1→ 1,1,1→ 3,0,3→ 3·3+3·3=18→ 12·3+6·0=36

1→ 1→ 1,1,1→ 3,0,3→ 3·3+3·3=18→ 12·3+6·0=36

↳ 1→ 1,1,1→ 3,0,3→ 3·3+3·3=18→ 12·3+6·0=36

Summe der "Väter":

1 4 10 28 64 172 172+216=388 usw.

Lösung per Hand:

Anzahl der Personen (nur "Vater" zählt in der Summe)

Gedanke: nur $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{3}$ (d.h. alle) der Vorfahren haben wieder 3 Kinder.

Gedanke: 2 oder 3 als "2+Sinuswert" darstellen:

1. Generation: G1=1, Summe: 1[Vater]

2. Generation: $G2=3*\left(\frac{3}{3}*1\right)=\left(2+\left|\sin\left(1*\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)*1=3$,

   Summe: 4[Väter]

3. Generation: $G3=3*\left(\frac{2}{3}*3\right)=\left(2+\left|\sin\left(2*\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)*3=6$,

   Summe: 10[Väter]

4. Generation: $G4=3*\left(\frac{3}{3}*6\right)=\left(2+\left|\sin\left(3*\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)*6=18$,

   Summe: 28[Väter]

5. Generation: $G5=3*\left(\frac{2}{3}*18\right)=(2+\left|\sin\left(4*\frac{\pi}{2}\right)\right|)*18=36$,

Summe: 64[Väter]

6. Generation: $G4=3*\left(\frac{3}{3}*36\right)=(2+\left|\sin\left(5*\frac{\pi}{2}\right)\right|)*36=108$,

Summe: 172[Väter]

7. Generation: $G5=3*\left(\frac{2}{3}*108\right)=(2+\left|\sin\left(6*\frac{\pi}{2}\right)\right|)*108=216$,

Summe: 388[Väter]

8. Generation: $G5=3*\left(\frac{3}{3}*216\right)=(2+\left|\sin\left(7*\frac{\pi}{2}\right)\right|)*216=648$,

Summe: 1036[Väter]

9. Generation: $G5=3*\left(\frac{2}{3}*648\right)=(2+\left|\sin\left(8*\frac{\pi}{2}\right)\right|)*648=1296$,

Summe: 2332[Väter] usw.

Rekursionsformel 1. Ordnung: Generation m+1:

$G(m+1)=(2+\left|\sin\left(m*\frac{\pi}{2}\right)\right|)*G(m)$, $m=1,2,...,$ mit $G(1)=1$

Lösung im CAS:

rSolve berechnet die rekursionsfreie Darstellung einer Zahlenfolge. Syntax des Befehls beachten:

$\text{rSolve}\left(a_{n+1}=(2+\left|\sin\left(n*\frac{\pi}{2}\right)\right|)*a_n, a_1=1\right)$

$$\left\{a_n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\left|\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right|+2\right)\right\}$$

Define $G(m)=\prod_{k=1}^{m-1}\left(\left|\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right|+2\right)$

done

seq(G(m),m,1,9,1)

{1,3,6,18,36,108,216,648,1296}

sum(ans)

2332

seq(G(m),m,1,13,1)

{1,3,6,18,36,108,216,648,1296,3888,7776,23328,46656}

sum(ans)

83980

Bemerkung:

Das CAS rechnet hier für m=1 wie folgt

$$G(1)=\prod_{k=1}^{0}\left(\left|\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right|+2\right)$$

1=1

Hinweis: Summe im Stammbaum

$$\text{Define } S(n)=1+\sum_{m=2}^{n}(G(m))$$

done

S(9)

$$\sum_{m=2}^{9}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}+\frac{5}{2}\right)\right)+1$$

simplify(ans)

$$\sum_{m=2}^{9}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{(-1)^{k+1}+5}{2}\right)\right)+1$$

Das CAS vereinfacht hier nicht!

Andere Definition der Folge G(m):

$$\text{Define } G(m)=\prod_{k=1}^{m-1}\left(2.5+0.5*(-1)^{k+1}\right)$$

done

seq(G(m),m,1,9,1)

{1,3,6,18,36,108,216,648,1296}

$$\text{Define } S(n)=\sum_{m=1}^{n}(G(m))$$

done

S(9)

$$\sum_{m=1}^{9}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}+\frac{5}{2}\right)\right)$$

simplify(ans)

$$\sum_{m=1}^{9}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{-1^{1}\cdot(-1)^{k}}{2}+\frac{5}{2}\right)\right)$$

Das CAS vereinfacht hier nicht!

$$\text{seq}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\left(-\frac{(-1)^{k}}{2}+\frac{5}{2}\right),m,1,9,1\right)$$

{1,3,6,18,36,108,216,648,1296}

sum(ans)

2332

Aufgabe 4

==========

Ein Werkstück wurde statt in $4\frac{1}{2}$ h in $3\frac{3}{4}$ h hergestellt.

Wieviel Prozent betrug die Zeitersparnis? Geben Sie das Ergebnis auf 3 Nachkommastellen genau an!

Minimalwissen:

1. Rechnen mit einer Variablen x
2. Prozentangabe als dimensionslose Zahl x mit $0<x<1$
3. Auflösung einer linearen Gleichung

Lösung per Hand: x sei der Anteil der Ersparnis

$4{,}5*(1-x)=3{,}75$ ergibt

$4{,}5-4{,}5x=3{,}75$

und somit

$4{,}5-3{,}75=4{,}5x$

hieraus folgt

$$x=\frac{4{,}5-3{,}75}{4{,}5}=\frac{0{,}75}{4{,}5}=\frac{75}{450}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}=0{,}166666...$$

Ausführung der Division mit einem TR:

approx$\left(\frac{0.75}{4.5}\right)$

0.1666666667

Die Ersparnis beträgt 16,667%.

Berechnung mit dem CAS:

solve(4.5*(1-x)=3.75,x)

$$\left\{x=\frac{1}{6}\right\}$$

approx(ans)

{x=0.1666666667}

Aufgabe 5

==========

Ein Kind hat 10 Perlen, und zwar 2 rote, 3 schwarze und 5 weiße. Die Perlen haben gleiche Größe und gleiche Form. Auf wie viele optisch verschiedene Arten kann das Kind die Perlen von unten nach oben auf eine lotrecht gehaltene Nadel aufreihen?

Minimalwissen:

1. Kombinatorische Überlegungen (Kombinatorik)
2. Permutation und Fakultät

(Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Lösung per Hand: (p1,p2,...,p10) sei eine konkrete Anordnung, dann gibt es ohne Beachtung der Farbe 10*9*8*...*2*1=10! Möglichkeiten für (p1,p2,...,p10). Position p1 kann anfangs mit einer aus 10 Perlen besetzt werden, p2 dann mit einer aus 9 Perlen usw. Werden nun gleiche Farben beachtet, sind diese untereinander permutierbar ohne eine neue konkrete Anordnung zu erhalten, d.h. 2! bzw. 3! bzw. 5! sind aus 10! wieder herauszurechnen:

$$\frac{10!}{2!*3!*5!}=\frac{6*7*8*9*10}{1*2*1*2*3}=7*4*9*10=28*90=2520$$

Lösung mit dem CAS: Ansatz wie oben finden

$$\frac{10!}{2!*3!*5!}$$

2520

Aufgabe 6

==========

In einem Raum werden 66 mal die Hände geschüttelt. Wie viele Personen sind im Raum, wenn jede Person jeder anderen die Hand gibt?

Minimalwissen:

1. Kombinatorische Überlegungen (Kombinatorik)
2. Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung

(Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Lösung per Hand:

Anzahl der Personen sei n. Jeder gibt n-1 anderen die Hand.

n*(n-1) Möglichkeiten, die jedoch die Begrüßung von Person A mit Person B und B mit A enthalten.

Deshalb $\frac{n*(n-1)}{2}=66$

Hieraus $n^2-n-132=0$ und

$$n=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+132}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4*132}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{529}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}*23=12$$

Lösung mit dem CAS:

solve$\left(\frac{n*(n-1)}{2}=66,n\right)$

$$\{n=-11,n=12\}$$

Die neg. Lösung entfällt.

alternativ nCr-Befehl: Binomialkoeffizient "n über 2"

nCr(n,2)=66

$$\frac{n!}{2\cdot(n-2)!}=66$$

nCr(12,2)=66

$$66=66$$

Aufgabe 7

==========

Die Produktionsauflage an einem Massenartikel wurde um 40% gesteigert, die betrieblichen Kosten stiegen aber nur um 25%. Wieviel Prozent betrug die Kostensenkung? Geben Sie das Ergebnis auf 1 Nachkommastelle genau an.

Minimalwissen:

1. betriebswirtschaftliche Kenntnisse
2. Rechnen mit Variablen
3. Auflösung von Gleichungen

Lösung per Hand:

n sei die anfängliche Produktionsauflage (n Produkte)

Gesamtkosten g1 bzw. g2 eines Produktes:

g1 (n Produkte), g2=1,25*g1 (1,4*n Produkte)

Bemerkung (optional): g1=a+b1, g2=a+b2

a Fixkosten pro Produkt (z.B. Materialeinsatz)

b1 variable Kosten pro Produkt (n Produkte)

b2 variable Kosten pro Produkt (1,4*n Produkte)

Gleichungen:

n Produkte: Einzelkosten $\frac{g1}{n}$

1,4n Produkte: Einzelkosten $\frac{g2}{1,4n}=\frac{1,25g1}{1,4n}=\frac{1,25}{1,4}*\frac{g1}{n}$

Hieraus Absenkungsfaktor $\frac{1,25}{1,4}=\frac{125}{140}$

Kostensenkung somit $1-\frac{125}{140}=\frac{15}{140}=\frac{3}{28}$

approx$\left(\frac{3}{28}\right)$

0.1071428571

Die Kostensenkung beträgt 10,7%

Aufgabe 8

=========

Ein Wanderer muss sich an einer Weggabelung für einen der zwei Wege entscheiden. Der eine Weg führt zur "Lügenstadt" L, alle Einwohner lügen grundsätzlich. Der andere Weg führt zur "Wahrheitsstadt" W, alle Einwohner sagen grundsätzlich die Wahrheit.
Der Wanderer kommt in eine der beiden Städte, es gibt aber keine Hinweise, ob er sich in L oder in W befindet. Mit einer Frage an eine Person P, die er in der Stadt anspricht, kann er ermitteln, ob er sich in L oder in W befindet. Die Frage ist so gestellt, dass P mit "ja" oder "nein" antworten muss.
P kann in der Stadt allerdings auch nur zu Besuch sein, P kann in L oder in W wohnen. Wie lautet die Frage? Wählen Sie unter den nachfolgenden Fragen die richtige Frage aus:

1. Wohnen Sie in dieser Stadt?
2. Lügen alle Einwohner dieser Stadt?

3. Bin ich hier in der "Wahrheitsstadt"?
4. Wohnen Sie in der "Lügenstadt"?

Minimalwissen:
1. logische Überlegungen
2. Fallunterscheidungen

Darstellung des Antwortverhaltens in einer Wahrheitstafel:

	Wanderer in L		**Wanderer in W**	
	↙	↘	↙	↘
	P aus L	P aus W	P aus L	P aus W
zu Frage 1	N	N	J	J
zu Frage 2	N	J	J	N
zu Frage 3	J	N	N	J
zu Frage 4	N	N	N	N

Lösung ohne Hilfsmittel:
Frage 4 entfällt, da stets mit "nein" geantwortet wird: P aus W sagt "nein", P aus L sagt "nein", also keine entscheidbare Antwort.
Frage 3 entfällt, da in W und auch in L die Person P mit "ja" oder "nein" antworten könnte, also keine entscheidbare Antwort.
Frage 2 entfällt, da in W und auch in L die Person P mit "ja" oder "nein" antworten könnte, also keine entscheidbare Antwort.
Frage 1 führt in W stets auf Antwort "ja" und in L stets auf

Antwort "nein".

Frage 1 ist die richtige Frage.

Aufgabe 9
==========

Bestimmen Sie den Wert von x für $x=\log_2\left(\log_2(256)\right)$!

Minimalwissen:

1. Definition des Logarithmus (als Exponent einer Potenz mit Basis 2)
2. Potenzrechnung, Logarithmenrechnung

Lösung per Hand:

$x=\log_2\left(\log_2(256)\right)=\log_2\left(\log_2\left(2^8\right)\right)=\log_2(8)=\log_2\left(2^3\right)=3$

Lösung mit dem CAS:

$x=\log_2\left(\log_2(256)\right)$

x=3

Aufgabe 10
===========

Ein Schleppdampfer auf der Elbe benötigt zum Befahren der Strecke Dresden - Decin (etwa 60 km) stromaufwärts $4\frac{1}{2}$ Stunden, stromabwärts $2\frac{1}{2}$ Stunden. Mit welcher mittleren Geschwindigkeit fließt das Wasser des Flusses? Geben Sie das Ergebnis auf 1 Nachkommastelle genau an.

Minimalwissen:

1. Rechnen mit einer Variablen
2. Auflösung einer linearen Gleichung
3. Physik $v=\frac{s}{t}$

Lösung per Hand:

v1 Geschw. des Dampfers

v2 Geschw. des Wassers

s befahrene Strecke (s=60)

t1 Zeit stromabwärts ($t1=2\frac{1}{2}$)

t2 Zeit stromaufwärts ($t2=4\frac{1}{2}$)

(1) $v1+v2=\frac{s}{t1}$ und

(2) $v1-v2=\frac{s}{t2}$

(1)-(2) ergibt $2*v2=\frac{s}{t1}-\frac{s}{t2}$

somit $v2=\frac{1}{2}*\left(\frac{s}{t1}-\frac{s}{t2}\right)$

Rechnung mit TR:

$$\frac{1}{2}*\left(\frac{60}{2.5}-\frac{60}{4.5}\right)$$

$$\frac{16}{3}$$

approx(ans)

5.333333333

Die Geschw. des Wassers beträgt 5,3 km/h.

Dieses Dokument wurde als eActivity erstellt.

Download: vcp ... virtuelles ClassPad-File
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
Mathe-Intensiv-2015.vcp

http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
Mathe-Intensiv-2015.pdf