HTW Dresden
Fak. Informatik/Mathematik
Prof. Dr. L. Paditz 11.10.2010

3.3.8 Merkblatt zur eindeutigen Beschreibung der Mehrdeutigkeit bei komplexen Zahlen

1. Haupt- und Nebenargumente: (Empfohlen wird die Angabe als dimensionslose Größe im Bogenmaß.) per DIN-Empfehlung gilt: $-\pi < \arg(z) \le \pi$ (Hauptargument) und somit $\arg_k(z) := \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (Nebenargumente), $\arg(z) := \arg_o(z)$. ($\mathbf{Z}=\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ... Menge der ganzen Zahlen)

2. n-te Wurzeln ($n \in \mathbf{N}$ und $n \ge 2$) als Umkehrung von $w = z^n$:
Beim Potenzieren ($w = z^n$) wird von der Zerlegung der z-Ebene in n Winkelräume ausgegangen:

$\mathrm{D}_k := \left\{ z \;\middle|\; \dfrac{-\pi + 2k\pi}{n} < \varphi \le \dfrac{\pi + 2k\pi}{n} \right\}$ mit $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. (D_o liegt symmetrisch um die positive Re-Achse.)

Jeder Winkelraum geht beim Potenzieren ($w = z^n$) in eine volle Gauß'sche Zahlenebene über. Man sagt deshalb, D_k wird im k-ten Blatt der n-blättrigen Riemann'schen Fläche f_n abgebildet.

Umgekehrt: $w \in k$-tes Blatt von $f_n \Longrightarrow z_k = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \exp\left\{ j\dfrac{\arg(w) + 2k\pi}{n} \right\} \in \mathrm{D}_k$ für $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

z_o ist die Hauptwurzel, die stets in D_o liegt. Damit ist z.B. $\sqrt[3]{-8} = -2$ eine Nebenwurzel.

3. Logarithmen als Umkehrung von $w = e^z$:

Beim Potenzieren $\left(w = e^z = e^{\mathrm{Re}(z) + j\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)} \cdot e^{j\mathrm{Im}(z)} \right)$ ist $\mathrm{Im}(z)$ das Argument φ der Zahl e^z, d.h., eine Veränderung von $\mathrm{Im}(z)$ mit $\pm 2k\pi$, $k \in \mathbf{N}$, wirkt sich auf e^z nicht aus ("Periodizität" der komplexen e-Funktion). Deshalb: Veranschaulichung durch die Zerlegung der z-Ebene in (unendlich viele) Parallelstreifen

$\mathrm{D}_k := \{ z \mid -\pi + 2k\pi < \mathrm{Im}(z) \le \pi + 2k\pi \}$, $k \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.

(Bem.: D_o liegt symmetrisch um die Re-Achse.)
Jeder Parallelstreifen geht beim Potenzieren ($w = e^z$) in eine volle Gauß'sche Zahlenebene über. Man sagt deshalb, D_k wird im k-ten Blatt der ∞-blättrigen Riemann'schen Fläche f_∞ abgebildet.
Umgekehrt: $w \in k$-tes Blatt von $f_\infty \Longrightarrow z_k = \ln_k(w) = \ln|w| + j\arg(w) + 2k\pi j$, $k \in \mathbf{Z}$,
($z_o = \ln|w| + j\arg(w) =: \ln(w)$ ... Hauptwert)

4. Allgemeine Potenz $z_1^{z_2}$:

per Definition ist $z_1^{z_2} := \left(e^{\ln_k(z_1)} \right)^{z_2} = e^{z_2 \ln_k(z_1)} = \exp\{ z_2 (\ln|z_1| + j\arg(z_1) + 2k\pi j) \}$, $k \in \mathbf{Z}$,

d.h., $z_1^{z_2}$ ist unendlich vieldeutig (k ... Blattnummer). Hauptwert erhält man wieder für $k = 0$.

5. Beispiel:
Man berechne $w = (1+j)^{2-3j}$ und gebe $\mathrm{Re}(w)$, $\mathrm{Im}(w)$, $|w|$ und $\arg(w)$ sowie $\arg_l(w)$ im $k-$ten Blatt von f_∞ an!
Lösung: $w = (1+j)^{2-3j} =$
$\exp\{(2-3j)\ln_k(1+j)\} = \exp\{(2-3j)(\ln\sqrt{2} + j\frac{\pi}{4} + 2k\pi j)\} = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}(\cos(0,169\pi) + j\sin(0,169\pi))$, $k \in \mathbf{Z}$.
Hieraus erhält man im k-ten Blatt den Potenzwert $w = w_k$ mit
$\mathrm{Re}(w_k) = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}\cos(\pi/2 + 4k\pi - 3\ln\sqrt{2}) = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}\cos(0,169\pi)$,
$\mathrm{Im}(w_k) = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}\sin(\pi/2 + 4k\pi - 3\ln\sqrt{2}) = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}\sin(0,169\pi)$,
$|w_k| = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}$ und $\arg_l(w_k) = \pi/2 - 3\ln\sqrt{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$.
Wegen des variablen l in $2l\pi$ muß hier der vorhandene Summand $4k\pi$ nicht extra ausgewiesen werden, d.h., in diesem Beispiel hat die Blattnummer k hat nur Einfluß auf den Betrag von w.
Für das Hauptargument muß $l \in \mathbf{Z}$ so gewählt werden, daß

$\arg(w) = \pi/2 - 3\ln\sqrt{2} + 2l\pi$ mit $\pi/2 - 3\ln\sqrt{2} + 2l\pi \in (-\pi, \pi]$ gilt.
Als Hauptwert der Potenz erhält man schließlich (für $k = 0$):
$w = w_o = 18,195 + 10,687j = 21,101(\cos(30,43^o) + j\sin(30,43^o)) = 21,101(\cos(0,169\pi) + j\sin(0,169\pi))$.