Mathematik
Übungsaufgaben, Heft 2

Lineare Algebra und Mathematische Analysis II

D. Oestreich

Herausgeber:

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Friedrich-List-Platz 1
01069 Dresden

Autor:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Oestreich
Professor für Mathematik an der HTW Dresden

13. Auflage 2015
– nur zum internen Gebrauch –

3 Lineare Algebra und Geometrie

3.1 Matrizen und Determinanten

1. Wie lautet die (4,4)-Matrix $A = (a_{ik})$, deren Elemente bestimmt sind durch

$$a_{ik} = \begin{cases} i+k & \text{für } i > k \\ i \cdot k & \text{für } i \leq k \end{cases}$$

und was ist die zugehörige transponierte Matrix A^T?

2. Man bestimme die Lösung X der Matrizengleichung

$$A + 3(X - A - E) = 2B + X - E$$

a) allgemein
b) mit der Einheitsmatrix E und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zusatz: Welche Voraussetzung müssen die Matrizen A, B, E, X erfüllen, damit die vorgegebene Matrizengleichung sinnvoll ist?

3. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie folgende Matrizen, falls diese existieren:
a) $A - 3B^T$, b) $-2A^T + 3A$, c) AB, d) BA, e) CB, f) CB^T.

4. A sei eine (m,n)-Matrix, $\vec{x}$ eine $(n,1)$-Matrix, $\vec{y}$ eine $(m,1)$-Matrix, wobei $n \neq m$, $m > 1$, $n > 1$ gilt.
a) Welche der folgenden Ausdrücke sind definiert? Stellen Sie eine Zahl oder eine Matrix dar? Zwischen welchen Ausdrücken besteht ein Zusammenhang? Welche Ausdrücke sind gleich?
1) $\vec{y}A\vec{x}$, 2) $\vec{y}^TA\vec{x}$, 3) $\vec{x}^TA\vec{y}$, 4) $\vec{x}^TA^T\vec{y}$, 5) $(A\vec{x})^T\vec{y}$, 6) $\vec{x}^T(\vec{y}A)^T$,
7) $A\vec{x}\vec{y}$, 8) $A\vec{x}\vec{y}^T$, 9) $\vec{y}\vec{x}^TA^T$, 10) $A^T\vec{y}\vec{x}^T$, 11) $\vec{x}\vec{y}^TA$.
b) Man berechne die (definierten) Ausdrücke für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5. Es seien

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $A = (a_{ik})_{(3,3)}$. Berechnen Sie
a) $E_1 A$ b) $E_2 A$ c) $E_3 A$ und erläutern Sie das Ergebnis!

6. Berechnen Sie folgende Determinanten

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 10 & -14 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{d)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & y \end{vmatrix} \qquad \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Beziehungen?

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 27, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & x \end{vmatrix} = 5.$$

8. Für welche $t \in \mathbb{R}$ verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2-t & -3 & -4 \\ -1 & 1-t & -2 \\ 0 & 0 & 4-t \end{vmatrix} \quad ?$$

9. Berechnen Sie folgende Determinante

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \\ r\cos\alpha\cos\beta & r\cos\alpha\sin\beta & -r\sin\alpha \\ -r\sin\alpha\sin\beta & r\sin\alpha\cos\beta & 0 \end{vmatrix}.$$

10. Gegeben ist die *Vandermondsche Determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

a) Man zeige: $V(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$.
b) Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung an für $V(x_1, x_2, x_3) \neq 0$.

11. In einem Betrieb werden aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und hieraus die Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Den folgenden Tabellen ist zu entnehmen, wieviel Einheiten der Rohstoffe R_i zur Herstellung je einer Einheit der Zwischenprodukte Z_j bzw. wieviel Einheiten der Zwischenprodukte Z_j zur Herstellung je einer Einheit der Endprodukte E_k erforderlich sind:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	0	1
R_2	3	1	0
R_3	0	1	3

	E_1	E_2	E_3
Z_1	4	0	1
Z_2	1	3	0
Z_3	0	1	2

Wie groß ist der Rohstoffbedarf für 100 Einheiten E_1, 120 Einheiten E_2 und 150 Einheiten E_3?

12. In einem Unternehmen werden zwei verschiedene Typen von Endprodukten E_1, E_2 aus drei verschiedenen Typen von Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3 gefertigt, die jeweils wiederum aus 4 verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 hergestellt werden. Die Mengen der Rohstoffe R_i zur Herstellung je einer Einheit der Zwischenprodukte Z_j bzw. der Zwischenprodukte Z_j zur Herstellung je einer Einheit der Endprodukte E_k sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	4	3	3
R_2	2	4	6
R_3	1	7	4
R_4	3	3	0

	E_1	E_2
Z_1	6	5
Z_2	4	3
Z_3	1	2

a) Stellen Sie eine Matrizengleichung zur Bestimmung der Anzahl der benötigten Rohstoffe bei vorgegebenem Produktionsvektor $\vec{e} = (e_1, e_2)^T$ der zwei Endprodukte E_1, E_2 auf.
b) Wieviel Rohstoffeinheiten werden benötigt zur Herstellung von 200 Einheiten E_1 und 300 Einheiten E_2?

13. Ein Betrieb montiert aus Einzelteilen $T_1, \ldots, T_5$ die Baugruppen $B_1, \ldots, B_4$ und fertigt aus den Baugruppen Enderzeugnisse E_1, E_2, E_3. Die beiden folgenden Tabellen zeigen, wieviel Einzelteile für die Montage einer Baugruppe und wieviel Baugruppen für die Fertigung eines Endproduktes benötigt werden:

	B_1	B_2	B_3	B_4
T_1	2	1	3	4
T_2	2	0	5	3
T_3	6	3	4	2
T_4	3	4	0	1
T_5	1	1	1	9

	E_1	E_2	E_3
B_1	3	6	2
B_2	4	1	6
B_3	0	4	5
B_4	8	0	0

Der Betrieb soll von den Endprodukten E_1 400, E_2 500 und E_3 300 Stück liefern. Wieviel Baugruppen $B_1, \ldots, B_4$ und wieviel Einzelteile $T_1, \ldots, T_5$ sind erforderlich, um die Vorgabe zu erfüllen?

14. In einem Betrieb werden aus vier Rohstoffen $R_1, \ldots, R_4$ fünf Zwischenprodukte $Z_1, \ldots, Z_5$ hergestellt und hieraus schließlich drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 gefertigt. In den folgenden Tabellen sind notwendigen Mengen der Rohstoffe R_i zur Herstellung je einer Einheit der Zwischenprodukte Z_j bzw. der Zwischenprodukte Z_j zur Herstellung je einer Einheit der Endprodukte E_k angegeben:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
R_1	3	4	2	6	1
R_2	5	0	3	1	2
R_3	1	2	4	0	6
R_4	1	3	1	3	0

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	4	1
Z_2	1	3	6
Z_3	5	1	0
Z_4	0	2	3
Z_5	3	1	2

Wie groß ist der Rohstoffbedarf für 100 Einheiten E_1, 200 Einheiten E_2 und 300 Einheiten E_3?

15. Welche der folgenden Matrizen besitzt eine inverse Matriz A^{-1}?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

16. Eine quadratische Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^T$ und *schiefsymmetrisch*, wenn $A = -A^T$ gilt. Zeigen Sie: Jede quadratische Matrix läßt sich als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix darstellen.

17. Es sei $AA^T = E$. Zeigen Sie: $|A| = \pm 1$.

18. Man beweise die folgenden Beziehungen. Welche Voraussetzungen müssen dabei die Matrizen A und B erfüllen?
a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ b) $(A^{-1})^{-1} = A$.

3.2 Lineare Gleichungssysteme

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 \phantom{{}-2x_3} + x_4 &= 5 \\ 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 \phantom{{}-3x_3} + x_4 &= -3 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 &= 6 \\ 2x_1 \phantom{{}+4x_2} + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 + 3x_3 \phantom{{}+2x_4} &= -10 \end{aligned}$$

2. Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 9x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 9x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, daß das folgende Gleichungssystem keine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= -2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

4. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

a) Man bestimme die (allgemeine) Lösung des Gleichungssystems.
b) Wie lautet diejenige spezielle Lösung, die der Zusatzbedingung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ genügt?

5. Wie lautet die Lösung des folgenden Gleichungssystems?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 5 \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 + 9x_5 &= 23 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 3x_5 &= -1 \\ 9x_2 + 6x_4 + 9x_5 &= 27 \end{aligned}$$

6. Für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_4 + 3x_5 - x_6 &= 10 \\ -x_2 + x_4 - 2x_5 &= 2 \\ 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 &= 7 \end{aligned}$$

gebe man an
a) die allgemeine Lösung; sowie die speziellen Lösungen mit
b) $x_4 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$
c) $x_4 = 0\ x_5 = 1,\ x_6 = 0$
d) $x_4 = 0\ x_5 = 0,\ x_6 = 1$.

7. Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 11 \\ x + 4y - 3z &= -16 \\ 3x + y - 2z &= c \end{aligned}$$

lösbar und wie lautet in diesem Fall die Lösung?

8. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2tx_1 + tx_2 + 9x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + tx_3 &= 1 \end{aligned}$$

a) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
b) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ existieren unendlich viele Lösungen?
c) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen?
d) Man berechne die Lösung für $t = 1$.
e) Man berechne die Lösung zu b).
f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch interpretiert werden?

9. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 + b &= 0 \end{aligned}$$

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat dieses Gleichungssystem α) genau eine Lösung, β) keine Lösung, γ) unendlich viele Lösungen.
b) Wie lautet die Lösung für $a = 1,\ b = 4$?
c) Geben Sie für den Fall γ) die Lösung an. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

10. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Für welche X ist $AX = -2X$?

11. Man bestimme den Rang $r(A)$ der Koeffizientenmatrix und den Rang $r(A|\vec{b})$ der erweiterten Koeffizientenmatrix. Auf Grundlage dieser Ergebnisse entscheide man über die Lösbarkeit der folgenden Gleichungssysteme sowie gegebenenfalls die Anzahl der Parameter.

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 17x_4 &= -20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= -4 \\ 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

12. Bestimmen Sie für die folgenden Reaktionen die stöchiometrischen Koeffizienten $a, b, \ldots$:

a) a HCl $+b$ K MnO$_4$ $+c$ H$_3$AsO$_3$
$\rightleftharpoons d$ H$_3$AsO$_4$ $+e$ MnCl$_2$ $+f$ K Cl $+g$ H$_2$O.
b) a C$_2$H$_5$OH $+b$ PCl$_3$ $\rightleftharpoons c$ C$_2$H$_5$Cl $+d$ P(OH)$_3$
Hinweis: Man stelle für jedes Element (bzw. jede Elementgruppe) die Bilanzgleichung auf und erhält so ein lineares Gleichungssystem.
(Zum Beispiel in a) lautet für Wasserstoff die Bilanzgleichung:
$a + 3c - 3d - 2g = 0$.)

13. Bei chemischen Reaktionen mögen die Elemente $A, B, \ldots$ nachfolgenden Reaktionsgleichungen genügen. Man bestimme daraus die stöchiometrischen Koeffizienten $u, v, \ldots$:
a) $u\ A_5B_3C_2 + v\ CD_2 \rightleftharpoons w\ A_3BC + x\ BD + y\ C$
b) $u\ A_3B_2C_2D + v\ C_3E \rightleftharpoons w\ A_2DE + x\ C_2B + y\ A_3B + z\ A_2C_2D_2$.

14. *Dimensionsanalyse des Strömungswiderstandes eines Schiffes.*
Im cgs-Maßsystem gilt für die Einheiten:

Dichte des Wassers	ρ :	cm^{-3} g^1 s^0,
Schiffsgeschwindigkeit	v:	cm^1 g^0 s^{-1},
benetzte Oberfläche	O:	cm^2 g^0 s^0,
Schiffsmasse	m:	cm^0 g^1 s^0,
Bremsverzögerung	b	cm^1 g^0 s^{-2},

a) Welche Formeln des Typs $\rho^\alpha\, v^\beta\, O^\gamma\, m^\delta\, b^\varepsilon = K$
sind vom Maßsystem her möglich, wenn K eine dimensionslose Zahl sein soll?
b) Welche Formeln ergeben sich für die Widerstandskraft $W = mb$?

15. Ein Unternehmen produziert die Erzeugnisse E_1, E_2, E_3, die in den Anlagen A_1, A_2, A_3 verarbeitet werden müssen. Aus der folgenden Tabelle ist zu entnehmen, wieviel Stunden in jeder Anlage benötigt werden, um eine Einheit E_i $(i = 1, 2, 3)$ herzustellen.

	E_1	E_2	E_3
A_1	3	2	3
A_2	2	0	5
A_3	1	2	4

Wieviel Einheiten eines jeden Erzeugnisses werden produziert, wenn jede Anlage genau 120 Stunden in Betrieb ist?

16. In einem Betrieb werden zwei Endprodukte P_6, P_7 über verschiedene Zwischenprodukte erstellt. Die Materialverflechtung ist durch den *Graphen* in Abb. 1 dargestellt.

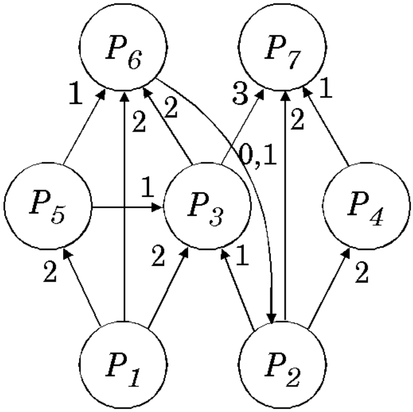

Abbildung 1: Materialverflechtung

Man ermittle den Gesamtbedarf der Produkte P_1 bis P_6, wenn vom Endprodukt P_6 82 Mengeneinheiten und vom Endprodukt P_7 100 Mengeneinheiten an den Markt geliefert werden sollen.

17. Die Fertigungsstruktur in einem Unternehmen, das mit 6 Produkten $P_1, \ldots, P_6$ arbeitet, sei durch die folgende Bilanz (Angaben in einer geeigneten Mengeneinheit) gegeben:

Erhaltenes Produkt	Ausgangsprodukte
P_1	$0,05P_4$, $0,05P_5$
P_2	$1P_1$
P_3	$2P_1$
P_4	$2P_1$, $1P_3$
P_5	$3P_2$, $3P_3$
P_6	$5P_1$, $7P_2$, $2P_3$, $3P_4$, $4P_5$

a) Stellen diese Bilanz graphisch dar.
b) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Mengeneinheiten $x_1, \ldots, x_6$ der Produkte $P_1, \ldots P_6$ auf.
c) Lösen Sie dieses Gleichungssytem unter der Annahme, daß 100 Einheiten des Endproduktes P_6 das Unternehmen verlassen sollen.

18. In einem Unternehmen des Gerätebaus werden aus zwei Rohstoffen R_1, R_2, drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und schließlich zwei Endprodukte E_1, E_2 gefertigt. Die dabei auftretenden Mengenstrukturen sind in der folgenden *Stückliste* zusammengestellt:

Zwischen-/Endprodukte	benötigte Rohstoffe/Zwischenprodukte
Z_1	$2R_1, \quad 3R_2$
Z_2	$3R_1, \quad 7R_2$
Z_3	$4R_1, \quad 2R_2$
E_1	$2R_1, \quad 5Z_1, \quad 4Z_2$
E_2	$5Z_1, \quad 3Z_2, \quad 10Z_3$

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Mengeneinheiten x_1, x_2 der Rohstoffe R_1, R_2 bzw. x_3, x_4, x_5 der Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und x_6, x_7 der Endprodukte E_1, E_2 auf.
b) Lösen Sie dieses Gleichungssytem unter der Annahme, daß 100 Einheiten E_1 und 150 Einheiten E_2 produziert werden sollen, d.h. ermitteln Sie die benötigten Mengen an Rohstoffen R_1, R_2 sowie Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3.

19. In einem Unternehmen werden aus vier Kaufteilen $T_1, \ldots, T_4$ zwei Baugruppen B_1, B_2 und schließlich drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 gefertigt. Dabei ergibt sich folgende *Stückliste*:

Baugruppen/Endprodukte	benötigte Kaufteile/Baugruppen
B_1	$3T_1, \quad 5T_2, \quad 1T_3, \quad 8T_4$
B_2	$5T_1, \quad 3T_2, \quad 6T_4$
E_1	$1T_1, \quad 3T_2, \quad 2B_1, \quad 3B_2$
E_2	$3T_1, \quad 1T_4, \quad 1B_1, \quad 1B_2$
E_3	$2T_1, \quad 4T_2, \quad 2T_3, \quad 4B_1, \quad 4B_2$

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Einheiten $x_1, \ldots, x_4$ der Kaufteile T_i bzw. x_5, x_6 der Baugruppen B_j und x_6, x_7, x_8 der Endprodukte E_k auf.
b) Lösen Sie dieses Gleichungssytem unter der Annahme, daß 100 Einheiten E_1, 200 Einheiten E_2, und 300 Einheiten E_3 produziert werden sollen. Insbesondere ermitteln Sie dabei die benötigten Mengen an Kaufteilen $T_1, \ldots, T_4$.
c) Formulieren Sie das Problem als Matrizengleichung und lösen Sie unter den obigen Annahmen diese Gleichung. Was kann man dabei feststellen?

20. Bei einem Quiz sollen 30 Teilnehmer jeweils eine von drei CD's im Wert von 30 DM, 24 DM oder 18 DM erhalten. Welche Möglichkeiten für den Kauf dieser CD's gibt es, wenn von jeder CD mindestens ein Exemplar gekauft werden soll und insgesamt 600 DM zur Verfügung stehen.

21. Man bestimme die Lösung (Rechnung mit 3 Dezimalen, Ergebnis mit 2 Dezimalen) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1,2x_1 - 4,5x_2 + 3,6x_3 &= 7,2 \\ 6,4x_1 - 1,5x_2 + 11,5x_3 &= 17,5 \\ 3,5x_1 + 7,2x_2 - 2,2x_3 &= -20,5. \end{aligned}$$

22. *Numerische Problematik bei linearen Gleichungssystemen.*
a) Man löse

$$\begin{pmatrix} 1044,005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

b) Man "löse" mit dem Taschenrechner

$$\begin{pmatrix} 1044,0045 & 696,0028 \\ 174,0008 & 116,0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696,0034 \\ 116,0006 \end{pmatrix}.$$

c) Die gleichzeitige Lösung der beiden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

erfüllt auch das Gleichungssystem b) und stellt dessen einzige Lösung dar. Man bestätige dies, bestimme diese gemeinsame Lösung und löse damit b).

23. Gegeben ist die Matrixgleichung $Ax = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet die obige Matrixgleichung ausgeschrieben? Bestimmen Sie, falls die inverse Matrix existiert, A^{-1} und drücken Sie die Komponenten von x durch die Komponenten von y aus.

24. Bestimmen Sie die inverse Matrix, falls sie existiert, zu folgender Matrix und machen Sie die Probe $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

25. Bestimmen Sie die inverse Matrix, falls sie existiert, zu den folgenden Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1,5 & -2 \end{pmatrix}$.

26. Man bestimme die inverse Matrix von

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

27. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Ist die Matrix A regulär?
b) Man berechne die inverse Matrix.
c) Welche Matrix X löst die Gleichung

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

28. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne A^{-1}.
b) Man bestimme die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.
c) Man bestimme die Lösung von $AX = B$.

29. Berechnen Sie die inverse Matrix von folgender Matrix und machen Sie die Probe!

$$A = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

30. Ein zweistufiger Produktionsprozeß mit den Rohstoffen R_1, R_2, den Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3 und den Endprodukten E_1, E_2 werde durch die folgenden Tabellen beschrieben (vgl. die Aufgabenstellung beispielsweise in 3.1.11.):

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	2
R_2	1	3	1

	E_1	E_2
Z_1	2	1
Z_2	1	2
Z_3	0	2

Man ermittle die Mengen der Endprodukte E_1, E_2, wenn 3000 Mengeneinheiten Rohstoff R_1 und 3200 Mengeneinheiten Rohstoff R_2 voll für die Produktion eingesetzt werden.

3.3 Vektorrechnung und analytische Geometrie

1. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB} = a = 5$, $\overline{AD} = b = 3$ und $\angle DAB = \pi/6$. Weiter sei $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$.
a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$?
b) Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a} - \vec{b}, -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, 2\vec{a}, 3\vec{a} - 4\vec{b}$.
c) Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}, |\vec{a} \times \vec{b}|, |\vec{c}|$.

2. Welche Gegenkraft $\vec{F}$ hebt die vier Einzelkräfte (alle Komponenten in [N])

$$\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 200 \\ 110 \\ -50 \end{pmatrix}, \vec{F_2} = \begin{pmatrix} -10 \\ 30 \\ -40 \end{pmatrix}, \vec{F_3} = \begin{pmatrix} 40 \\ 85 \\ 120 \end{pmatrix}, \vec{F_4} = -\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

in ihrer physikalischen Wirkung auf?

3. Berechnen Sie die resultierende Kraft der in Abb. 2, S.14 skizzierten (ebenen) Kräfte nach Betrag und Richtung (Richtungswinkel).

4. Bestimmen Sie die Ortsvektoren der acht Ecken eines Würfels mit der Kantenlänge a gemäß Abb. 3, S.14

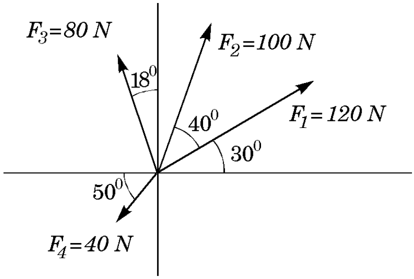

Abbildung 2: Kräftediagramm

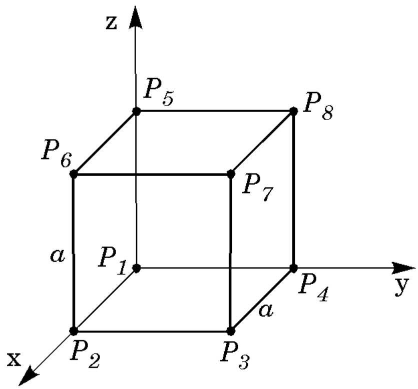

Abbildung 3: Würfel

5. Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a} = (7; -1; -3)^T, \vec{b} = (-8; 64; 16)^T, \vec{c} = (-2; t; 2)^T$ linear abhängig in $\mathbb{R}^3$?

6. Man zeige, daß die folgenden Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$ bilden. Wie lauten die Koordinaten von Vektor $\vec{b}$ bezüglich dieser Basis?
a) $\vec{a}_1 = (1; 0; 0)^T, \vec{a}_2 = (1; 1; 0)^T, \vec{a}_3 = (1; 0; 1)^T;\quad \vec{b} = (0; 0; 1)^T$
b) $\vec{a}_1 = (1; 1; 2)^T, \vec{a}_2 = (2; 0; 2)^T, \vec{a}_3 = (1; 2; 4)^T;\quad \vec{b} = (0; 2; 2)^T$,
c) $\vec{a}_1 = (2; 3; 1)^T, \vec{a}_2 = (0; 1; -1)^T, \vec{a}_3 = (5; 1; 2)^T;\quad \vec{b} = (-3; 4; 1)^T$,
d) $\vec{a}_1 = (1/2; 1; -1/2)^T, \vec{a}_2 = (-1/3; 1; 2/3)^T, \vec{a}_3 = (1; -1; 2)^T$;
$\vec{b} = (3; -2; -1)^T$.

7. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (10; 4; 6)^T$ und $\vec{b} = (6; 1; -8)^T$. Berechnen Sie $|\vec{a}|, |\vec{b}|$, die Einheitsvektoren $\vec{a}^0, \vec{b}^0$, den Winkel [Grad] zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und die Schnittwinkel von $\vec{a}^0$ mit den Koordinatenachsen (Richtungskosinusse).

8. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1; 2; -2)^T$ und $\vec{b} = (4; 0; 3)^T$.
a) Welchen Winkel (Grad) schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?
b) Man berechne die Projektion von $\vec{a}$ auf die Richtung von $\vec{b}$ sowie von $\vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{a}$.
c) Man berechne den spitzen Winkel zwischen den Diagonalen des Parallelogramms, das $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufspannen.

9. Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} = (2; -1; 1)^T$, $\vec{b} = (3; 2; 2)^T$ und $\vec{c} = (-1; 2; 5)^T$ folgende Ausdrücke:
a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, b) $\vec{a} \times \vec{b}$, c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$, d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, e) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

10. Man zeige, daß die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein *orthonormiertes* System bilden, d.h. die Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander und besitzen jeweils die Länge 1.

11. Eine Masse wird durch die Kraft $\vec{F} = (3, 5, -8)^T$ N geradlinig von $P_1(3\,\mathrm{m};\ 2\,\mathrm{m};\ 5\,\mathrm{m})$ nach $P_2(5\,\mathrm{m};\ -3\,\mathrm{m};\ 1\,\mathrm{m})$ verschoben.
a) Welche Arbeit leistet die Kraft? Welchen Winkel bildet sie mit dem Verschiebungsvektor $\vec{s} = \overrightarrow{P_1P_2}$?
b) Welchen Flächeninhalt hat das von den Ortsvektoren der Punkte P_1 und P_2 aufgespannte Parallelogramm?

12. Eine Masse wird durch die Kraft $\vec{F} = (10, -4, -2)^T$ N geradlinig von $P_1(1\,\mathrm{m};\ 20\,\mathrm{m};\ 3\,\mathrm{m})$ nach $P_2(4\,\mathrm{m};\ 2\,\mathrm{m}; -1\,\mathrm{m})$ verschoben.
Welche Arbeit leistet die Kraft?
Welchen Winkel bildet sie mit dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$?

13. Durch drei Punkte A, B, C wird ein Dreieck festgelegt. Berechnen Sie die Länge der drei Seiten, die Winkel im Dreieck sowie den Flächeninhalt.
a) $A(1; 4; -2)$, $B(3; 1; 0)$, $C(-1; 1; 2)$
b) $A(0; 3; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(4; 2; 3)$.

14. Gegeben sind im n-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ die folgenden Punkte P_1 und P_2. Man bestimmen deren Abstand!
a) $n = 2$: $P_1(1; 2),\ P_2(2; 1)$
b) $n = 3$: $P_1(1; 2; -3),\ P_2(2; 1; -1)$
c) $n = 4$: $P_1(1; 2; -3; 1),\ P_2(2; 1; -1; 2)$
d) $n = 6$: $P_1(-1; 0; 1; 3; 2; 1),\ P_2(2; 1; 0; 0; 2; 2)$.

15. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

16. Wie groß ist das Volumen des Spats, der von den Vektoren $\vec{a} = (0; 3; 1)^T$, $\vec{b} = (3; 1; 2)^T$ und $\vec{c} = (2; 5; -4)^T$ aufgespannt wird?

17. Wie muß λ gewählt werden, damit die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

komplanar sind, d.h. in einer Ebene liegen?

18. Zu dem Vektor $\vec{a} = (6; 1; 1)^T$ soll ein Vielfaches des Vektors $\vec{b} = (3; -1; 0)^T$ addiert werden, so daß die Summe $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ auf dem Vektor $\vec{c} = (-2; 3; 5)^T$ senkrecht steht.
a) Wie groß muß λ gewählt werden?
b) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ gleiche Länge haben.
c) Berechnen Sie den von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ eingeschlossenen Winkel.

19. Zeigen Sie, daß folgende Beziehungen gelten:
a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$
c) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}$.

20. Im Methan-Molekül CH_4 liegt das C-Atom im Zentrum und die H-Atome an den Ecken eines regulären Tetraeders. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß das C-Atom im Ursprung liegt und die Lage des Atoms H_1 durch den Vektor $\vec{a_1} = (s, s, s)^T$ gegeben ist (vgl. Abb. 4).

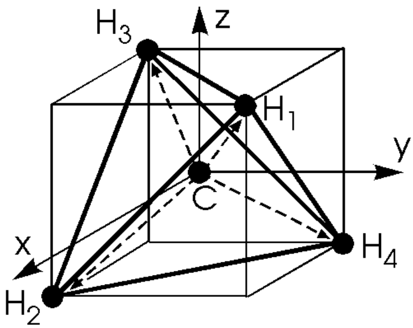

Abbildung 4: Methan-Molekül

a) Wie lauten die Ortsvektoren aller Atome in Einheiten der C-H-Bindung d. Stellen Sie dazu eine Beziehung zwischen $d = |\vec{a_1}|$ und s her.
b) Bestimmen Sie den Abstand der Atome H_2 und H_4 sowie den Tetraeder-Winkel H-C-H und den Winkel H-H-H.
c) Berechnen Sie das Lot von H_3 auf die Gerade durch H_2 und H_4.

21. Von einer Geraden g ist der Punkt $P_1(4;3;2)$ und der Richtungsvektor $\vec{a} = (2;1;3)^T$ bekannt. Geben Sie die Gleichung der Geraden an und berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(4;1;1)$ von dieser Geraden.

22. Liegen die 3 Punkte $P_1(3;0;4)$, $P_2(1;1;1)$, $P_3(-1:2;-2)$ auf einer Geraden?

23. Man bestimme die Zahlen a und b so, daß der Punkt $P(5;3;1)$ auf der Geraden $\vec{r} = (6,a,4)^T + t(1,2,b)^T,\ t \in \mathbb{R}$ liegt.

24. Man bestimme die Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt $P(-1;3)$ gehen und vom Punkt $Q(2;-1)$ den Abstand $d = 4$ haben.

25. Zeigen Sie, daß die beiden Geraden g_1 und g_2 mit den folgenden Gleichungen *windschief* sind und berechnen Sie ihren Abstand:

$$g_1 : \vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; g_2 : \vec{r}(t_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

26. Eine Ebene enthält den Punkt $P_1(1;0;9)$, ihr Normalenvektor ist $\vec{n} = (1;3;5)^T$. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene (Hessesche Normalform und in kartesischen Koordinaten) und berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(-2;1;3)$ von der Ebene.

27. Durch den Punkt $P_1(-1;5;5)$ ist die Ebene E_1 und durch den Punkt $P_2(-3;0;6)$ die Ebene E_2 so zu legen, daß beide Ebenen senkrecht zu dem Vektor $\vec{n} = (8;-1;4)^T$ sind. Bestimmen Sie den Abstand beider Ebenen.

28. Gegeben sind drei Ebenen

$$E_1 : 2x - y - z = 7; \; E_2 : 6x + y + 5z = -3; \; E_3 : 2x + 2y + 5z = -11.$$

Bestimmen Sie – falls vorhanden – den (die) Schnittpunkt(e) der drei Ebenen. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2?

29. Gegeben sind die Ebenen

$$E_1 : x - y + z = 0; \; E_2 : 3x - y - z + 2 = 0; \; E_3 : 4x - y - 2z + \lambda = 0.$$

a) Man bestimme, falls das möglich ist, die Zahl λ so, daß sich diese drei Ebenen in einer gemeinsamen Geraden schneiden.
b) Man gebe eine Parameterdarstellung dieser Geraden an.
c) Man bestimme den Schnittwinkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2.

30. Gegeben sind die Ebenen

$$E_1 : x + y + z = 1; \; E_2 : ax + y - 2z = 3; \; E_3 : -x + 3z = b.$$

a) Man bestimme, die Zahlen a und b so, daß sich die drei Ebenen in keinem gemeinsamen Punkt schneiden.
b) Man bestimme, die Zahlen a und b so, daß sich die drei Ebenen in einer gemeinsamen Geraden schneiden und gebe eine Parameterdarstellung dieser Geraden an.
c) Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes der 3 Ebenen für $a = b = 1$?

31. In welchem Punkt durchstößt eine Gerade g, die auf der Ebene $E: x-2y+2z=3$ senkrecht steht und den Punkt $P(6;-8;13)$ enthält, die Ebene E?

32. Vom Punkt P ist das Lot auf die Ebene E zu fällen. Man bestimme die Koordinaten des Lotfußpunktes F.
a) $E: 2x-y+4z=-16; \quad P(1;0;6)$
b) $E: x+z=1; \quad P(2;5;3)$

33. Gegeben sind die Punkte $P_1(4;1;3)$, $P_2(-2;2;1)$, $P_3(1;-3;2)$ und $P_4(2;1;5)$.
a) Geben Sie die Ortsvektoren $\vec{r_i}=\vec{OP_i}, \quad i=1,\ldots,4$, an.
b) Sind die Vektoren $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, $\vec{r_3}$ linear unabhängig? Wenn ja, stelle man den Vektor $\vec{r_4}$ als Linearkombination von $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, $\vec{r_3}$ dar.
c) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a}=\vec{P_1P_2}$, $\vec{b}=\vec{P_2P_3}$, $\vec{c}=\vec{P_3P_1}$, deren Beträge und die Schnittwinkel von $\vec{a}$ mit den Koordinatenachsen.
d) Bestimmen Sie $\vec{a}+\vec{c}$ und $\vec{a}-2\vec{b}$.
e) Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck $P_1P_2P_3$ und den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
f) Es seien g_1 die Gerade durch die Punkte P_1, P_2 und g_2 die Gerade durch die Punkte P_3, P_4. Bestimmen Sie deren Lage und – falls vorhanden – den Schnittpunkt bzw. - winkel sowie den Abstand des Punktes P_3 von g_1.
g) Wie lautet die Gleichung der Ebene E durch P_1, P_2, P_3 (Parameterdarstellung)?
h) Welchen Abstand hat der Punkt P_4 von E?

34. Gegeben sind die 3 Punkte $P_1(2;0;1)$, $P_2(3;1;0)$, $P_3(4;-2;5)$ sowie $P_4(1;1;3)$.
a) Zeigen Sie, die Vektoren $\vec{a}=\vec{P_1P_2}$, $\vec{b}=\vec{P_2P_3}$, $\vec{d}=\vec{P_3P_4}$ sind linear unabhängig. Stellen Sie den Ortsvektor des Punktes P_4 als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ dar.
b) Berechnen Sie die Seitenlängen und die Winkel im Dreieck $P_1P_2P_3$. Welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?
c) Geben Sie die Gleichung der Geraden g_1 durch die Punkte P_1, P_2 und der Geraden g_2 durch die Punkte P_3, P_4 an. Welche Lage haben die beiden Geraden zueinander? Welchen Abstand hat der Punkt P_3 von der Geraden g_1?
d) Wie lautet die Gleichung der Ebene E durch die Punkte P_1, P_2, P_3 (Parameterdarstellung)? Welchen Abstand hat der Punkt P_4 von der Ebene E?

35. Gegeben sind die 3 Punkte $P_1(1;0;1)$, $P_2(2;1;3)$, $P_3(-1;0;0)$ sowie $P_4(1;1;1)$.
a) Bilden die Vektoren $\vec{r_i} = \vec{OP_i}$, $(i = 1,2,3)$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$? Wenn ja, stelle man den Ortvektor des Punktes P_4 als Linearkombination von $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, $\vec{r_3}$ dar.
b) Berechnen Sie die Seitenlängen und die Winkel im Dreieck $P_1P_2P_3$. Welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?
c) Geben Sie die Gleichung der Geraden g_1 durch die Punkte P_1, P_2 und der Geraden g_2 durch die Punkte P_3, P_4 an. Welche Lage haben die beiden Geraden zueinander? Welchen Abstand hat der Punkt P_3 von der Geraden g_1?
d) Wie lautet die Gleichung der Ebene E durch die Punkte P_1, P_2, P_3 (Parameterdarstellung)? Welchen Abstand hat der Punkt P_4 von der Ebene E?

36. In der Ebene haben die auf einer Seite der gegebenen Geraden g liegenden Punkte P_1 und P_2 jeweils den Abstand h_1 und h_2 von g. Die von P_1 bzw. P_2 auf g gefällten Lote schneiden g in den Punkten Q_1 und Q_2, wobei die Strecke $\overline{Q_1Q_2}$ die Länge $a > 0$ hat. Gesucht ist der Punkt P auf g, für den die Abstandssumme $\overline{PP_1} + \overline{PP_2}$ minimal wird.

37. Welche Kurven werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben? Skizzieren Sie die Bilder der Kurven.

$$\text{a) } 3x + 2y = 4, \quad \text{b) } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4, \quad \text{c) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

$$\text{d) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad \text{e) } 4(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16, \quad \text{f) } y^2 = 4x - 6,$$

$$\text{g) } 4x^2 + 2x + y^2 = 5, \quad \text{h) } 3x^2 + 2y + 3y^2 = 25.$$

38. Geben Sie die Gleichungen an, durch die folgende geometrische Gebilde analytisch beschrieben werden:
a) Ellipse um den Ursprung mit den Halbachsen 3 und 1
b) Gerade mit den Abschnitten auf der x- und y-Achse 5 bzw. -1
c) Kreis mit Mittelpunkt $(-3, 2)$ und Radius 5
d) Gerade, die mit der x-Achse den Winkel $\pi/4$ einschließt und durch den Ursprung geht.

39. Legen Sie jeweils durch die angegebenen Punkte die verlangte Kurve. Wie lautet die entsprechende Gleichung?

a) eine Gerade durch die Punkte (2,3) und (1,1)
b) eine Gerade durch die Punkte (0,0) und (2,2)
c) eine Gerade durch die Punkte (1,2) und $(-5, 6)$
d) einen Kreis durch die Punkte (1,0), (0,1), $(-1, 0)$
e) eine Ellipse um den Ursprung durch die Punkte (2,1), (0,3).

40. Welche geometrischen Gebilde im Raum $\mathbb{R}^3$ werden durch folgende Gleichungen beschrieben?

$$\text{a) } x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 36, \quad \text{b) } 2x + 3y + 5z = 1, \quad \text{c) } x = 5,$$

$$\text{d) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \quad \text{e) } (x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 1,$$

$$\text{f) } x^2 + y^2 + z^2 = 5 \quad \textit{und} \quad z = 3, \quad \text{g) } x = 5 \quad \textit{und} \quad z = 3,$$

$$\text{h) } x^2 + \frac{1}{25}y^2 + z^2 = 1 \quad \textit{und} \quad x + y + z = 3.$$

41. Der Kreis $x^2 + y^2 = 16$ soll parallel zu den Koordinatenachsen so verschoben werden, daß sein Mittelpunkt in den Punkt $M = (-2; 5)$ fällt. Wie verändert sich die Kreisgleichung? Skizzieren Sie den Kreis vor und nach der Parallelverschiebung.

42. Das kartesische (x, y)-Koordinatensystem soll um $\alpha = \pi/6$ gedreht werden.
a) Welche Koordinaten hat ein beliebiger Punkt X im gedrehten (x', y')-Koordinatensystem?
b) Welche Koordinaten hat speziell der Punkt $M = (2; 3)$?
c) Wie lautet die Darstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung im (x', y')-System?
d) Welche Gleichung hat die Parabel $y = x^2$ im (x', y')-System?

43. Das (alte) kartesische (x, y)-Koordinatensystem wurde um $(1; 1)$ verschoben und um $\alpha = \pi/4$ gedreht.
a) Skizzieren Sie das alte und neue (x', y')-System.
b) Welche Koordinaten hat ein beliebiger Punkt X im alten bzw. neuen Koordinatensystem (jeweils ausgedrückt durch die Koordinaten des anderen Systems).
c) Der Punkt M hat im neuen System die Koordinaten $(2; 3)$. Wie lauten die Koordinaten bezüglich des alten ?
d) Welche Gleichung hat die Gerade $y = 2x - 2$ im neuen System?

44. Ermitteln Sie die kanonischen Gleichungen der folgenden Kegelschnitte. Um welche Kurven handelt es sich? Skizzieren Sie deren Lage.

a) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0$

b) $13x^2 + 10xy + 13y^2 + 82x + 98y + 157 = 0$

c) $9x^2 - 14\sqrt{3}xy - 5y^2 - 48 = 0$

d) $x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 6y - \dfrac{22}{3} = 0$

45. Nicht in jedem Fall wird durch eine Gleichung mit quadratischen Termen bezüglich x und y eine Ellipse, Parabel oder Hyperbeln beschrieben. Geben Sie je ein möglichst einfaches Beispiel an, wo durch ein derartige Gleichung nur ein einziger Punkt bzw. Geraden definiert werden.

46. Wo schneidet die Gerade $3x - y + 6 = 0$ die Hyperbel $9x^2 - 4y^2 = 36$ und deren Asymptoten? Wie lang sind die Strecken zwischen den Schnittpunkten mit der Hyperbel und der zugehörigen Asymptote?

47. Wie müssen m bzw. b gewählt werden, damit die Geraden $y = mx$ bzw. $y = x + b$ die Parabel $4x^2 - 8x - 4y + 3 = 0$ tangieren? Wie lauten die Koordinaten der Berührungspunkte?

48. Welche Bedingungen sind an A, B, C zu stellen, damit die Gerade $Ax + By + C = 0$ mit der Ellipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
α) einen gemeinsamen Punkt,
β) zwei gemeinsame Punkte oder
γ) keinen gemeinsamen Punkt hat?

49. Welcher Punkt der Parabel $(y + 2)^2 = -x$ hat von der Geraden $y = 2 - x$ den kleinsten Abstand?

50. Wo schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkt $M(4;0)$ und dem Radius $r = 3$ die Hyperbel $5x^2 - 4y^2 = 5$?

51. Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Tangente an die Parabel $y^2 = 16x$, die zur Geraden $x + 2y - 4 = 0$ parallel verläuft.

52. Die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $P_1(3;5;-1)$, $P_2(1;-1;-3)$ und $P_3(1;3;-1)$ werde senkrecht auf die Ebene $x+2y-z = 2$ projiziert.

Von dem projizierten Dreieck sind die Eckpunkte und der Flächeninhalt gesucht.
Bemerkung: Die projizierte Dreiecksfläche ist als Schattenfläche interpretierbar. Dabei wird vorausgesetzt, daß das Licht in Projektionsrichtung einfällt.

53. Der Punkt $P_0(1;2;-1)$ wird an der Ebene E gespiegelt, die durch die Punkte $P_1(2;1;3)$ $P_2(-1;0;1)$ und $P_3(-1;2;-1)$ aufgespannt wird. Wie lauten die Koordinaten des Spiegelpunktes?

54. Vom Punkt $P(2;2;2)$ aus wird ein Massenpunkt auf die Ebene E: $x - 2y + 3z = 1$ geschossen. An dieser Ebene wird der Massenpunkt reflektiert. Auf welchen Punkt Q der Ebene E muß gezielt werden, wenn der Massenpunkt nach der Reflektion auf den Punkt $R(5;0;5)$ treffen soll?
Bemerkung: Der Massenpunkt bewegt sich stets geradlinig fort. Beim Aufprall auf die Ebene stimmt der Einfallswinkel mit dem Ausfallwinkel überein.

4 Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

4.1 Partielle Differentiation

1. Skizzieren Sie die Höhenlinien der folgenden Funktionen (Flächen):

a) $f(x,y) = x + y$, b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$,

c) $f(x,y) = 16 - x^2 + y^2$, d) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$,

e) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$,

f) $f(x,y) = 4 - (x^2 + y^2)$, g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

h) $f(x,y) = 9x^2 + 16y^2$, i) $f(x,y) = x^2 + y$.

2. Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cos(x^2 + y), & \text{wenn} \quad x > 0 \\ x^2, & \text{wenn} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

3. Legen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der folgenden Funktionen fest und bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung:

a) $z = x^y$, b) $z = \ln(x^2 + y)$, c) $z = \ln(x^2 + y) \cdot \mathrm{e}^{x-y}$,

d) $f(x,y) = \ln(\tan \frac{x}{y})$, e) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

f) $f(x,y) = \log_x y$, g) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sin(x \cdot y^2)}$.

4. Bilden Sie die folgenden partiellen Ableitungen. Ist deren Wert von der Differentiationsreihenfolge abhängig?

a) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ für $u = zy^x$, $y > 0,\ x \neq 0$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ für $u = \ln(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 > 0$.

5. Man zeige, die Funktion $z = a \cdot \mathrm{e}^{x/y},\ y \neq 0$ (a: Konstante) erfüllt die Gleichung

$$xz_x + yz_y = 0.$$

6. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktionen
a) $z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-x}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (0; 1)$
b) $z = \ln(x^2 + y^2)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1/2; \sqrt{3}/2)$
c) $z = \dfrac{\mathrm{e}^{x-y}}{x+y}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1; 1)$
d) $z = \sqrt[3]{x^2 y} + 2 \cdot \cos(\pi(x + 2y))$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1; 2)$.

7. Gegeben ist die Fläche $z(x, y) = \ln \dfrac{x}{y}$.
a) Man stelle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt $(-2, -5)$ auf.
b) Wie lautet der normierte Normalenvektor dazu?

8. An welcher Stelle (x, y) zeigt der Normalenvektor der Fläche $z = x^4 + y^4 - 32x + 4y + 10$ in Richtung der z-Achse?

9. Man bestimme das vollständige Differential der folgenden Funktionen. In welchen Punkten (x, y) sind diese Differentiale nicht definiert?

a) $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, b) $z(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$,

c) $z(x, t) = \dfrac{t^2 + x}{2t - 4x}$, d) $u(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

10. Man linearisiere die Funktion $z = 5y^2/x$ in der Umgebung von $x = 1;\ y = 2$, berechne mit dieser Näherungsfunktion den Funktionswert an der Stelle $x = 1,1;\ y = 1,8$ und vergleiche diesen Wert mit dem exakten Funktionswert.

11. Gegeben ist ein Hohlzylinder mit dem Innenradius $r_i = 6$ cm, dem Außenradius $r_a = 10$ cm und der Höhe $h = 20$ cm. Berechnen Sie mit Hilfe des vollständigen Differentials die Volumenänderung $\Delta V \approx dV$, die dieser Zylinder erfährt, wenn man die Größen r_i, r_a und h wie folgt verändert: $\Delta r_i = 0,2$ cm, $\Delta r_a = -0,4$ cm, $\Delta h = 0,7$ cm. Vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert ΔV_{exakt}.

12. In welchem formalen Zusammenhang stehen der isobare Volumenausdehnungskoeffizient α, die isotherme Kompressibilität κ und der isochore Spannungskoeffzient β zueinander. Die Definitionsgleichungen für α, κ und β lauten:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \; ; \quad \kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \; ; \quad \beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

Anmerkung: Einen Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen einer Funktion erhält man, indem man das vollständige Differential, d.h. hier von $V = V(T, p)$, gleich 0 setzt.

13. Untersuchen Sie, welche der folgenden Differentialformen $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ vollständige Differentiale sind und berechnen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential:

a) $x^2 y dx + xy^2 dy$, b) $(y\mathrm{e}^x + 2xy)dx + (\mathrm{e}^x + x^2 + y^4)dy$,

c) $x^y dx + y^x dy \quad (x, y > 0)$, d) $2y\sin(2x)dx - \cos(2x)dy$,

e) $\dfrac{y^2}{x}dx + 2y\ln x dy \; (x > 0)$, f) $\dfrac{3e^{-y}}{1+9x^2}dx - e^{-y}[\arctan(3x) + 1]dy$.

14. Für die einem Gase vom Volumen V und der Temperatur T zugeführte Wärmemenge δQ gilt unter gewissen Voraussetzungen

$$\delta Q = \frac{\mathrm{R}T}{V}\, dV \; + \; c(T)\, dT,$$

wobei R die allgemeine Gaskonstante und $c(T)$ eine spezifische Wärme ist.
a) Untersuchen Sie, ob δQ vollständiges Differential einer Funktion der zwei Variablen (V, T) ist.
b) Bestimmen Sie eine nur von T abhängende Funktion f so, daß die Differentialform $f(T) \cdot \delta Q$ vollständiges Differential einer Funktion S von (V, T) ist.
Hinweis: Die Gleichung $f'(T) = -f(T)/T$ hat die Lösung $f(T) = 1/T$.
c) Wie lautet dann $S(V, T)$, wenn $c(T) = c_V = \text{const}$ ist (ideales Gas)? (S ist die *Entropie* des Gases.)

15. Berechnen Sie die Differentiale erster und zweiter Ordnung dp und d^2p für ein Gas, das der van-der-Waals-Gleichung

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \qquad (a, b, R = \text{const})$$

genügt.
Anmerkung: Das vollständige Differential zweiter Ordnung einer Funktion $z(x,y)$ ist definiert als:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

16. Welche Körper bzw. Flächen werden durch folgende Ungleichungen in Kugelkoordinaten beschrieben:
a) $2 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$
b) $r = 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

17. Geben Sie für folgende in kartesischen Koordinaten gegebene Punkte die Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten an:
a) $P = (1;1;1)$ b) $P = (1;1;-1)$ c) $P = (-1;-1;-1)$.

4.2 Anwendungen der partiellen Differentiation

1. Ein ideales Gas wird bekanntlich durch die Zustandsgleichung $pV = NRT$ charakterisiert.
a) Berechnen Sie für die Funktion $p(V,T,N)$ das vollständige Differential dp.
b) Wie groß ist der zu erwartende Fehler Δp in linearer Näherung, wenn das Volumen, die Temperatur und die Molzahl mit einer Ungenauigkeit von ΔV, ΔT und ΔN gegeben sind. Berechnen Sie außerdem den relativen Fehler $\Delta p/p$.

2. Der Ortsvektor $\vec{r} = (3;4)^T$ wurde ungenau gezeichnet:
$(3 \pm 0,1; 4 \pm 0,1)$. Wie wirkt sich das schlimmstenfalls auf den Winkel α aus, den dieser mit der x-Achse bildet? (Winkelmaß, 1 Dezimale)

3. Man bestimme den prozentualen Fehler des Volumens eines geraden Kreiskegels, falls dessen Radius einen prozentualen Fehler von 2% und die Höhe einen prozentualen Fehler von 5% aufweisen.

4. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ABC wurden die beiden Katheden $a = (50 \pm 0,5)$m und $b = (100 \pm 1)$m gemessen. Bestimmen Sie den Winkel $\alpha = \angle CAB$ [Grad] und den absoluten und relativen Maximalfehler dieses Winkels.

5. Zur Bestimmung der Brennweite f eines Kugelspiegels wurden die Gegenstandsweite $a = (12 \pm 0,1)$ cm und die Bildweite $b = (5 \pm 0,05)$

cm gemessen. Welcher absolute und welcher relative Fehler ergibt sich für die gemäß $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ berechnete Brennweite?

6. Für einen Rotationsellipsoiden (Rotation um x-Achse) wurden die Halbachsen mit $a = (10 \pm 0,3)$ m und $b = (8 \pm 0,5)$ m bestimmt. Berechnen Sie das Volumen, den absoluten und relativen Maximalfehler.

7. Wie genau kann man eine Größe A ermitteln, die aus den Einzelmessungen a bis c zu errechnen ist, wenn man a und b mit einem prozentualen Fehler von je $3,5\%$ und c mit einem Fehler von $1,5\%$ bestimmt und der funktionale Zusammenhang lautet

$$A = \frac{3a^3 b}{c^4} \; ?$$

Durch eine umfangreiche experimentelle Anordnung könnte man den prozentualen Fehler von b auf $2,5\%$ senken. Wäre dieser Aufwand sinnvoll?

8. Es wurden gemessen die Widerstände: $R_1 = (851,4 \pm 0,5)\ \Omega$, $R_2 = (252,1 \pm 0,4)\ \Omega$. Man berechne hieraus $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ sowie den absoluten, relativen und prozentualen Maximalfehler von R.

9. Man berechne den relativen Maximalfehler von
$u = x^p \cdot y^q \cdot z^r$, $\quad (p,\ q,\ r$ ganze Zahlen$)$,
wenn die relativen Maximalfehler von x, y, z bekannt sind.

10. Für eine adiabatische Zustandsänderung gilt die Beziehung

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} .$$

Es gelte $\kappa = 1,4$ (zweiatomiges Gas). Außerdem wurden gemessen: $T_1 = (293 \pm 1)°$K , $T_2 = (373 \pm 5)°$K und $p_1 = (1000 \pm 10)$ mbar. Man berechne daraus den Druck p_2 und dessen absoluten und relativen Fehler.

11. Die Entropie eines idealen Gases ist als Funktion des Volumens V, der Temperatur T und der Molzahl N gegeben durch

$$S(V,T,N) = NR \ln V + NC_v \ln T - NR \ln N + NS_0.$$

a) Berechnen Sie das vollständige Differential dS.
b) Wie groß ist der zu erwartende Fehler ΔS (in linearer Näherung), wenn die Temperatur, das Volumen und die Molzahl mit einer Ungenauigkeit von ΔT, ΔV und ΔN gegeben sind?
c) Berechnen Sie die relative Änderung $\Delta V/V$ des Volumens mit der Temperatur bei festgehaltener Molzahl (d.h $\Delta N = 0$) und festgehaltener Entropie (d.h. $\Delta S = 0$).
d) Berechnen Sie den isotropen Ausdehnungskoeffizienten

$$V^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{S,N}$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von c).
Hinweis: Man verwende die Formel zur Ableitung einer impliziten Funktion.

12. Für die Entropie eines Gases $S = S(V, T)$ (ein Mol) gilt die Beziehung

$$S = R \ln V + c_V \ln T \qquad (R,\ c_V = \text{const}).$$

Die Maßeinheiten seien geeignet normiert, so daß gelte $R = c_V = 1$. Es wurden gemessen $V = 200 \pm 5$ und $T = 300 \pm 1$. Berechnen Sie den zugehörigen Wert S und nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz den absoluten, relativen und prozentualen Fehler von S.

13. Bei einem Federpendel besteht zwischen der Schwingungsdauer T, der Federkonstanten D und der Pendelmasse m die folgende Beziehung:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Wie groß ist der prozentuale Fehler der Schwingungsdauer, wenn der prozentuale Fehler von m und D jeweils 1% beträgt?

14. Die magnetische Feldstärke H im Mittelpunkt einer zylindrischen Spule mit 1000 Windungen und der Länge l, dem Radius r und der Stromstärke I beträgt

$$H = \frac{1000I}{l}\left(1 - 2\left(\frac{r}{l}\right)^2\right)$$

Man bestimme die magnetische Feldstärke H und deren absoluten und prozentualen Fehler, wenn $l = (20 \pm 0,01)$cm, $r = (2 \pm 0,01)$cm, $I = (1 \pm 0,03)$A gemessen wurden.

15. Ein elektromagnetischer Schwingkreis enthält die beiden Kapazitäten $C_1 = (10 \pm 0,5)$nF und $C_2 = (50 \pm 2,0)$nF sowie die Induktivität $L = (5 \pm 0,2)$mH in Parallelschaltung (1 nF $= 10^{-9}$F; 1 mH $= 10^{-3}$H.) Die Schwingungsdauer T berechnet sich dann nach der Formel:

$$T = 2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

Man bestimme die Schwingungungsdauer T und deren absoluten, relativen und prozentualen Fehler.

16. Bestimmen Sie y' durch Differentiation folgender impliziter Funktionen:

a) $y^2 + 4x^3 - 5xy = 0,$ b) $x(\ln y + 1) = 0, \quad y > 0,$

c) $\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + y = 0, \quad y \neq 0,$ d) $y \cos y + x^2 y = 0,$

e) $\mathrm{e}^{\sin xy} - 1 = 0,$ f) $x^y - y^x = 0, \quad x, y > 0.$

17. Gegeben ist die Funktion $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ in impliziter Form.
a) Berechnen Sie den Tangentenanstieg im Punkt $P = (x, y)$.
b) Zeigen Sie, daß die Kurve im Punkt $P_0 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

18. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P = (2, y < 0)$ der Kurve $x^2 + xy + y^2 = 4$.

19. Man bestimme bei der Kurve

$$x^4(x - y) + 2x^2y(x + y) + y(x^2 + y^2) + c = 0$$

die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, daß die Kurve durch den Punkt $P_0(1; 1)$ geht und ermittle die Gleichung der Tangente in diesem Punkt.

20. Unter welchen Winkeln schneidet die in impliziter Form

$$F(x, y) = 2x^3 + 6y^3 - 24y + 6x = 0$$

gegebene Funktion die Koordinatenachsen?

21. Es sei $f(s, t)$ eine reelle differenzierbare Funktion. Man zeige, daß für $g(x, y) := f(x - y, y - x)$ gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

22. Berechnen Sie aus der van-der-Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

die Differentialquotienten $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ und $\dfrac{\partial V}{\partial T}$.

23. Für jede stetig differenzierbare Funktion $f(x, y, z) = 0$ gilt in jedem Punkt (x, y, z) mit $f_x \neq 0$, $f_y \neq 0$, $f_z \neq 0$ für die implizit erklärten Auflösungen

$$x = x(y, z), \quad z = z(x, y), \quad y = y(x, z)$$

die Beziehung

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

a) Man überprüfe diese Beziehung am Beispiel von $pV - RT = 0$.
b) Man zeige deren Richtigkeit im allgemeinen Fall.

24. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen $f(x, y)$ in Taylor-Polynome zweiter Ordnung um die entsprechende Punkte (x_0, y_0):
a) $f(x, y) = \sin(x - 2y), \qquad (x_0, y_0) = (\pi, \pi/4)$
b) $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2), \qquad (x_0, y_0) = (0, 0)$.

25. Bestimmen Sie die Höhenlinien sowie den Gradienten in jedem Punkt der folgenden Funktionen. Skizzieren Sie das Höhenliniendiagramm und den Gradienten in den Punkten $(0; 0)$ und $(1; 1)$, falls er dort definiert ist:

a) $u = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, b) $u = 3x - 2y$,

c) $u = x^2 + 4y^2$, d) $u = \dfrac{1}{x + y}$.

26. Bestimmen Sie den Gradienten in jedem Punkt des Definitionsbereiches (= *Gradientenfeld*) der folgenden Funktionen (*Skalarfelder*):

a) $u = x^2 + 4y^2 + 5z^2$, b) $u = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$,

c) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1$, d) $u = \dfrac{1}{x + y + z}$.

e) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2z.$

Zusatz: Lassen sich bei der betrachteten Aufgabe mit Vorteil ebene Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten einführen und wie lautet dann der Gradient?

27. Man bestimme die Richtung in welcher die durch $z = f(x, y)$ gegebene Fläche im Punkt $P = (x_0; y_0)$ am stärksten ansteigt. Welchen Winkel α[Grad] bildet diese Richtung mit der x-Achse und wie groß ist der Anstieg?

a) $z = x^3 - x^2y + 2(x - y); \quad P = (1; 1)$

b) $z = 2x^2 - 3xy + y^2 + (1 + \sqrt{3})y - \sqrt{3}; \quad P = (-1; 0)$

c) $z = 2x^2 - xy^2 + 15\ln(y^2 + 1) - 6\sqrt{y}\cos(2x - 3),\ P = \left(\dfrac{3}{2}; 3\right).$

28. Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen von drei Veränderlichen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$.
a) Zeigen Sie, daß gilt: $\mathrm{grad}(f \cdot g) = f \cdot \mathrm{grad} g + g \cdot \mathrm{grad} f$.
b) Zeigen Sie, daß $\mathrm{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$ ist, wenn $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist und $\vec{r} = (x, y, z)^T$.
c) Berechnen Sie $\mathrm{grad}(r^n)$ für $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

29. Die Funktion (Fläche) f habe in Polarkoordinaten die Gleichung $z = f(r, \varphi) = r^2 - 8\cos 2\varphi$.
a) Wie lauten die partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten x und y?
b) In welche Richtung geht das größte Gefälle der Fläche im Punkt $x = 1,\ y = 1$ und wie groß ist es?

30. Das elektrostatische Potential U eines Punktdipols im Ursprung ist am Ort $\vec{r} = (x, y, z)$ gegeben durch $U(\vec{r}) = \vec{\mu} \cdot \vec{r}/r^3$, wobei $\vec{\mu}$ das Dipolmoment ist und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$.
b) Es sei $\vec{\mu} = (15, 10, 20)^T$. Wie groß ist das elektrische Feld im Punkt $P(3, 0, 4)$?

31. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ über die Beziehung $\vec{E} = -\mathrm{grad}\, U$, in der U das elektrische Potential ist

a) für eine elektrische Ladung q, wobei gilt: $U = \dfrac{q}{r}$,
b) für einen elektrischen, punktförmigen Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{\mu}$, wobei gilt: $U = \dfrac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{r^3}$.
Anmerkung: Man benutze zur Berechnung des Gradienten Kugelkoordinaten.

32. Berechnen Sie die Rotation für folgende Vektorfelder $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$. Welche Vektorfelder sind konservativ? Was bedeutet das physikalisch?
a) $\vec{a} = (5xyz,\, x^2 + y^2,\, xz)^T$
b) $\vec{a} = (2x,\, 0,\, 0)^T$
c) $\vec{a} = (5x,\, 2y,\, 6z)^T$
d) $\vec{a} = (x^2 + y^2,\, xy,\, 0)^T$.

33. Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$:
a) $\vec{a} = (x^2 y,\, x^2 + zx + y,\, xy + y^2 + z^2)^T$
b) $\vec{a} = (x/y,\, xy,\, 0)^T \quad (y \neq 0)$
c) $\vec{a} = (x \sin(x + y),\, \mathrm{e}^z,\, \mathrm{e}^{x+y})^T$.

34. Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder unter Einführung von Kugelkoordinaten
a) $a_r = r^2, \quad a_\varphi = 0, \quad a_\vartheta = r$
b) $a_x = x, \quad a_y = y, \quad a_z = z$
c) $a_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad a_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad a_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

35. Bei einer Diffusion ist die Konzentration c des eindringenden Stoffes als Funktion des Ortes $c = c(x, y, z)$ gegeben. Aufgrund des Fickschen Gesetzes wird der Diffusionsstrom vom Gradienten der Konzentration bestimmt. Bestimmen Sie für folgende Konzentrationen c den Gradienten. Berechnen Sie die Divergenz der entsprechenden Gradientenfelder allgemein und im Punkt $(1, 1, 1)$:

$$\text{a) } c = xy + 2xy^2 + z^2, \quad \text{b) } c = x^2 + 4y^2 + 9z^2, \quad \text{c) } c = x + y + z.$$

36. Man weise die folgenden Beziehungen nach:
a) Das Gradientenfeld eines Skalarfeldes $u = u(x, y, z)$ ist wirbelfrei, d.h. rot grad$u = \vec{0}$.
b) Das Rotorfeld eines Vektorfeldes
$\vec{u} = (u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z))^T$ ist quellenfrei, d.h. div rot$\vec{u} = 0$.

4.3 Extremwertaufgaben

1. Bestimmen Sie die Lage und Art aller relativen Extrema der Funktion und gebe die zugehörigen Funktionswerte an

a) $z = \frac{1}{3}x^3 + 2xy - 5x + \frac{1}{2}y^2$

b) $z = \frac{1}{2}(x^2+1) - 2y(2x+7) + 3x + 9y^2$

c) $z = 2xy(x+y-6)$

d) $z = \mathrm{e}^{-x^2}(4y + x^2 - y^2)$

e) $z = (x^3 - 3x)(y+3) + y(y+6)$.

2. Gegeben seien drei Punkte $P_k = (x_k, y_k),\ k = 1, 2, 3$. Man berechne die Koordinaten (x, y) eines Punktes P so, daß $d = |PP_1|^2 + |PP_2|^2 + |PP_3|^2$ (= Quadrat der Entfernung zwischen P und P_k) minimal ist! (Nachweis des Minimums)

3. Ermitteln Sie alle relativen Extremwerte der Funktion $f(x, y) = 2xy - y^2$ unter der Nebenbedingung $6 + x - 2y = 0$. Überprüfen Sie durch "Abtasten" der Umgebung der "extremwertverdächtigen" Stellen, ob die Funktion dort tatsächlich einen Extrempunkt unter der angegebenen Nebenbedingung hat und welcher Art dieser ist!

4. Nach der Multiplikatorenregel von Lagrange bestimme man alle Punkte, die als Extremstellen für die gegebene Funktion unter den jeweiligen Nebenbedingungen in Frage kommen.

a) $z = x^2 + y^2$ mit $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 18 = 0$

b) $z = x^2 + y^2$ mit $x^3 + y^3 + 1 = 0$

c) $z = 3x^2 y$ mit $4x^2 + 9y^2 = 36$

d) $u = x + y + z$ mit $x + z = 1$ und $x^2 + y^2 = 4$.

5. Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy.$$

a) Wie lautet das vollständige Differential von f?
b) Bestimmen Sie Lage und Art der relativen Extrema von f.
c) Entwickeln Sie die Funktion f um den in b) berechneten Sattelpunkt in eine Taylorreihe. Geben Sie alle Glieder bis zur zweiten Ordnung an.

6. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

a) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ an.
b) Bestimmen Sie Lage und Art der relativen Extrema von f.

7. Es ist die folgende Funktion von 2 Variablen gegeben:

$$z = f(x,y) = 4 - (x^2 + y^2).$$

a) Skizzieren Sie die Höhenlinien.
b) Bestimmen die (relativen) Extrema der Funktion. (Nachweis!) Sind die ermittelten Punkte absolute Extrema?
c) Wie lauten die Extrema unter der Nebenbedingung $x + y = 1$? Überprüfen Sie, ob die Funktion an den "extremwertverdächtigen" Stellen tatsächlich einen Extremwert unter der angegebenen Nebenbedingung hat und welcher Art dieser ist.

8. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^3 + 4y^3$.
a) Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Extrema von f unter der Nebenbedingung $x + y = 6$.
b) Um welche Art von Extrema handelt es sich?

9. Einer Kugel vom Radius R ist ein gerader Kreiszylinder einzubeschreiben. Wie müssen dessen Radius r und *halbe* Höhe h gewählt werden, damit sein Volumen $V = 2\pi r^2 h$ möglichst groß wird. Verwenden Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.
Wieviel Prozent des Kugelvolumens nimmt der Kreiszylinder ein?

10. Ein quaderförmiger, geschlossener Behälter soll bei gegebenem Volumen V mit möglichst geringem Materialverbrauch hergestellt werden. Wie sind seine Kantenlängen zu wählen?

11. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$.
a) Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $(x-2)^2 + y^2 = 2$.

b) Skizzieren Sie folgende Höhenlinien von f in der rechten Halbebene (d.h. für $x \geq 0$): $f(x,y) = c$ für $c = -1; 0; 1; 4$.
Tragen Sie ferner die durch die Nebenbedingung definierte Kurve in Ihre Skizze ein und diskutieren Sie nun unter Zuhilfenahme dieses Höhenliniendiagramms die Art der stationären Stellen von f (auf die Nebenbedingungen bezogen).

12. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x$.
a) Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$. Was bedeutet diese Bedingung geometrisch?
b) Um welche Art von Extrema handelt es sich?
Hinweis: Man löse zunächst die Aufgabe *ohne* Nebenbedingung und betrachte nur die Lösungen, die der Nebenbedingung genügen. Danach untersuche man die Funktion auf dem Rand des betrachteten Bereiches, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

13. Die absoluten Extrema von $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - \frac{5}{2}y$ sind in den folgenden Dreiecken zu bestimmen:

a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x < 1 \text{ und } 0 < y < x + 1\}$,

b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2/3 \leq x < 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 3x + 2\}$.

14. Welche Abmessungen muß ein quaderförmiger Behälter mit einem Volumen von 32m^2 haben, der an einer Seite offen ist, damit seine Oberfläche möglichst klein ist?

15. Ein (ebenes) Viereck ist so zu konstruieren, daß sein Flächeninhalt bei gegebenen Seitenlängen möglichst groß ist.

16. Zeigen Sie, daß für die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden $y = a + bx$, die nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt wurden (vgl. Vorlesung), tatsächlich ein *Minimum* der Fehlerquadratsumme vorliegt.

17. Durch die Meßpunkte

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y_i	0,18	0,31	0,41	0,62	0,74	0,87	0,93	1,01	1,1	1,19

soll eine Ausgleichsgerade gelegt werden. Skizzieren Sie die Punktepaare, bestimmen Sie die Ausgleichsgerade (Koeffizienten mit 3 Dezimalen) und zeichnen Sie diese Gerade in die Skizze ein.

18. Bei der Messung zweier Merkmale x und y ergab sich folgende Wertetabelle:

x_i	-1	1	2	3	4
y_i	0,8	1,5	2,5	2,2	2,7

Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden. Skizzieren Sie die Meßpunkte und die erhaltene Regressionsgerade. Welche "Voraussage" für y ergibt sich daraus für $x = 5$?

19. Durch die Meßpunkte

x_i	2	4	6
y_i	2	3	7

soll eine Ausgleichskurve vom folgenden Typ gelegt werden:
a) $y = f(x) = a\,e^{bx}$
b) $y = g(x) = ax^b$.
Bestimmen Sie jeweils deren Koeffizienten. Welche der Ausgleichskurven kann als bessere Lösung angesehen werden (Begründung)?

20. Durch die Meßpunkte

x_i	0	1	2	3
y_i	1,2	2,6	6,4	21,9

soll eine Ausgleichskurve vom Typ $y = f(x) = a\,e^{bx}$ gelegt werden. Bestimmen Sie deren Koeffizienten. Skizzieren Sie die Meßpunkte und die berechnete Ausgleichskurve. Interpolieren bzw. extrapolieren Sie die Werte von y für $x = 1,5$ bzw. $x = 4$.

21. Bei der Messung zweier Merkmale x und y ergab sich folgende Wertetabelle:

x_i	1	2	3	5
y_i	1	1,5	4	13

Bestimmen Sie näherungsweise eine Ausgleichskure in der Form $y = f(x) = ax^b$ und interpolieren Sie den Wert für $x = 4$ (Genauigkeit der Koeffizienten: 1 Dezimale).

22. Für zwei Größen x, y ist bekannt, daß ihr Zusammenhang durch eine quadratische Funktion $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ beschrieben wird. Zur Ermittlung der unbekannten Koeffizienten A, B, C wurden Messungen durchgeführt, die folgende Wertetabelle ergaben:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	2	1,5	1,5	6	10

a) Leiten Sie allgemein nach der Methode der kleinsten Quadrate ein *lineares Gleichungssystem* für A, B, C her.
b) Bestimmen Sie aufgrund der obigen Wertetabelle die Lösung dieses

Gleichungssystem, d.h. die Koeffizienten (Genauigkeit: 1 Dezimale) der gesuchten Parabel.

23. Zur Ermittlung einer Meßkurve, von der man weiß, daß sie eine Gerade durch Ursprung sein muß, wurden folgende Meßwerte erhalten:

x_i	2	5	7	9
y_i	1	2	3	4,5

Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade.

24. Es soll die Dichte ρ einer Substanz ermittelt werden. Dazu wurden zu verschiedenen Volumen die zugehörigen Massen gemessen und folgende Tabelle erhalten:

m [g]	10	12	14	16	18	20
V [cm^3]	2,0	2,3	2,9	3,2	3,5	4,1

Mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimme man hieraus ρ (2 Dezimalen).

25. Für die Ansatzfunktion einer $2p$-periodischen Ansatzfunktion $P_m(x)$ (vgl. Vorlesung) berechne und zeichne man $P_1(x)$ sowie $P_2(x)$ für

x_i	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
y_i	2	1	2	0

.

4.4 Integration von Funktionen mehrerer Variabler

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale (skizzieren Sie dabei die entsprechenden Bereiche)

a) $$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}(x^2+y^2)\,dydx$$ b) $$\int_{x=0}^{2}\int_{y=x}^{2x} dydx,$$

c) $$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{x+y}\,dxdy,$$ d) $$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\pi x/2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)dydx,$$

e) $$\int_{y=1}^{2}\int_{x=0}^{y+1} x\ln y\,dxdy,$$ f) $$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(x^2\mathrm{e}^{x^3+y})\,dydx.$$

2. Es sei $(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq 0\}$. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man

$$\iint_{(A)} (x + y)\, dA.$$

3. Gegeben ist das Integral

$$\int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1-\frac{y}{2}} (xy + x^2 - y^2)\, dxdy.$$

a) Man berechne dessen Wert.
b) Man berechne das Integral nach Vertauschung die Integrationsreihenfolge.

4. Man berechne das Doppelintegral

$$\iint_{(A)} \mathrm{e}^{-(x+y)}\, dxdy$$

für das Rechteck $(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$.

5. Gegeben ist das Doppelintegral

$$\iint_{(A)} (1 + xy^2)\, dxdy$$

über dem Bereich $(A) \subset \mathbb{R}^2$, der von den 3 Geraden $y = x$, $y = -x$, $x = 1$ eingeschlossen wird.
Skizzieren Sie den Bereich (A) und berechnen Sie das Doppelintegral.

6. Berechnen Sie mittels Doppelintegral das Volumen des Körpers, der durch die folgenden Flächen begrenzt wird:

$$z = 0, \quad z = 1, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Um welche Art Körper handelt es sich?

7. Der Bereich (A) sei durch

$$y = x,\ y = 2x,\ x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 100,\ x, y \geq 0.$$

berandet. Man skizziere den Bereich (A) und berechne das Integral

$$\iint_{(A)} x \, dA.$$

8. Es ist das Volumen des Körpers gesucht, dessen Punkte (x, y, z) den folgenden Relationen genügen:

$$4 \leq x \leq 5, \quad 2 \leq y \leq \frac{x}{2}, \quad 0 \leq z \leq 2x - y + 2.$$

9. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten das Volumen des Körpers, der begrenzt wird von den Flächen:

$$z = x^2 y^2, \quad z = 0 \quad \text{mit} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } \quad y \leq 0.$$

10. Man berechne die Dreifachintegrale

a) $$\int_{x=0}^{1} \int_{y=-1}^{4} \int_{z=0}^{\pi} x^2 y \cdot \cos(yz) \, dz dy dx$$

b) $$\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{y^2} yz \cdot \sin x \, dz dy dx.$$

11. a) Bestimmen Sie das Doppelintegral für die Funktion $f(x, y) = 1 + xy$ über der abgeschlossenen Kreisscheibe
$(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
b) Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\iiint_{(V)} dx dy dz$$

über dem Bereich

$$(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1 + xy\}.$$

c) Interpretieren Sie beide Ergebnisse.

12. Man skizziere den Grundriß des gegebenen Körpers in einer geeigneten Koordinatenebene und berechne das Volumen des Körpers, wenn

er begrenzt wird von
a) den Flächen $y = \cos x,\ y = x + 1,\ x = \frac{\pi}{2},\ z = 0$ und $z = \sin x$
b) den Ebenen $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1,\ z = 0$ und der Fläche $z = xy$
c) den Ebenen $z = 0,\ x + y = 2,\ y + 2 = z$ und der Fläche $y^2 = x$
d) der Ebene $z = 0$, den Flächen $z = x^2 + 3,\ x^2 + y^2 = 2,\ x^2 + y^2 = 4$.

13. Gegeben ist der folgende Körper:

$$(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}.$$

a) Überzeugen Sie, sich durch eine Skizze, daß es sich dabei um eine Pyramide handelt.
b) Berechnen Sie deren Volumen V.
c) Ermitteln Sie den Schwerpunkt $S(x_S, y_S, z_S)$ des Körpers durch Berechnung des Integrals

$$x_S = \frac{1}{V} \int \underset{(V)}{\int} \int x dx dy dz$$

sowie der entsprechenden Integrale für y_S und z_S.

14. Man berechne das Linienintegral $\int\limits_C [y\, dx + (x^2 + xy)\, dy]$ entlang
a) der geraden Verbindung
b) der Parabel $y = x^2$
von den Punkten $A = (0; 0)$ nach $B = (2; 4)$ (Skizze!).

15. Man berechne das Linienintegral $\int\limits_C (xy\, dx + y^2\, dy)$ für folgende Kurven:
a) $x = \sin t,\ y = \cos t$ für $0 \leq t \leq \pi/2$ von den Punkten $A = (0; 1)$ nach $B = (1; 0)$
b) $x = 2t,\ y = \sqrt{1 - 4t^2}$ für $0 \leq t \leq 1/2$
c) die direkte Verbindungsstrecke von den Punkten $A = (0; 1)$ nach $B = (1; 0)$.

16. Man berechne das Linienintegral $\int\limits_C (\mathrm{e}^x \sin y\, dx + \mathrm{e}^x \cos y\, dy)$
a) entlang des Weges $x = \ln t,\ y = t, \quad 0 \leq t \leq \pi$.
b) Ist das Linienintegral wegunabhängig. Wenn ja, geben Sie das zugehörige Potential $V(x, y)$ an und berechnen Sie $\operatorname{grad} V$.

17. Gegeben ist das ebene Kraftfeld $\vec{F} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.
a) Man zeige, daß das Feld konservativ ist.

b) Man bestimme das Potential $V(x, y)$ des Feldes.
c) Man berechne die Arbeit

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C x\,dx + y\,dy$$

für einen *beliebigen* von $P_1 = (1;0)$ nach $P_2 = (3;5)$ führenden Verbindungsweg.

18. Gegeben ist das ebene Kraftfeld $\vec{F} = (x^2 + 2xy)\,\vec{e}_1 \;+\; (x^2 - 1)\,\vec{e}_2$.
a) Man zeige, daß das Feld konservativ ist.
b) Man bestimme das Potential $V(x, y)$ des Feldes.
c) Man berechne die verrichtete Arbeit bei der Verschiebung eines Massenpunktes von $P_1 = (0;0)$ nach $P_2 = (1;1)$ auf einem (*beliebigen*) Verbindungsweg.

19. Ein Massenpunkt bewege sich entlang der Kurve:
$x = \sin t,\ y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/2$
in dem ebenen Kraftfeld $\vec{F} = 2xy\,\vec{e}_1 \;+\; x^2\,\vec{e}_2$.
a) Skizzieren Sie den Weg.
b) Man berechne die verrichtete Arbeit entlang der gegebenen Kurve.
c) Man berechne die verrichtete Arbeit bei der Verschiebung eines Massenpunktes von $P_1 = (0;0)$ nach $P_2 = (1;1)$ auf einem (*beliebigen*) Verbindungsweg.
d) Ist das Feld konservativ?

20. Ein Teilchen soll vom Punkt $P = (1;0;0)$ zum Punkt $Q = (1;1;1)$ entlang einer Kurve C bewegt werden. Im Punkt (x, y, z) wirke dabei auf das Teilchen die Kraft $\vec{F}(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)^T = (x/r^3, y/r^3, z/r^3)^T$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Die dabei verrichtete Arbeit W ist gegeben durch

$$W = \int_C F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

a) Berechnen Sie die Arbeit W, falls das Teilchen entlang der Verbindungsgeraden C zwischen P und Q bewegt wird.
b) Berechnen Sie das Kurvenintegral bei einer achsenparallelen Bewegung von P und Q.
c) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{F}$. Diskutieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Resultate an a) und b).

21. Prüfen Sie, ob folgende Vektorfelder $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ konservativ sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Potentialfunktion.

a) $\vec{a} = (\mathrm{e}^{x+y+z},\, \mathrm{e}^{x+y+z},\, 1 + y + \mathrm{e}^{x+y+z})^T$

b) $\vec{a} = (2x \sin xy + x^2 y \cos xy,\, x^3\ \cos xy,\, 0)^T$.

5 Spezielle Kapitel

5.1 Unendliche Reihen

1. Berechnen Sie den Summenwert folgender geometrischer Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

c) $6+3+1,5+\ldots$

2. Bestimmen Sie den Summenwert nachstehender Reihen mit Hilfe von Partialbruchzerlegung:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(n+5)(n+6)}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3. Welchem allgemeinen Bildungsgesetz unterliegen die folgenden Reihen? Untersuchen Sie diese Reihen mit Hilfe des Quotientenkriteriums auf Konvergenz bzw. Divergenz:

a) $1+\frac{10}{1!}+\frac{100}{2!}+\frac{1000}{3!}+\ldots$, b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$.

c) $1+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 4}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{9\cdot 16}+\ldots$

4. Zeigen sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz bzw. Divergenz der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\frac{n-2}{n+2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^9}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{9}{10}\right)^{n}$.

5. Prüfen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden alternierenden Reihen mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+1}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1-\sqrt[n]{a})}$, $(a > 0)$, d) $\frac{1}{2}\ln(\ln 2) - \frac{1}{3}\ln(\ln 3) \pm \ldots$

6. Sind die folgenden Reihen absolut konvergent, konvergent bzw. divergent:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[3 + (-1)^{n+1}\right] \frac{1}{2^n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^3}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$, f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^n}$,

g) $1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \ldots$

7. Es sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in N$. Man zeige, daß dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergent.}$$

Man gebe ein Beispiel an, das zeigt, daß die Bedingung $a_n \geq 0$ für alle $n \in N$ nicht fortgelassen werden kann.

8. Man bestimme den Konvergenzradius und –bereich der Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^5 3^n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}(x-1)^n$,

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$, f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{5n+1}}{1+2^n}$.

9. Man bestimme das Bildungsgesetz für die Koeffizienten a_n der folgenden Potenzreihen und deren Konvergenzradius:

a) $(x+1) + \dfrac{(x+1)^2}{2^2} + \dfrac{2!(x+1)^3}{3^3} + \dfrac{3!(x+1)^4}{4^4} + \ldots$

b) $3x + (3x)^3 + (3x)^5 + \ldots$.

10. $f(x)$ sei in eine Potenzreihe entwickelbar und genüge der Gleichung $f(x) = (1-\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2})$. Man setze $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimme durch Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n.

11. Bestimmen Sie unter Verwendung bekannter Potenzreihen die Taylor-Reihen jeweils um den Punkt $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen. Diskutieren Sie deren Konvergenz!

a) $f(x) = \dfrac{1}{2-3x}$, b) $f(x) = -\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$, c) $f(x) = \sin(x^2)$,

d) $f(x) = \ln(1-2x) + 2x$, e) $f(x) = \ln\dfrac{1-ax}{1+ax}$, $a \in \mathbb{R}$,

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ (Partialbruchzerlegung!).

12. Geben Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen bis zum Glied x^n an, indem Sie die Potenzreihen der beiden Faktoren gliedweise multiplizieren. In welchem Bereich konvergieren diese Reihen?

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \cos x$, $n = 4$; b) $f(x) = \dfrac{\sinh x}{1+x^2}$, $n = 6$

13. Das folgende Integral läßt sich in geschlossener Form *nicht* bestimmen. Berechnen Sie den Wert des Integrals durch Potenzreihenentwicklung und anschließender gliedweiser Integration auf *vier Dezimalstellen* genau:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

14. Berechnen Sie durch Potenzreihenentwicklung des Integranden näherungsweise die folgenden Integrale (Genauigkeit 4 Dezimalen):

a) $\displaystyle\int_0^{0,4} \sqrt{1+x^4}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{0,4} \frac{dx}{\cos x},$

c) $\displaystyle\int_0^{1} x\exp(-x^3)\,dx.$

15. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{\sinh x}{x}$.
a) Bestimmen Sie deren Taylor-Reihe bis zum Glied x^6 und geben Sie den Konvergenzbereich an.
b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Darstellung das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sinh x}{x}\,dx.$$

16. Geben Sie die Fourier-Reihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen $f(x)$ an. Skizzieren Sie den Graph von $f(x)$ sowie die ersten beiden Näherungen:

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < 2\pi \\ \pi & \text{für } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = x^2 \quad \text{für} \quad -\pi \le x < \pi$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = -\pi \end{cases}$

17. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(2\pi - x),\ 0 \le x \le 2\pi$. Skizzieren Sie diese Funktion sowie ihre periodische Fortsetzung und bestimmen Sie deren Fourier-Reihe.

18. Man skizziere die periodische Fortsetzung der folgenden Funktionen und bestimme deren Fourier-Reihe:

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1+x & \text{für } -1 \le x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$

19. Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = -\frac{h}{T}t + h, \quad t \in [0, T].$$

Man skizziere deren periodische Fortsetzung und bestimme die Fourier-Reihe.

20. Bei (einfachen) Aufgaben zur Wärmeleitung bzw. Diffusion ist die Fourier-Zerlegung der Funktion

$$f(x) = -T_0 \, \frac{x}{\pi}, \quad x \in [0, \pi] \qquad (T_0 = \text{const})$$

erforderlich. Geben Sie die entsprechende Fourier-Reihe an!

5.2 Komplexe Zahlen

1. Man berechne

a) $\dfrac{2-4\mathrm{i}}{5+7\mathrm{i}}$, b) $\dfrac{(3+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5+\mathrm{i}}$, c) i^{27},

d) $(1+\mathrm{i})^4$, e) $\mathrm{Re}\dfrac{1}{1-(2+\mathrm{i})^2}$, f) $\mathrm{Im}\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^3}$.

2. Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $z^2 - 8z + t^2 = 0$ 2 verschiedene reelle, 1 reelle, 2 konjugiert-komplexe Lösungen? Wie lauten sie?

3. Welche Zahlen der Gaußschen Zahlenebene genügen jeweils folgenden Bedingungen. Fertigen Sie eine Skizze an!

a) $|z-3-\mathrm{i}| = 1$, b) $|z-\mathrm{i}| = 2$ und $|z-1-\mathrm{i}| > 1$.

4. Für welche Punkte $z = x + iy$ der Gaußschen Zahlenebene gilt:

a) $0 < \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(z) < |z|$, b) $\dfrac{\overline{z}}{z} = 1$ c) $|z+1| \le |z-1|$,

d) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}} = 1$, e) $|z| + \mathrm{Re}(z) = 1$, f) $\mathrm{Re}(z^2) = c \; (c \in R)$.

5. Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2(1+\mathrm{i}) + 4x(\mathrm{i}-1) + 4(\mathrm{i}+1)$
a) reell b) rein imaginär?

6. Man zeige, daß gilt: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

7. Man berechne die Normalform von a) $z_1 z_2^2$ und b) $\dfrac{z_1^3}{z_2}$ mit

$$z_1 = 4\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi \mathrm{i}}, \quad z_2 = 8\mathrm{e}^{\frac{7}{8}\pi \mathrm{i}}.$$

8. Man berechne

a) $(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^{15}$, b) $(1-\mathrm{i})^{21}$, c) $(1+\mathrm{i})^{30}$.

9. Berechnen Sie

a) $\sqrt{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$, b) $\sqrt[3]{3-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$, c) $\sqrt[5]{-1}$.

10. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der folgenden Gleichungen. Skizzieren Sie die Lösungen.

a) $z^3 = -1$, b) $z^5 = 1$, c) $z^4 = 1 + \mathrm{i}$.

11. Man bestimme sämtliche Lösungen der Gleichungen
a) $x^3 - x^2 + 4x = 4$
b) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$
c) $x^6 + 2x^3 + 2 = 0$
d) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
e) $x^6 + 3x^3 - 4 = 0$.

12. Man bestimme die reelle Lösungsmenge der Ungleichungen
a) $x^3 - x^2 + 4x \geq 4$
b) $x^4 + 4x^2 + 3 > 0$
c) $x^6 + 2x^3 + 2 > 0$
d) $x^4 + 3x^2 - 4 \leq 0$
e) $x^6 + 3x^3 - 4 < 0$.

13. Welche quadratische Gleichung (mit dem Koeffizienten 1 bei x^2) hat die Lösungen $x_1 = 3 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = 3 - 2\mathrm{i}$?

14. Gegeben sei das Polynom $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 2x - 24$, das eine Nullstelle bei $x = \mathrm{i}$ besitzt.

a) Geben Sie die zugehörige zweite Nullstelle von $P(x)$ an.
b) Bestimmen Sie die restlichen Nullstellen durch Division mit dem Hornerschema.
c) Schreiben Sie $P(x)$ als Produkt von Linearfaktoren.

15. Man prüfe, ob $1+\mathrm{i}$ eine Lösung der folgenden Gleichungen ist und gebe gegebenenfalls die anderen Lösungen dieser Gleichungen an:
a) $z^4 - 5z^2 + 10z - 6 = 0$,
b) $z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 = 0$,
c) $z^3 - 4z^2 + (6+\mathrm{i})z - 3 - \mathrm{i} = 0$.

16. Der Wechselstromwiderstand eines elektrischen Schaltkreises läßt sich mit Hilfe von komplexen Zahlen berechnen. Wird der Ohmsche Widerstand R_Ω als reelle Zahl, der kapazitive Widerstand R_C als negative imaginäre Zahl und der induktive Widerstand R_L als positive imaginäre Zahl angegeben, so ist der resultierende Widerstand dieses Schaltkreises (bei Serienschaltung) die Summe aus den Einzelwiderständen.
Berechnen Sie den Betrag des Gesamtwiderstandes R, wenn $R_\Omega = 100\Omega$, $R_C = -800\Omega$, $R_L = 1000\Omega$.

5.3 Anwendung komplexer Zahlen

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Man bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben ist die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x^2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix.
b) Wie lauten die zugehörigen normierten Eigenvektoren? Sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal?
c) Für welche Werte $x \geq 0$ kann aus den Eigenvektoren von A keine Basis des $\mathbb{R}^2$ gebildet werden?

4. Gegeben ist Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, daß $\vec{x}_1 = (1, -1, 0)^T$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1?
b) Berechnen Sie einen normierten Eigenvektor $\vec{x}_1^{\,0}$ in Richtung $\vec{x}_1$.
c) A hat noch einen Eigenwert $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Wie lautet er?
d) Bestimmen Sie einen normierten Eigenvektor $\vec{x}_2^{\,0}$ zum Eigenwert λ_2.
e) A ist eine symmetrische Matrix und besitzt daher ein orthonormiertes System von Eigenvektoren $\{\, \vec{x}_1^{\,0}, \vec{x}_2^{\,0}, \vec{x}_3^{\,0}\}$. Berechnen Sie $\vec{x}_3^{\,0}$ mit Hilfe des Vektorproduktes aus $\vec{x}_1^{\,0}$ und $\vec{x}_2^{\,0}$.
f) Zu welchem Eigenwert gehört $\vec{x}_3^{\,0}$?
g) Geben Sie mit Hilfe der bisherigen Resultate eine orthogonale Matrix P an, so daß $P^T AP$ eine Diagonalmatrix ist. Machen Sie die Probe!

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix M (*Hückel-Problem für das Allyl-Radikal*):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie anhand dieses Beispiels nach, daß für eine eine n-reihige reell-symmetrische Matrix gilt:
1) Alle n Eigenwerte sind reell.
2) Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal.
3) Die zugehörigen Eigenvektoren sind linear unabhängig.

6. Im Rahmen der Hückel-Theorie entsprechen den Energien der π-Molekülorbitale des Cyclobutadiens die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von M.
b) Geben Sie die zugehörigen Eigenvektoren an.
c) Bestimmen Sie ein orthonormales System von Eigenvektoren.

7. Für den Realteil ε' und den Imaginärteil ε'' der Dieelektrizitätskonstante gilt im einfachsten Fall

$$\varepsilon' = \varepsilon_u + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_u)\,\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

Dabei sind $\varepsilon_u, \varepsilon_r$ und τ Konstanten, ω ist die variable Meßfrequenz. Zeigen Sie, daß man bei der Elimination von ω auf die Gleichung

$$\left(\varepsilon' - \frac{\varepsilon_r + \varepsilon_u}{2}\right)^2 + \varepsilon''^2 = \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{2}\right)^2$$

kommt (*Cole-Cole-Diagramm*). Durch was für eine Kurve wird ε'' als Funktion von ε' wiedergegeben?

8. Geben Sie die Fourier-Reihe in komplexer Form von folgenden Funktionen an:
a) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|},\ -\pi \le x < \pi$ und $f(x + 2k\pi) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$
b) $f(x) = \mathrm{e}^{|x|},\ -1 \le x < 1$ und $f(x + 2k) = f(x), \forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$.

6 Differentialgleichungen

6.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Die Abkühlung eines Körpers in bewegter Luft ist proportional zu der Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur des Körpers und der Temperatur der umgebenden Luft. Wir bezeichnen die Temperatur des Körpers zur Zeit t mit $T = T(t)$, die Temperatur der umgebenden Luft mit T_L. Leiten Sie daraus die folgende Differentialgleichung des Abkühlungsprozesses her:

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_L).$$

2. Ein Pendel unterliege der periodischen Beschleunigung $a(t) = -5\cos t$. Man bestimme die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v = v(t)$ sowie die Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ für die Anfangswerte $s(0) = 5,\ v(0) = 0$.

3. Lösen Sie mittels Integration die Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) = c = \text{const}, \quad x \in [0, l]$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = y(l) = 0; \quad y'(0) = y'(l) = 0.$$

4. Man beschreibe folgende Kurvenscharen (C Scharparameter) und ermittle jeweils eine Differentialgleichung dafür:

a) $x^2 + y^2 = C^2$, b) $x^2 + y^2 - 1 + Cx = 0$.

5. Man ermittle die Differentialgleichung der Schar $(x + C)^2 + C^2 = y$ (Beschreibung!) und zeige, daß $y = \frac{x^2}{2}$ eine singuläre Lösung ist.

6. Man stelle eine Differentialgleichung auf für alle Parabeln durch 0, deren Achsen parallel zur y-Achse sind.

7. Man zeichne mittels der Isoklinen für $k = 0{,}1{,}4{,}9$ das Richtungsfeld der Differe ntialgleichung $y' = x^2 + y^2$.
Man skizziere eine Lösungskurve durch (0;0).

8. Bestimmen Sie die Lösung der exakten Differentialgleichung

$$(2x + 3\cos y)\, dx + (2y - 3x\, \sin y)\, dy = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = \pi/2.$$

9. Bestimmen Sie die Konstante a so, daß die Differentialgleichung

$$\left(1+\frac{ax}{y^2}\right)y'-\frac{1}{y}=0$$

exakt wird und lösen Sie die entsprechende Differentialgleichung für die Anfangsbedingung $y(0)=1$.

10. Gegeben ist die Differentialgleichung $y'=\sqrt{y}$, $y\geq 0$.
a) Lösen Sie die Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen.
b) Skizzieren Sie die Isoklinen zum Richtungsfeld und einige typische Lösungen der Differentialgleichung.
c) Diskutieren Sie damit das Anfangswertproblem $y(x_0)=y_0$ für $y_0>0$ bzw. $y_0=0$.

11. Durch die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$m\frac{dv}{dt}+kv=mg$$

wird die Sinkgeschwindigkeit v eines Teilchens der Masse m in einer Flüssigkeit beschrieben (k: Reibungsfaktor; g: Erdbeschleunigung).
a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $v=v(t)$ durch Trennung der Variablen.
b) Wie lautet die spezielle Lösung für den Anfangswert $v(0)=v_0$?
c) Welche Geschwindigkeit v_{max} kann das Teilchen maximal erreichen?

12. Wir betrachten die folgende chemische Reaktion: Ein Atom vom Typ A vereinige sich mit einem Atom vom Typ B zu einem Molekül vom Typ AB: $A+B\to AB$. Die Anzahl der Atome vom Typ A bzw. B betrage zu Beginn der Reaktion (d.h. zur Zeit $t=0$) a bzw. b. Nach der Zeit t seien $x=x(t)$ Moleküle AB entstanden. Dann läßt sich die chemische Reaktion durch die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$$

beschreiben (k : "Geschwindigkeitskonstante").
a) Lösen Sie diese Differentialgleichung für $a\neq b$ und den Anfangswert $x(0)=0$.
b) Wann kommt die Reaktion zum Stillstand (Annahme: $a>b$)?

13. Für eine vollständig verlaufende Reaktion dritter Ordnung gilt die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)(c-x)$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.
a) Man löse dieses Anfangswertproblem für $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. (Die Lösung kann als Funktion $t = f(x)$ angegeben werden.)
b) Man bestimme die Halbwertzeit, bei der $x = 0,5a$ ist.

14. Der Zerfall von N_2O unter dem Einfluß eines Platinkatalysators verläuft nach der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{1+bx}(a-x)$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Dabei sind a die Konzentration von N_2O zum Zeitpunkt $t = 0$ und b eine Konstante.
a) Lösen Sie dieses Anfangswertproblem. (Die Lösung kann als Funktion $t = f(x)$ angegeben werden.)
b) Man bestimme die Halbwertzeit, bei der $x = 0,5a$ ist.

15. Folgender Ausdruck entspricht formal dem Ansatz für die Reaktionsgeschwindigkeit einer unvollständig ablaufenden Reaktion

$$\frac{dx}{dt} = 3(2-x)(1-x) - (1+x)(2+x).$$

a) Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung unter der Anfangsbedingnung $x(0) = 0$.
b) Für welchen Wert der Umsatzvariablen x ändert sich die Umsatzvariable nicht mehr mit der Zeit?

16. Der reaktionskinetische Ansatz für eine Reaktion 1. Ordnung mit Rückreaktion lautet:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a-x) - k_2 x.$$

a) Lösen Sie die Differentialgleichung unter der Annahme, daß $k_1 = k_2 = 100\ \mathrm{s}^{-1}$ und der Anfangskonzentration $a = 1$ mol/l. Als Anfangsbedingung gilt, daß zur Zeit $t = 0$ auch $x = 0$ ist.
b) Wie groß ist der Umsatz x nach 0,005 s?
c) Wie groß ist er nach 0,01 s?
d) Wie groß ist er nach 1 s?

17. Lösen Sie die Differentialgleichung für den Abkühlungsprozeß (vgl. Aufgabe 1) unter der Anfangsbedingung $T(0) = T_0$ $(T_0 > T_L)$. Gegen welchen Endwert strebt die Körpertemperatur?

18. In einen Kühlschrank mit der Temperatur $T_L = 5°C$ wurde eine Flasche Bier mit der Zimmertemperatur $T_0 = 20°C$ gestellt. Nach 5 Minuten hatte das Bier eine Temperatur von 18°C (= *Annahme* — für exaktes Ergebnis selbst messen!) Wie lange dauert es bis das Bier eine Temperatur von 8°C besitzt?

19. Das menschliche Lernen bzw. Vergessen läßt sich durch ein Modell beschreiben, aus dem sich die folgende Diffentialgleichung ergibt:

$$\dot{p}(t) = -\lambda(p(t) - a).$$

Dabei bezeichnen $p(t)$ den Wissensstand zum Zeitpunkt $t \geq 0$, λ und a vom jeweiligen Individuum abhängige Konstanten (λ charakterisiert die Schnelligkeit des Lernens bzw. Vergessens, a das maximal aufnehmbare Wissens beim Lernen bzw. das Wissen, das nie vergessen wird). Entsprechend lautet die Anfangsbedingung beim Lernen: $p(0) = 0$ bzw. beim Vergessen: $p(0) = 100$ [%].
Lösen Sie die beiden Anfangswertprobleme, skizzieren Sie die Lösungskurven und interpretieren Sie den Kurvenverlauf!

20. Die *logistische Funktion* $p(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung einer (biologischen oder ökonomischen) Population mit beschränktem Lebensraum. Sie genügt folgender Differentialgleichung:

$$\dot{p}(t) = p(t) \cdot (a - bp(t)), \qquad (a, b > 0).$$

a) Man bestimme $p(t)$ als Lösung dieser Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $p(t_0) = p_0$.
b) Wie hoch ist die Grenzpopulation

$$N = \lim_{t \to \infty} p(t)?$$

21. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung:

a) $x^2\, y' = y^2$, b) $y' = (1 - y)^2$,

c) $y' \cdot \sin y = -x$, d) $\cos x\, y' = \sin x\, y^2$.

22. Lösen Sie die folgende Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Variation der Konstanten. Wie lautet jeweils die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung $y(\pi) = 1$?

a) $y' + 2y = \cos x$, b) $y' + 2y = x \cos x$.

23. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den entsprechenden Anfangsbedingungen:

a) $y' + xy = 4x, \quad y(0) = 0$

b) $y' + \dfrac{y}{1+x} = \mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 1.$

24. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

a) $y' = (x + y + 1)^2, \qquad$ b) $y' = \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{x}\right).$

25. Ein freihängendes, homogenes, biegeweiches Seil hängt durch gemäß der Differentialgleichung

$$ay'' = \sqrt{1 + (y')^2}, \qquad (a = \text{const} > 0).$$

Man löse diese Differentialgleichung!
Hinweis: Substitution $u = y'$.

26. Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen $y = y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Wie lautet jeweils die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung $y(\pi) = 1$?
a) $\cos(x)\, y' = \dfrac{\sin x}{y}$
b) $y' + 2\dfrac{y}{x} = \cos x.$

27. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$y'' + y' - 2y = 3\sin 2x.$$

28. Lösen Sie die Schwingungsgleichung
a) der freien, ungedämpften Schwingung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx, \quad (D = \text{const} > 0)$$

b) der freien, gedämpften Schwingung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + Dx = 0, \quad (k,\, D > 0, \quad k^2 - 4mD < 0).$$

29. Ein Körper der Masse m fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ aus der Ruhelage $x(0) = 0$ in einem Medium, dessen Reibungswiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit $\dot{x}$ ist.
a) Lösen Sie die zugehörige Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = mg - \beta\dot{x}^2.$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Differentialgleichung mit der Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ her.
b) Diskutieren Sie für große Zeiten t den Ort $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$.
c) Nach welcher Zeit τ hat der Körper die Höhe h durchfallen?

30. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:
a) $y' - 3y = x \cdot \mathrm{e}^x, \quad y(1) = 0$
b) $y' - 4y = 5\sin x, \quad y(0) = 0$
c) $y' + 2y/x = x^3, \quad y(1) = 0$
d) $y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y(3\pi/2) = 3\pi/2$
e) $y'' - 2y' + 2y = 2, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
f) $y'' + 4y = -2\sin(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
g) $y'' + 6y' + 10y = \cos x, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 4$
h) $y'' + 2y' + 3y = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
i) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
j) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{2x} \cos 3x, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

31. Man gebe die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Hinweis: Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $n > 2$ werden genauso behandelt wie im Fall $n = 2$, d.h. es ist die zugehörige charakteristische Gleichung zu lösen.

32. Man bestimme die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$f'' = -f \quad \text{und} \quad f(0) = f'(0) = 1.$$

Man ermittle die Lösung dieses Anfangswertproblem auch auf eine andere Weise und vergleiche die Ergebnisse!

33. Man zeige, daß die folgende Reihe im Konvergenzintervall

$$y(x) = 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + - \ldots$$

die Differentialgleichung $y'' + xy = 0$ erfüllt.
Wo konvergiert die Reihe?

34. Gegeben ist die *Besselfunktion* (= Mittelwert einer frequenzmodulierten Schwingung in Abhängigkeit des Frequenzhubes x)

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta)\, d\theta.$$

a) Man gebe die Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ samt Konvergenzbereich für diese Funktion an.
b) Wieviele Summanden sind nötig, um $J_0(1)$ auf vier Dezimalstellen nach dem Komma genau zu bestimmen? Berechnen Sie $J_0(1)$ in dieser Genauigkeit.
c) Man bestätige: $J_0(x)$ genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0.$$

35. Jemand hat sich Tee in einer Kanne gebrüht und möchte den Tee mit einer ihm angenehmen Temperatur nach der Zeit t_1 trinken. Zu diesem Zweck füllt er eine halbe Tasse mit Tee (Temperatur T_h) auf, den Rest will er mit Wasser (Zimmertemperatur T_0) auffüllen. Ist der gesamte Tasseninhalt kälter, wenn er das Wasser auffüllt:
a) zeitgleich mit dem Tee *oder*
b) zum Zeitpunkt t_1 des gewünschten Trinkens?
Anmerkung: Die Durchmischung sei jeweils als momentan angenommen, der Wärmeaustausch mit der Tasse vernachlässigt. Man benutze die Differentialgleichung für Abkühlungsprozesse (vgl. Aufgabe 1).

6.2 Ausblick

1. Ermitteln Sie die Funktionen $z(x, y)$, die folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - \frac{1}{y^2}.$$

2. Gegeben ist das System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -3x + 2y\\ \dot{y}(t) &= \ \ 2x - 3y.\end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das System in Matrixform $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$ mit $\vec{z} = (x, y)^T$.
b) Machen Sie in Analogie zur Differentialgleichung $\dot{y} = ay$ mit der Lösung $y(t) = b\,\mathrm{e}^{rt}$ den Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{b}\,\mathrm{e}^{rt}$ mit $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie $\vec{b}$ und r so, daß das System von Differentialgleichungen erfüllt wird.
c) Wie lautet die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems?
d) Ermitteln Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.

3. Ein System von Reaktionsgleichungen wird durch das folgende Differentialgleichungssystem erster Ordnung beschrieben:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -(k_1 + k_2)x + k_1 y + p\\ \dot{y}(t) &= k_1 x - (k_1 + k_2)y.\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentrationen $x(t)$ und $y(t)$ für folgende spezielle Zahlenwerte: $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $p = 5$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 2$ und $y(0) = 0$.
b) Diskutieren und skizzieren Sie die erhaltenen Lösungen $x(t)$ und $y(t)$.

4. Zeigen Sie, daß die Funktion $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$ der Differentialgleichung

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

genügt.

5. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = y \cdot u.$$

6. Man zeige, die folgende Eigenwertwertaufgabe für die Funktion $f = f(x)$, $x \in [0, \pi]$

$$f'' - \frac{k^2}{a^2} f = 0, \quad f(0) = f(\pi) = 0, \quad (a > 0)$$

hat für die Parameter 1) $k > 0$ bzw. 2) $k = 0$ nur die triviale Lösung $f = f(x) \equiv 0$.

7. Man löse mit der Fourierschen Methode die folgende Wärmeleitungsaufgabe für die Temperatur $u = u(x,t)$ in einem (eindimensionalen) Stab der Länge 1 mit isoliertem linken Stabende und einer gemischten Randbedingung am rechten Stabende bei gegebener konstanter Anfangstemperatur T_0:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \qquad \text{wobei}$$

$$u(x,0) = T_0$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u_x(1,t) + \sigma u(1,t) = 0, \quad (\sigma > 0).$$

Hinweise: 1) Man zeige zunächst, daß der Parameter K aus dem Fourier-Ansatz in der Gleichung $f'' - Kf = 0$ mit den entsprechenden Randbedingungen negativ sein muß.
2) Wenn man $K = -k^2$ setzt, erhält man für $k > 0$ eine Bestimmungsgleichung (die sogenannte *Eigenwertgleichung*), die unendlich viele Lösungen besitzt. Die zugehörigen *Eigen*funktionen $f_j(x)$ können mittels der Beziehung

$$\int_0^1 [f_j(x)]^2\, dx = 1$$

normiert werden.
3) Die normierten Eigenfunktionen bilden ein orthonormiertes Funktionensystem, nach dem die Anfangstemperatur T_0 in eine Fourier-Reihe zerlegt werden kann. Daraus lassen sich die Konstanten in den Lösungen $g_j(t)$ der Gleichungen $\dot{g} + k_j^2 g = 0,\ j = 1, \ldots,$ festlegen.

A Literatur

Formelsammlungen

- Göhler, W.: Höhere Mathematik, Verlag Harri Deutsch Frankfurt/M.
- Bronstein/ Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik (Hauptband), Verlag Harri Deutsch Frankfurt/M.

Lehrbücher und Aufgabensammlungen

- Papula, L.: Mathematik für Ingenieure, Band 1 – 2, Vieweg Braunschweig.
- Richter, M.: Grundwissen. Mathematik für Ingenieure, B.G. Teubner Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden.
- Fetzer/ Fränkel: Mathematik. Lehrbuch für Fachhochschulen, Band 1 und 2, VDI-Verlag Düsseldorf.
- Rösch: Mathematik für Chemiker, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Stingl, P.: Mathematik für Fachhochschulen, Hanser München.
- Fuhrmann/ Zachmann: Übungsaufgaben zur Mathematik für Chemiker, VCH Verlagsgesellschaft Weinheim.
- Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und sonstige anwendungsorientierte Berufe (MINÖA), Übungsbände:
  - Wenzel/ Heinrich: Übungsaufgaben zur Analysis 1
  - Wenzel/ Heinrich: Übungsaufgaben zur Analysis 2

Ergänzung und Vertiefung

- Meyberg / Vachenauer: Höhere Mathematik Band 1 und 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

– Burg/ Haff/ Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure,
Band I – IV, B. G. Teubner Stuttgart.
– Meinhold/ Wagner: Partielle Differentialgleichungen
(MINÖA Band 8).
– Preuß / Kirchner: Partielle Differentialgleichungen, Fachbuchverlag
Leipzig.
– Opfer, G.: Numerische Mathematik für Anfänger,
Verlag Vieweg.

B Ausgewählte Lösungen

Kapitel 3

3.1 2. b) $X = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. a) Zusammenhang zwischen 8), 9) bzw. 10), 11); gleich: 2), 4), 5)

   b) 10) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -8 & 8 & -8 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

6. c) 28 d) 20

7. a) $L = \{-1, -7\}$ b) $x = 2$ c) $x = -2$

8. $L = \{4, \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}\}$

9. $r^2 \sin\alpha$

11. $\vec{r} = (1520, 2110, 1720)^T$

12. $\vec{r} = (18.300, 17.000, 17.800, 13.200)^T$

13. $\vec{t} = (36.800, 36.700, 60.900, 33.200, 41.000)^T$

14. $\vec{r} = (24.200, 12.100, 15.700, 13.400)^T$

15. ja: a), d), f); mit zusätzlicher Bedingung: c)

3.2 1. a) Lösung mit 1 Parameter b) $\vec{x} = (1; -1; -3; 2)^T$

2. a) b) Lösung mit 1 Parameter c) $\vec{x} = \vec{0}$

4. b) $\vec{x} = (-12,5; 3,5; 7,5; 2,5)^T$

5. Lösung mit 3 Parametern

6. b) $x_1 = 7,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{5}{3}$ c) $x_1 = \frac{7}{2},\ x_2 = -4,\ x_3 = \frac{10}{3}$

   d) $x_1 = \frac{11}{2},\ x_2 = -2,\ x_3 = 1$

7. $c = -5$, Lösung mit 1 Parameter

8. a) $t \in \mathbb{R} \setminus \{3, -\frac{3}{2}\}$ b) $t = 3$ c) $t = -\frac{3}{2}$

   d) $\vec{x} = (-0,7; 1; 0,4)^T$ e) Lösung mit 1 Parameter

9. a) α) $a \neq -1,\ b \in \mathbb{R}$ β) $a = -1,\ b \neq 2$ γ) $a = -1,\ b = 2$

   b) $\vec{x} = (3; -1; -3)^T$ c) Lösung mit 1 Parameter

10. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$

11. a) keine Lösung b) 1 Parameter c) 2 Parameter

    d) eindeutige Lösung

12. a) $a = 6,\ b = 2,\ c = d = 5,\ e = f = 2,\ g = 3$

    b) $a = 3,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 1$

13. a) $u = 3,\ v = 2,\ w = 5,\ x = 4,\ y = 3$

    b) $u = 4,\ v = 2,\ w = 2,\ x = 6,\ y = 2,\ z = 1$

3.2 14. a) 2 Parameter b) $W = \rho v^2 O$

15. $x_1 = 10,\ x_2 = 15,\ x_3 = 20$

16. $x_1 = 3480,\ x_2 = 1080,\ x_3 = 680,\ x_4 = 100,\ x_5 = 870,\ x_6 = 190$

17. c) $x_1 = 18.285,71,\ x_2 = 4.642,86,\ x_3 = 5357,14$
$x_4 = 1.214,29,\ x_5 = 1314,29$

18. b) $x_1 = 11250,\ x_2 = 12700,\ x_3 = 1250,\ x_4 = 850,\ x_5 = 1500$

19. b) $x_1 = x_2 = 14.600,\ x_3 = 2.200,\ x_4 = 23.200$

20. 4 Möglichkeiten

21. $x_1 = -4,24,\ x_2 = 0,42,\ x_3 = 3,94$

22. a) $x = 0,\ y = 1$ c) $x = 2,\ y = -2$

23. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

25. a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

26. a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{10}{3} & -\frac{11}{6} \\ -4 & 1 & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

27. a) ja c) $\begin{pmatrix} 49 & 38 & -5 & -13 \\ 20 & 17 & -1 & -6 \\ -5 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

28. b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -2 \\ -9 & 17 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

30. $e_1 = 280,\ e_2 = 200$

3.3 1. c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12,990,\ |\vec{a} \times \vec{b}| = 7,5,\ |\vec{c}| = 7,745$

2. $\vec{F} = (-200; -175; 10)^T\,\mathrm{N}$

3. $|\vec{F}_R| = 217,926\,\mathrm{N},\ \angle(\vec{e}_1, \vec{F}_R) = 66,27^\circ$

5. $t = 6$

6. a) $\vec{b} = -\vec{a}_1 + \vec{a}_3$ b) $\vec{b} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$
c) $\vec{b} = \frac{17}{7}\vec{a}_1 - \frac{12}{7}\vec{a}_2 - \frac{11}{7}\vec{a}_3$ d) $\vec{b} = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

3.3 7. $|\vec{a}| = 12,32,\ |\vec{b}| = 10,05,\ \angle(\vec{a},\vec{b}) = 82,58°,$
$\alpha = 35,80°,\ \beta = 71,07°,\ \gamma = 60,88°$

8. a) $97,66°$, b) $\vec{a}_b = -\frac{2}{25}(4;0;3)^T$ c) $61,71°$
9. a) 6 b) $(-4;-1;7)^T$ c) $(-1;-28;11)^T$
d) 37 e) $(-19;13;-9)^T$
11. a) $W = 13\,\mathrm{Nm},\ \alpha = 78,71°$ b) $33,675\,\mathrm{m}^2$
12. $W = 110\,\mathrm{Nm},\ \alpha = 57,49°$
13. a) $c = \sqrt{17},\ b = \sqrt{29},\ a = \sqrt{20},$
$\alpha = 54,16°,\ \beta = 77,47°,\ \gamma = 48,37°,\ F = 9,0$
b) $c = \sqrt{5},\ b = \sqrt{21},\ a = \sqrt{40},$
$\alpha = 133,09°,\ \beta = 31,95°,\ \gamma = 14,96°,\ F = 3,742$
14. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{21}$
15. $48,888$
16. 61
17. $\lambda = -\frac{43}{31}$
18. a) $\lambda = -\frac{4}{9}$, c) $\varphi = 96,04°$
20. b) $|H_2H_4| = \sqrt{\frac{8}{3}},\ \angle(\text{H-C-H}) = 109,47°,\ \angle(\text{H-H-H}) = 60°$
c) $L = (0,0,-s)$
21. $1,792$
23. $a = 5,\ b = 3$
24. $y = 3$ und $y = \frac{24}{7}x + \frac{45}{7}$
25. $d = 2,858$
26. $d = 5,071$
27. $\frac{7}{9}$
28. Schnitt in Gerade; $\alpha = 71,88°$
29. a) $\lambda = 3$ c) $58,52°$
30. a) $a = 2,\ b \neq -2$ b) $a = 2,\ b = -2$
c) $(-3, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3})$
31. (1;2;3)
32. a) $F = (-3;2;-2)$ b) $F = (0;5;1)$
33. b) $\vec{r}_4 = \frac{13}{15}\vec{r}_1 + \frac{16}{15}\vec{r}_2 + \frac{2}{3}\vec{r}_3$
c) $|\vec{a}| = \sqrt{41},\ |\vec{b}| = \sqrt{35},\ |\vec{c}| = \sqrt{26},$
$\alpha = 159,56°,\ \beta = 81,02°,\ \gamma = 108,20°$
e) $\alpha = 70,64°,\ \beta = 60,66°,\ \gamma = 48,70°,\ F = 14,230$
f) windschief; $d = 4,445$ h) $2,530$
34. a) $\vec{r}_4 = \frac{5}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{d}$
b) $|\ \overrightarrow{P_1P_2}\ | = \sqrt{3},\ |\ \overrightarrow{P_2P_3}\ | = \sqrt{35},\ |\ \overrightarrow{P_3P_1}\ | = \sqrt{24}$
$\alpha = 118,13°,\ \beta = 46,91°,\ \gamma = 14,96°,\ F = 3,742$

3.3 34. c) windschief; $d = 4,320$ d) $2,138$

35. a) $\vec{r}_4 = -2\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3$
 b) $\alpha = 136,91°,\ \beta = 20,51°,\ \gamma = 22,52°,\ F = 1,871$
 c) windschief; $d = \sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $d = \frac{3}{\sqrt{14}}$

36. Falls $Q_1 = (0;0)$ gewählt: $P = (ah_1/(h_1+h_2), 0)$

37. e) Ellipse g) Ellipse mit $M = (-\frac{1}{4};0),\ a = \frac{\sqrt{21}}{4},\ b = \frac{\sqrt{21}}{2}$
 h) Kreis mit $M = (0;-\frac{1}{3}),\ R = \frac{\sqrt{76}}{3}$

39. a) $y = 2x - 1$ b) $y = x$ c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
 d) $x^2 + y^2 = 1$ e) $\dfrac{x^2}{(3/\sqrt{2})^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

42. b) $M' = (\sqrt{3} + \frac{3}{2}, -1 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$
 d) $3x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + y'^2 - 2x' - 2\sqrt{3}y' = 0$

43. c) $M = (-\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1, \frac{5}{2}\sqrt{2} + 1)$
 d) $y' = \frac{1}{3}x' - \frac{\sqrt{2}}{3}$

44. a) $\left(x' + \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(y' + \frac{9\sqrt{2}}{16}\right)$
 b) $\dfrac{\left(x' + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2}{4} + \dfrac{\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{9} = 1$
 c) $\dfrac{x'^2}{3} - \dfrac{y'^2}{4} = 1$
 d) $y' + \frac{\sqrt{2}}{3} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x' - 2\sqrt{2})$

46. Schnittpunkte Gerade/ Hyperbel: $P_1(-2,0),\ P_2(-\frac{10}{3},-4)$
 Schnittpunkte Gerade/ Asymptoten: $P_3(-4,-6),\ P_4(-\frac{4}{3},2)$
 $\overline{P_1P_4} = \overline{P_2P_3} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$

47. $m = -2 \pm \sqrt{3}$, $b = -\frac{3}{2}$

48. α) $4A^2 + 9B^2 - C^2 > 0$

49. $(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$

50. $(\frac{23}{9}, \pm\frac{\sqrt{560}}{9}),\ (1,0)$

51. $y = -\frac{1}{2}x - 8$

52. $P_1'(1;1;1),\ P_2'(1;-1;-3),\ P_3'(0;1;0)$; $A = \sqrt{6}$

53. $P_0'(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3})$

54. $Q(\frac{157}{77}, \frac{190}{77}, \frac{100}{77})$

Kapitel 4

4.1 1. a) Geraden b) Kreise c) Hyperbeln d) Ellipsen
 e), f), g) Kreise h) Ellipsen i) Parabeln

2. stetig in $\mathbb{R}$

4.1 3. a) $x > 0$ b), c) $y > -x^2$ d) $\tan \dfrac{x}{y} > 0$
e) $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ g) $xy^2 \neq k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$
6. a) $z = -x + 2y - 1$ b) $z = x + \sqrt{3}y - 2$
c) $z = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + 1$ d) $z = \frac{4}{3}x + y - \frac{10}{3}$
7. b) $\vec{n}^0 = \frac{10}{\sqrt{129}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, 1)^T$
8. $(2, -1)$
9. a) $x = y = 0$ b) $x = 0$ c) $x = t/2$
d) $x = y = z = 0$
10. Näherungswert: $z(1,1;1,8) = 14$
11. $dV = -512,7\,\mathrm{cm}^3$
12. $p \cdot \beta = \alpha/\kappa$
13. a) nein b) $f(x,y) = y\mathrm{e}^x + x^2y + \frac{1}{5}y^5 + C$
c) nein d) $f(x,y) = -y\cos(2x) + C$
e) $f(x,y) = y^2 \ln x + C$
f) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-y}\arctan(3x) + \mathrm{e}^{-y} + C$
14. a) nein b) $S = R\ln V + g(T)$ mit $g(T) = \int \dfrac{C(T)}{T}\,dT$

4.2 2. $\alpha = 53,1° \pm 1,6°$
3. 9%
4. $\alpha = 26,57° \pm 0,45°$
5. $(3,53 \pm 0,034)\,\mathrm{cm}$
6. $V = (2680,9 \pm 415,5)\,\mathrm{m}^3$
7. nein
8. $R = (194,5 \pm 0,26)\,\Omega$
10. $p_2 = (2327,8 \pm 160,3)\,\mathrm{mbar}$
11. c) $\dfrac{\Delta V}{V} = -\dfrac{C_v}{R}\dfrac{\Delta T}{T}$
12. prozentualer Fehler: 0,26%
13. 1%
14. $H = (49 \pm 1,50)\,\mathrm{A/cm}$
15. $T = (1,09 \cdot 10^{-4} \pm 5,27 \cdot 10^{-6})\,\mathrm{s}$
18. $y = x - 4$
19. $c = -6$; $y = -\frac{13}{9}x + \frac{22}{9}$
20. x-Achse: $14,04°$, y-Achse: $75,96°$
24. a) $1 - \frac{1}{2}[x - 2y - \frac{\pi}{2}]^2$ b) $1 + x^2 + y^2$
25. a) Kreise; $\mathrm{grad} f(1,1) = (\frac{-5}{\sqrt{8}}, \frac{-5}{\sqrt{8}})^T$
b) Geraden; $\mathrm{grad} f(0,0) = \mathrm{grad} f(1,1) = (3,-2)^T$
c) Ellipsen; $\mathrm{grad} f(0,0) = (0,0)^T$, $\mathrm{grad} f(1,1) = (2,8)^T$
d) Geraden; $\mathrm{grad} f(1,1) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^T$

4.2 27. a) $\alpha = -45°$, Anstieg: $\sqrt{18}$
b) $\alpha = 124,91°$, Anstieg: $6,99$
c) $\alpha = 210°$, Anstieg: $\sqrt{12}$
29. b) $(6,-10)^T$; $11,66$
30. b) $\vec{E} = (0,24; -0,08; 0,32)^T$
31. b) $\vec{E} = \left(\frac{2\mu\cos\vartheta}{r^3}, 0, \frac{\mu}{r^4}\right)$
(bei geeigneter Wahl der Richtung der z-Achse)
32. a) $\operatorname{rot}\vec{a} = (0; 5xy - z; 2x - 5xz)^T$ d) $\operatorname{rot}\vec{a} = (0; 0; -y)^T$
33. a) $\operatorname{div}\vec{a} = 2xy + 2z + 1$ b) $\operatorname{div}\vec{a} = x + 1/y$
c) $\operatorname{div}\vec{a} = \sin(x+y) + x\cos(x+y)$
34. a) $\operatorname{div}\vec{a} = 4r + \cot\vartheta$ b) $\operatorname{div}\vec{a} = 3$ c) $\operatorname{div}\vec{a} = 2/r$
35. a) 6 b) 28 c) 0

4.3 1. a) $P_{\min} = (5; -10; -\frac{100}{3})$ b) $P_{\min} = (1; 1; -5)$
c) $P_{\min} = (2; 2; -16)$ d) $P_{\max} = (0; 2; 4)$
e) $P_{1,\min} = (1; -2; -10)$, $P_{2,\min} = (-1; -4; -10)$
2. $x_{\min} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_{\min} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$
3. $P_{\min} = (-2; 2; -12)$
4. a) $\{(x,y):\ (3,3),\ (-3,-3),\ (1,-1),\ (-1,1)\}$
b) $\{(x,y):\ (-1/\sqrt[3]{2}, -1/\sqrt[3]{2}),\ (0,-1),\ (-1,0)\}$
c) $\{(x,y):\ (\pm\sqrt{6}, \frac{2}{\sqrt{3}}),\ (\pm\sqrt{6}, -\frac{2}{\sqrt{3}}), (0, \pm 2)$
d) $\{(x,y,z):\ (0,2,1),\ (0,-2,1)\}$
5. b) $P_{\min} = (1; 1; -3)$ c) $f(x,y) = -5xy$
6. a) $z = -5x + 4y - 4$ b) $P_{\min} = (0; 0; 0)$
7. a) konzentrische Kreise
b) $P_{\max} = (0; 0; 4)$ absolutes Maximum
c) $P_{\max} = (0,5; 0,5; 3,5)$
8. $P_{\min} = (4; 2; 96)$, $P_{\max} = (12; -6; 864)$
9. $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, $h = \frac{1}{\sqrt{3}}R$; 57% Kugelvolumen
10. Würfel
11. relatives Minimum in $(1,-1)$ und $(1,1)$
relatives Maximum in $(2-\sqrt{2}, 0)$ und $(2+\sqrt{2}, 0)$
12. relatives Minimum in $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ und $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
relatives Maximum in $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
13. a), b) absolutes Minimum: $P_{\min} = (0,5; 1; -1,75)$
14. Grundseiten je 4 cm, Höhe 2 cm

4.3 15. Seien gegebene Seitenlängen a, b, c, d (in mathematisch positiver Richtung) und gesuchte Winkel $\alpha = \angle(d,a),\ \beta = \angle(a,b),\ \gamma = \angle(b,c), \delta = \angle(c,d)$:

$$\alpha = \arccos\left[\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right],\ \gamma = 180° - \alpha,$$

$$\beta = \arccos\left[\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right],\ \delta = 180° - \beta$$

17. $y = 0,113 + 0,057x$
18. $y(5) = 3,3$
19. a) $y = 0,99\mathrm{e}^{0,31x}$ b) $y = 0,87x^{1,07}$; besser: a)
20. $y(1,5) = 4,6;\ y(4) = 50,2$
21. $y(4) = 7,4$
22. b) $y = x^2 - 1,8x + 2$
23. $y = 0,46x$
24. $\rho = 4,99\,\mathrm{g/cm^3}$

4.4 1. a) $\frac{10}{3}$ b) 2 c) $(\mathrm{e}-1)^2$
d) $\frac{1}{2}$ e) 1,365 f) $\frac{1}{3}(\mathrm{e}-1)^2$
2. $-\frac{2}{3}$
3. a), b) $-\frac{1}{3}$
4. 2,032
5. $\frac{17}{15}$
6. 4π
7. 61,94
8. $\frac{55}{24}$
9. $\frac{1}{48}\pi$
10. a) $-\frac{2}{3\pi}$ b) $-\frac{1}{24}$
11. a) π
12. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{24}$ c) 6,75 d) 9π
13. b) $\frac{1}{6}$ c) $S(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
14. a) 20 b) $\frac{352}{15}$
15. a) 0 b) 0 c) $-\frac{1}{6}$
16. a) 0 b) $F(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y + C$
17. b) $V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$ c) $W = \frac{33}{2}$
18. b) $V = \frac{1}{3}x^3 + x^2y - y + C$ c) $\frac{1}{3}$
19. b) 1 c) 1
20. a), b) $1 - 1/\sqrt{3}$ c) $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$
21. a) nicht konservativ b) $V = x^2 \sin xy + C$

Kapitel 5

5.1 1. c) 12

2. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{4}$
3. a) konvergent b) konvergent c) konvergent
4. a) konvergent b) konvergent c) divergent
   d) konvergent e) konvergent f) konvergent
5. a) konvergent b) konvergent c) divergent
   d) konvergent
8. a) $K = (-1, 1]$ b) $K = [-5, 1]$ c) $K = (-1, 1)$
   d) $K = (-\infty, \infty)$ e) $K = \{0\}$ f) $K = (-\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2})$
9. a) $r = \mathrm{e}$ b) $r = \frac{1}{3}$
10. $a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{2^n - 1}$
11. a) $K = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ b) $K = (-1, 1)$ c) $K = \mathbb{R}$
    d) $K = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e) $K = (-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ für $a > 0$
    f) $K = (-1, 1)$
12. a) $K = \mathbb{R}$ b) $K = (-1, 1)$
13. 0,9461
14. a) $0,4010$ b) $0,4111$ c) $0,3498$
15. a) $K = \mathbb{R}$ b) $1,0572$
16. a) $f(x) = \pi - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$
    b) $f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$
16. c) $f(x) = -2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \sin nx$
17. $f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$
18. a) $f(x) = \frac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$
18. b) $f(x) = \frac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$
19. $f(x) = \dfrac{h}{2} + \dfrac{h}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{2\pi n}{T} t$
20. $f(x) = -\dfrac{T_0}{2} + \dfrac{T_0}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2nx}{n}$

5.2 1. e) $-\frac{1}{10}$ f) $-\frac{1}{4}$

4. a) $L = \{(x, y) :\ y > 0,\ |x| > y\}$ b) $L = \mathbb{R}$

5.2 4. c) $L = \{(x, y):\ x \le 0,\ y \in \mathbb{R}\}$
d) $L = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$
e) $L = \{(x, y):\ x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2\}$
f) Falls $c > 0$: $L = \{(x, y) : x^2 - y^2 = c\}$
5. a) $x = -2$
7. a) -256 b) $-7{,}39 + 3{,}06\mathrm{i}$
8. a) -32768 b) $-1024 + 1024\mathrm{i}$ c) $-32768\mathrm{i}$
9. a) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\mathrm{i};\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\mathrm{i}$
b) $1{,}490 - 0{,}263\mathrm{i};\ -0{,}518 + 1{,}422\mathrm{i};\ -0{,}973 - 1{,}159\mathrm{i}$
c) $-1;\ 0{,}809 \pm 0{,}588\mathrm{i};\ -0{,}309 \pm 0{,}951\mathrm{i}$
10. a) $L = \{-1,\ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}\}$
b) $L = \{1;\ 0{,}309 \pm 0{,}951\mathrm{i};\ -0{,}809 \pm 0{,}588\mathrm{i}\}$
c) $L = \{1{,}0696 + 0{,}2127\mathrm{i};\ -0{,}2127 + 1{,}0696\mathrm{i};$
$-1{,}0696 - 0{,}2127\mathrm{i};\ 0{,}2127 - 1{,}0696\mathrm{i}\}$
11. a) $L = \{1,\ \pm 2\mathrm{i}\}$ b) $L = \{\pm\mathrm{i},\ \pm\sqrt{3}\mathrm{i}\}$
c) $L = \{0{,}79 \pm 0{,}79\mathrm{i};\ -1{,}08 \pm 0{,}29\mathrm{i};\ 0{,}29 \pm 1{,}08\mathrm{i}\}$
d) $L = \{\pm 1,\ \pm 2\mathrm{i}\}$
e) $L = \{1; -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i};\ -\sqrt[3]{4};\ 0{,}794 \pm 1{,}375\mathrm{i}\}$
12. a) $L = [1, \infty)$ b) $L = \mathbb{R}$ c) $L = \mathbb{R}$
d) $L = [-1, 1]$ e) $L = (-\sqrt[3]{4}, 1)$
15. a) $1 - \mathrm{i};\ 1;\ -3$ b) $1 - \mathrm{i};\ 2; -1$ c) $1;\ 2 - \mathrm{i}$
16. $22{,}36\,\Omega$

5.3 1. a) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$
b) $\lambda_{1,2} = 3,\ \vec{y}_1 \in \mathbb{R}^2$ beliebig
c) $\lambda_{1,2} = 2$ d) $\lambda_{1,2} = 5$
2. a) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 8,\ \lambda_3 = -2;$

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} t,\ \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t,\ \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. b) $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2;$

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t,\ \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. a) $\lambda_1 = 2 - x,\ \lambda_2 = 2 + x$ b) orthogonal nur für $x = 1$
c) $x = 0$

4. a) $\lambda_1 = 0$ c) $\lambda_2 = 3$ e) $\vec{x}_3^{\,0} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$

g) $P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.3 5. a) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \sqrt{2},\ \lambda_3 = -\sqrt{2}$

$\vec{x}_1^0 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T,\ \vec{x}_2^0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})^T \vec{x}_3^0 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})^T$

6. a) $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = -2$

c) $\vec{x}_1^0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \vec{x}_2^0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \vec{x}_3^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

$\vec{x}_4^0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8. a) $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{1 + (-1)^{k+1}\,\mathrm{e}^{-\pi}}{k^2+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

b) $f(x) = -\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{1 + (-1)^{k+1}\,\mathrm{e}}{k^2\pi+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}$

Kapitel 6

6.1 2. $s(t) = 5\cos t$

3. $y = \dfrac{c}{24}(x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)$

4. a) $y' = -x/y$

b) $-x^2 + y^2 - 1 - 2xyy' = 0$

5. $y'^2 - 2y'x - 2y + 2x^2 = 0$

6. $y' = 2y/x$

8. $x^2 + 3x\cos y + y^2 - \pi^2/4 = 0$

9. $a = 1; \quad -\dfrac{x}{y} + y - 1 = 0$

10. a) $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$

11. b) $\left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right)\exp\left(-\dfrac{kt}{m}\right) + \dfrac{mg}{k}$

c) $v_{\max} = \max(v_0,\ mg/k)$

12. a) $x = ab\dfrac{\mathrm{e}^{(a-b)kt} - 1}{a\mathrm{e}^{(a-b)kt} - b}$

13. a) $t = \dfrac{1}{k}\dfrac{(c-b)\ln\left|\frac{a-x}{a}\right| + (a-c)\ln\left|\frac{b-x}{b}\right| + (b-c)\ln\left|\frac{c-x}{c}\right|}{a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2}$

14. a) $t = -\dfrac{1}{k}\left[bx + (ab+1)\ln\left|\dfrac{a-x}{a}\right|\right]$

6.1 15. a) $x = \dfrac{2[\exp(4\sqrt{7}t) - 1]}{(3+\sqrt{7})\exp(4\sqrt{7}t) - 3 + \sqrt{7}}$

b) $3 - \sqrt{7}$

16. a) $x = 0{,}5\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}}(1 - \exp(-200\frac{t}{\mathrm{s}}))$ b) $0{,}316\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}}$

17. $T = T(t) = T_L + (T_0 - T_L)\,\mathrm{e}^{-at}$

18. 56 min

19. Lernen: $p(t) = a(1 - e^{\lambda t})$

20. a) $\dfrac{p_0 a\,\mathrm{e}^{a(t-t_0)}}{a + bp_0[e^{a(t-t_0)} - 1]}$

21. a) $y = \dfrac{x}{1+Cx}$ b) $\dfrac{x+C-1}{x+C}$

c) $y = \arccos\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$ d) $y = \dfrac{1}{\ln|\cos x| + C}$

22. a) $y = \frac{7}{5}\mathrm{e}^{2\pi-2x} + \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x)$

b) $y = \left(\frac{22}{25} - \frac{2\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{2\pi-2x} + \frac{1}{25}[(10x-3)\cos x + (5x-4)\sin x]$

23. a) $y = 4 + C\mathrm{e}^{-x^2/2}$

b) $y = \dfrac{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{4}}{1+x}$

24. a) $y = \tan(x+C) - x - 1$ b) $y = 2x\arctan(Cx)$

25. $y = a\cosh\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2$

26. a) $y = (-2\ln|\cos x| + 1)^{1/2}$

b) $y = \dfrac{\pi^2 + 2\pi}{x^2} + \sin x + \dfrac{2\cos x}{x} - \dfrac{2\sin x}{x^2}$

27. $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{9}{20}\sin 2x - \frac{3}{20}\cos 2x$

28. a) $x = C_1\cos\sqrt{\frac{D}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{D}{m}}t$

b) $x = C_1\exp\left(-\frac{k}{2m}t\right)\cos\frac{\sqrt{4mD-k^2}}{2m}t +$

$+ C_2\exp\left(-\frac{k}{2m}t\right)\sin\frac{\sqrt{4mD-k^2}}{2m}t$

29. a) $x(t) = \dfrac{m}{\beta}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\dfrac{m}{g\beta}}t\right)\right]$

b) $x_E \approx v_E t$

c) $\tau = \sqrt{\dfrac{m}{g\beta}}\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\beta h}{m}} + \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{2\beta h}{m}} - 1}\right)$

30. a) $y = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{x} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{3x-2}$

b) $y = \frac{5}{17}(-4\sin x - \cos x + e^{4x})$

c) $y = \frac{1}{6}(x^4 - 1/x^2)$

d) $y = -\frac{3}{2}\pi\sin x - \cos x$

6.1 30. e) $y = \mathrm{e}^x \cos x + 1$

f) $y = \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x$

g) $y = e^{-3x}\left(-\frac{1}{13}\cos x + \frac{145}{39}\sin x\right) + \frac{2}{39}\sin x + \frac{1}{13}\cos x$

h) $y = \mathrm{e}^{-x}\left[-\frac{1}{3}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{2}{3}\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)\right] + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}$

i) $y = -6\mathrm{e}^{-2x}\cos x - 4\mathrm{e}^{-2x}\sin x + x^2 - 8x + 7$

j) $y = -\frac{7}{6}x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{18}\sin 3x\,\mathrm{e}^{2x}$

31. $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + C_3\mathrm{e}^{3x}$

32. $f(x) = \cos x + \sin x$

33. $K = \mathbb{R}$

34. b) $0,7652$

35. a) = b)

6.2 1. $z = \frac{1}{3}x^3 + y^2x + 1/y + C$

2. c) $\vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}$

3. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $x(t)$: Asymptote $y = 3$, $P_{\min} = (0,127; 1,943)$,
$P_W = (0,530; 2,152)$
$y(t)$: Asymptote $y = 2$, streng monoton wachsend, konkav

7. $u(x,t) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_j^2}{k_j} \sin k_j \cos(k_j x) \exp(-k_j^2 t)$ mit
$a_j = 1/[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2k_j)]$ und
$k_j > 0$ aus $\cot k = k/\sigma$, $j = 1, 2, \ldots$