Probe-Klausur Statistik für PT 01.02.2017
(Lösungsvorschlag Prof. Paditz)

Aufg. 1

Zwischen der Meißeldrehzahl (in min^{-1}, Variable X) und der Bohrgeschwindigkeit (in m/h, Variable Y) besteht bei kleinen Drehzahlen ein näherungsweise linearer Zusammenhang.
Bei einer Versuchsserie ergaben sich folgende Werte:

X	30	40	50	60	70	80
Y	0.16	0.19	0.26	0.34	0.36	0.44

(a) Berechnen Sie die Regressionsgerade nach der Methode der kleinsten Quadrate.
(b) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß für diese Regressionsgerade und interpretieren Sie den erhaltenen Wert (Hinweis: $s_y = 0{,}1074$).
(c) Interpretieren Sie den berechneten Wert für den Anstieg der Regressionsgeraden.

Lösung:

(a)

```
seq(x,x,30,80,10)⇒listx
                                        {30,40,50,60,70,80}
{0.16,0.19,0.26,0.34,0.36,0.44}⇒listy
                            {0.16,0.19,0.26,0.34,0.36,0.44}
LinearReg listx,listy
                                                       done
```

DispStat

done

============================

Lineare Regression

y = a•x+b

a = 5.6857E-3

b = -0.021048

r = 0.9903276

r^2 = 0.9807488

MSe = 2.7762E-4

============================

Lösung: y=f(x)=0.00569x−0.02105≈0.0057x−0.021

(b) B=0.9807

d.h. 98,07% des Datenzusammenhanges y=f(x), genauer der Variation von Y, sind über das lineare Modell erklärt.

(c) Wird x (Drehzahl) um eine Einheit erhöht, vergrößert sich y (Geschwindigkeit) um 0,0057 Einheiten.

Anmerkung:

TwoVariable listx, listy

done

DispStat

done

============================

Zweidim. Variable

$\bar{x} = 55$

$\Sigma x = 330$

$\Sigma x^2 = 19900$

$\sigma_x = 17.078251$

$s_x = 18.708287$

$n = 6$

$\bar{y} = 0.2916667$

$\Sigma y = 1.75$

$\Sigma y^2 = 0.5681$

$\sigma_y = 0.0980504$

$s_y = 0.1074089$

$\Sigma xy = 106.2$

minX = 30

maxX = 80

minY = 0.16

maxY = 0.44

==========================

Aufg. 2

In einem Betrieb wird ein Granulat hergestellt, das aus kleinen Kugeln eines Zwischenproduktes besteht. Um die Verteilung der Kugeldurchmesser in der Produktion zu untersuchen, wird eine Stichprobe entnommen und in dieser Stichprobe die Verteilung der Durchmesser bestimmt.

Nachfolgende Tabelle enthält die Anzahlen der Kugeln in der Stichprobe mit den angegebenen Durchmessern (in mm).

Durchmesser	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Anzahl	2	4	15	16	23	29	16	12	4

(a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und den Median der Kugeldurchmesser in dieser Stichprobe.

(b) Im Verkaufsprospekt für das Granulat wird für den durchschnittlichen Kugeldurchmesser ein Wert von 5.7 mm angegeben. Prüfen Sie, ob sich dieser Wert auf Basis der Stichprobe halten lässt. Dazu nehme man an, dass sich die Kugeldurchmesser durch eine normalverteilte Zufallsvariable beschreiben lassen (α = 0,05). Hinweis: s = 1,8045.

(c) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für den Anteil der Kugeln in der Gesamtproduktion, die kleiner als 6 mm sind.

(d) Von der Produktion eines Wettbewerbers sei bekannt, dass eine dort entnommene Stichprobe folgende Verteilung der Kugeldurchmesser aufwies:
15 kleine Kugeln mit einem Durchmesser von 1 bis 4 mm, 50 mittlere Kugeln mit einem Durchmesser von 5 bis 6 mm und 20 große Kugeln mit einem Durchmesser von 7 bis 9 mm.
Prüfen Sie mit einem geeigneten Test, ob zwischen den Verteilungen der Kugeldurchmesser
bei beiden Herstellern ein signifikanter Unterschied besteht (α = 0,05).

Lösung:

seq(d, d, 1, 9, 1)⇒listd

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Häufigkeiten (Anzahlen):

{2, 4, 15, 16, 23, 29, 16, 12, 4}⇒lista

{2, 4, 15, 16, 23, 29, 16, 12, 4}

(a)

mean(listd, lista)

5.388429752

median(listd, lista)

6

(b)

Varianz:

$\frac{1}{120}$sum((listd−5.388429752)^2*lista)

3.256198347

ans^0.5

1.804493931

einfacher t−Test:

OneSampleTTest "≠", 5.7, listd, lista

done

DispStat

done

======================

1−Stichprob. t−Test

Daten=Liste

$\mu \neq 5.7$

$t = -1.899299$

prob = $0.0599258 > 0.05 = \alpha$ (Nichtablehnung)

$\bar{x}$ = 5.3884298

s_x = 1.8044939

n = 121

======================

Quantil:

invTCDf(0.025,120)

1.979930405

(c)

Konfidenzintervall ($1-\alpha$=0.95) für einen Anteilswert (Kugeln kleiner als 6mm),

geschätzt:

$$\frac{2+4+15+16+23}{121}$$

$$\frac{60}{121}$$

approx(ans)

0.4958677686

OnePropZInt 0.95,60,121

done

DispStat

done

=========================

Z-Interv.(1 Wkt.)

Lower = 0.4067815

Upper = 0.584954

$\hat{p}$ = 0.4958678

n = 121

=========================

Konfidenzintervall [0.4068,.5850]

(d)

χ^2-Homogenitätstest

$$\begin{bmatrix} \text{X/Y} & \text{klein} & \text{mittel} & \text{groß} & \Sigma \\ \text{Hersteller} & 37 & 52 & 32 & 121 \\ \text{Mitbewerber} & 15 & 50 & 20 & 85 \\ \Sigma & 52 & 102 & 52 & 206 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 37 & 52 & 32 \\ 15 & 50 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 37 & 52 & 32 \\ 15 & 50 & 20 \end{bmatrix}$$

ChiTest A

done

DispStat

done

=====================

χ^2 Test

χ^2 = 6.008373

prob = 0.0495791<0.05=α (Ablehnung)

df = 2

=====================

Quantil:

invChiCDf(0.05,2)

5.991464547

Aufg. 3

Die Zufallsvariable X besitze eine stetige Verteilung auf einem

Intervall $[a-\frac{3}{4}, a+\frac{3}{4}]$, $a \in \mathbf{R}$, mit der Dichte

$$f(x)=\begin{cases} 1-\frac{16}{9}\cdot(x-a)^2, & a-\frac{3}{4}\le x\le a+\frac{3}{4} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine mathematische Stichprobe aus einer wie X verteilten Grundgesamtheit. Geben Sie eine erwartungstreue Punktschätzung fär den Parameter a an. Begründen Sie die Erwartungstreue!

Lösung:

Define $f(x)=1-\frac{16}{9}(x-a)^2$

done

f(x)

$$\frac{-16\cdot(x-a)^2}{9}+1$$

Gesamtfläche = 1 (Kontrolle)

$$\int_{a-\frac{3}{4}}^{a+\frac{3}{4}} f(x)dx$$

$$\frac{-16\cdot\left(a+\frac{3}{4}\right)^3}{27}+\frac{16\cdot\left(a-\frac{3}{4}\right)^3}{27}+\frac{16\cdot a\cdot\left(a+\frac{3}{4}\right)^2}{9}-\frac{16\cdot a\cdot\left(a-\frac{3}{4}\right)^2}{9}-\frac{16\cdot a}{}$$

simplify(ans)

1

$$EX:=\int_{a-\frac{3}{4}}^{a+\frac{3}{4}} x*f(x)dx$$

$$\frac{-4\cdot\left(a+\frac{3}{4}\right)^4}{9}+\frac{4\cdot\left(a-\frac{3}{4}\right)^4}{9}+\frac{32\cdot a\cdot\left(a+\frac{3}{4}\right)^3}{27}-\frac{32\cdot a\cdot\left(a-\frac{3}{4}\right)^3}{27}-\frac{8\cdot a^2\cdot\left(a\right.}{9}$$

simplify(ans)

$$a$$

EX = Massenschwerpunkt der über $[a-\frac{3}{4}, a+\frac{3}{4}]$ symmetrisch verteilten Wkts.-Masse.

Schätzung für EX:

$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)$ ist erwartungstreu wegen

$$E(\overline{x})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(EX_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a)=a.$$