Prof. Dr. L. Paditz 01/2018

Mathematik II für Chemieing.

Austauschverfahren zur Untersuchung von LGS

===

Aufg. 3.2.7 LGS mit Parameter c

$$\begin{bmatrix} ST & x & y & z & 1 \\ y_1 & 2 & -3 & 1 & -11 \\ y_2 & 1 & 4 & -3 & 16 \\ y_3 & 3 & 1 & -2 & -c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -11 \\ 1 & 4 & -3 & 16 \\ 3 & 1 & -2 & -c \end{bmatrix} \Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -11 \\ 1 & 4 & -3 & 16 \\ 3 & 1 & -2 & -c \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 3)

done

y_1 mit z getauscht:

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ 7 & -5 & -17 \\ 7 & -5 & -22-c \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1,2,2)

done

y_2 mit y getauscht:

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{17}{5} \\ 0 & -5-c \end{bmatrix}$$

$y_3=0$ für $c=-5$, d.h. für $c\neq-5$ keine Lösung.

approx(T2|c=-5)

$$\begin{bmatrix} 2.2 & 0.8 \\ 1.4 & -3.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} ET & x=t & 1 \\ z & 2.2 & 0.8 \\ y & 1.4 & -3.4 \\ y_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, somit $x=t$, $y=1.4t-3.4$, $z=2.2t+0.8$, $t\in\mathbf{R}$

Probe: (c=-5)

$$t*\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}+(1.4t-3.4)*\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}+(2.2t+0.8)*\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5}+3\cdot\left(\frac{17}{5}-\frac{7\cdot t}{5}\right)+\frac{21\cdot t}{5} \\ -4\cdot\left(\frac{17}{5}-\frac{7\cdot t}{5}\right)-3\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{11\cdot t}{5}\right)+t \\ -\frac{17}{5}-2\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{11\cdot t}{5}\right)+\frac{22\cdot t}{5} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 11 \\ -16 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Aufg. 3.2.10

A*X=−2**X** bedeutet, dass −2 ein sogen. Eigenwert von **A** ist.

$$A:=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

E:=ident(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A+2E⇒ST

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung des homogenen LGS **ST*x=o**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 3)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 2)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $x_1=t$, $x_2=2t$, x_3-7t, $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{bmatrix} ET & x_1=t & 1 \\ x_3 & -7 & 0 \\ x_2 & 2 & 0 \\ y_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zusatz: Eigenwerte von A

eigVl(A)

{6, -1, -2}

d.h. für $\lambda \in \{6,-1,-2\}$ hat $A*X=\lambda*X$ nichttriviale Lösungen.

Eigenvektoren (nichttriviale Lösungen) dazu:

eigVc(A)

$$\begin{bmatrix} 0.4082482905 & -0.5883484054 & -0.1360827635 \\ 0.8164965809 & 0.1961161351 & -0.272165527 \\ 0.4082482905 & 0.7844645406 & 0.9525793444 \end{bmatrix}$$

normierter Eigenvektor zum Eigenwert −2:

$$\text{approx}\left(\begin{bmatrix} 1t \\ 2t \\ -7t \end{bmatrix} / \text{norm}\left(\begin{bmatrix} 1t \\ 2t \\ -7t \end{bmatrix}\right) \middle| t=-1\right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.1360827635 \\ -0.272165527 \\ 0.9525793444 \end{bmatrix}$$

normierter Eigenvektor zum Eigenwert −1:

$$\begin{bmatrix} -0.5883484054 \\ 0.1961161351 \\ 0.7844645406 \end{bmatrix}$$

normierter Eigenvektor zum Eigenwert 6:

$$\begin{bmatrix} 0.4082482905 \\ 0.8164965809 \\ 0.4082482905 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte:

$A-\lambda*E$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

det(ans)=0

$$12+16\cdot\lambda+3\cdot\lambda^2-\lambda^3=0$$

solve(ans, λ)

$$\{\lambda=-2, \lambda=-1, \lambda=6\}$$

Für $\lambda\in\{6,-1,-2\}$ hat $\mathbf{(A-\lambda*E)*x=o}$ nichttriviale Lösungen.

Aufg. 3.2. 11a)

$$\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\3&2&1&-2\\2&3&4&-3\end{bmatrix}\Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\3&2&1&-2\\2&3&4&-3\end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix}-1&-1&2\\-1&-2&4\\1&2&1\end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\\0&5\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}ET&x_3&1\\x_1&1&-2\\x_2&-2&4\\y_3&0&5\end{bmatrix}$ $y_3\neq 0$, d.h. Widerspruch im LGS (keine Lösung)

Zusatz: Frage nach bester Näherungslösung (Bestapproximation)

Ansatz $\mathrm{norm}\left(x_1\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}\right)\to\min!$

$$\left(\text{norm}\left(x_1*\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2*\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_3*\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}\right)\right)^2$$

$$17-30\cdot x_2-28\cdot x_1-x_3\cdot(32-30\cdot x_2-24\cdot x_1)+26\cdot x_1\cdot x_2+18\cdot x_3{}^2+$$

Define $F(x_1,x_2,x_3)=17-30\cdot x_2-28\cdot x_1-x_3\cdot(32-30\cdot x_2-24\cdot x$

done

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx_1}(F(x_1,x_2,x_3))=0\\ \frac{d}{dx_2}(F(x_1,x_2,x_3))=0\\ \frac{d}{dx_3}(F(x_1,x_2,x_3))=0\end{array}\right|_{x_1,x_2,x_3}$$

$$\left\{x_1=\frac{1+27\cdot x_3}{27},x_2=\frac{28-54\cdot x_3}{27},x_3=x_3\right\}$$

ans | $x_3=0$

$$\left\{x_1=\frac{1}{27},x_2=\frac{28}{27},0=0\right\}$$

$$\text{norm}\left(x_1*\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2*\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_3*\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}\right)\,\Big|\,\left\{x_1=\frac{1}{27},x_2=\frac{28}{27},x_3=\right.$$

$$\frac{5\cdot\sqrt{3}}{9}$$

Minimalabstand von $x_1*\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2*\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_3*\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$ zu $\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$

beträgt $\frac{5\cdot\sqrt{3}}{9}$

Lösung ohne Differenzialrechnung:

Ansatz: der Differenzvektor $x_1\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$

steht senkrecht (orthogonal) auf $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

bzw. $\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$, d. h.

$$\text{dotP}\left(x_1*\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2*\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_3*\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right)=0$$

$$-2-3\cdot(2-x_3-2\cdot x_2-3\cdot x_1)-2\cdot(3-4\cdot x_3-3\cdot x_2-2\cdot x_1)+x_3+x_2+x_1=0$$

simplify(ans)$\Rightarrow$G1

$$-14+12\cdot x_3+13\cdot x_2+14\cdot x_1=0$$

$$\text{dotP}\left(x_1*\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2*\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_3*\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=0$$

$$-2-2\cdot(2-x_3-2\cdot x_2-3\cdot x_1)-3\cdot(3-4\cdot x_3-3\cdot x_2-2\cdot x_1)+x_3+x_2+x_1=0$$

simplify(ans)$\Rightarrow$G2

$$-15+15\cdot x_3+14\cdot x_2+13\cdot x_1=0$$

$$\text{dotP}\left(x_1*\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+x_2*\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_3*\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}\right)=0$$

$$-4-4\cdot(3-4\cdot x_3-3\cdot x_2-2\cdot x_1)+2\cdot x_3+3\cdot x_2+4\cdot x_1=0$$

simplify(ans)$\Rightarrow$G3

$$-16+18\cdot x_3+15\cdot x_2+12\cdot x_1=0$$

$$\left.\begin{cases}G1\\G2\\G3\end{cases}\right|_{x_1,\,x_2,\,x_3}$$

$$\left\{x_1=\frac{1+27\cdot x_3}{27}, x_2=\frac{28-54\cdot x_3}{27}, x_3=x_3\right\}$$

ans | $x_3=0$

$$\left\{x_1=\frac{1}{27}, x_2=\frac{28}{27}, 0=0\right\}$$

Das ist die gleiche Lösung, wie vorher.

Damit können Extemwertaufgaben mithilfe der Vektorrechnug gelöst werden ohne die Differenzialrechnung zu bemühen.

Aufg. 3.2.22

a)

$\begin{bmatrix}1044.0045 & 696 & -696\\174 & 116 & -116\end{bmatrix}$⇒ST

$$\begin{bmatrix}\frac{2088009}{2000} & 696 & -696\\174 & 116 & -116\end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix}-\frac{464000}{696003} & \frac{464000}{696003}\\\frac{116}{232001} & -\frac{116}{232001}\end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

eindeutige Lösung x=0, y=1

b) weitere Kommastellen vorhanden (ergibt völlig andere Lösung)

$\begin{bmatrix} 1044.0045 & 696.0028 & -696.0034 \\ 174.0008 & 116.0005 & -116.0006 \end{bmatrix} \Rightarrow ST$

$$\begin{bmatrix} \frac{2088009}{2000} & \frac{1740007}{2500} & -\frac{3480017}{5000} \\ \frac{217501}{1250} & \frac{232001}{2000} & -\frac{580003}{5000} \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -\frac{6960028}{10440045} & \frac{6960034}{10440045} \\ \frac{1}{104400450000} & \frac{1}{52200225000} \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

approx(ans)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Probe:

$\begin{bmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{3480017}{5000} \\ \frac{580003}{5000} \end{bmatrix}$$

approx(ans)

$$\begin{bmatrix}696.0034\\116.0006\end{bmatrix}$$

c) Zerlegung

$$\begin{bmatrix}1044.005 & 696.0028\\174.0008 & 116.0005\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}144 & 696\\174 & 116\end{bmatrix}+10^{-4}*\begin{bmatrix}45 & 28\\8 & 5\end{bmatrix}$$

und $\begin{bmatrix}696.0034\\116.0006\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}696\\116\end{bmatrix}+10^{-4}*\begin{bmatrix}34\\6\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}144 & 696\\174 & 116\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}696\\116\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}45 & 28\\8 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}34\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\left(10^{-4}*\begin{bmatrix}45 & 28\\8 & 5\end{bmatrix}\right)^{-1}10^{-4}*\begin{bmatrix}34\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

Addition mit den Lösungen der Teilsysteme:

$$\begin{bmatrix}144 & 696\\174 & 116\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+10^{-4}*\begin{bmatrix}45 & 28\\8 & 5\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{3480017}{5000}\\\frac{580003}{5000}\end{bmatrix}$$

approx(ans)

$$\begin{bmatrix}696.0034\\116.0006\end{bmatrix}$$

exakte Lösung: $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

Aufg. 3.2.28

LGS mit mehreren rechten Seiten gleichzeitig bearbeiten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -5 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1,2,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & -2 & -7 & 7 \\ 2 & -6 & -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T2,3,1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & -5 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & -7 \\ 2 & 2 & 8 & -12 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T3,4,1)

done

matnew⇒T4

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -9 & 17 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

b) hat die Lösung $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) hat die Lösung $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -2 \\ -9 & 17 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

a) A^{-1} mit dem Austauschverfahren berechenbar (ohne Zeilen- und Spaltentilgung)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$