Vorl. Prof. Oestreich – Vertretung Prof. Paditz

Prüfungsvorbereitung 14.02.2018

================================

2. Differential- und Integralrechnung (I)

A) Zahlenfolgen, Grenzwerte von Funktionen,

Stetigkeit, Regula falsi:

2.1. 1e),2c),8g),13,16c)

B) Tangentengleichung, Berechnung der

Ableitung, implizite Differentiation, Ableitung von

Funktionen in Polarkoordinaten:

2.2. 4,9c),11b),14c)

C) Extremwertaufgaben, Monotonie und

Krümmung von Funktionen, Regel von L'Hospital,

Kurvendiskussionen, Taylorsche Formel,

Newton-Verfahren:

2.3. 4,21b),26i),31b),41b),44

D) Berechnung von Integralen, uneigentliche Integrale:

2.4. 1b), 11a), c), m), 13a), b), c), 19b)

E) Berechnung von Flächeninhalten, Bogenlängen, Schwerpunkten, Volumen und Mantelflächen von Rotationskörpern:

2.5. 8g), 12b), 15a), 17b)

Aufg. 2.1. 1e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{n}-1\right)$$

$$0$$

Termumfomung:

$$\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{n}-1=\frac{1-1/n}{1+1/n}+\frac{1}{n}-1 \;\to\; \frac{1-0}{1+0}+0-1=0 \text{ für } n\to\infty$$

Aufg. 2.1. 2c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n+1}\right)$$

$$e^{\frac{1}{3}}$$

Termumfomung: $3n=m$

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/3+1}=\left(1+\frac{1}{m}\right)*\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{1/3}$$

$$\to\ (1+0)*e^{1/3}=e^{1/3}\ \text{für}\ m\to\infty$$

Aufg. 2.1.8g)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+\sin(x)}\right)$$

$$1$$

Termumfomung:

$$\frac{x}{x+\sin(x)}=\frac{1}{1+\sin(x)/x}\ \to\ \frac{1}{1+0}=1\ \text{für}\ x\to\infty$$

Aufg. 2.1.13)

$$\text{Define } f(x)=\begin{cases}-2*\sin(x), & x\le-\pi/2\\ A*\sin(x)+B, & -\pi/2<x<\pi/2\\ \cos(x), & x\ge\pi/2\end{cases}$$

done

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^-}(f(x))$$

$$2$$

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+}(f(x))$$

$$B-\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2}$$

somit $2=-A+B$

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(f(x))$$

$$B+\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2}$$

$$\lim_{x\to(\pi/2)^+} (f(x))$$

$$0$$

somit $0=A+B$

Ergebnis: $B=1$, $A=-1$

Aufg. 2.1. 16c)

Unstetigkeit bei $x=0$

Define $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

done

$$\lim_{x\to 0^-} (f(x))$$

$$0$$

$$\lim_{x\to 0^+} (f(x))$$

$$0$$

hebbare Unstetigkeit!

elementar: einseitige Grenzwerte

$$\frac{x}{1+e^{1/x}} \to \frac{-0}{1+e^{-\infty}}=\frac{0}{1+0}=0 \text{ für } x\to -0$$

$$\frac{x}{1+e^{1/x}} \to \frac{+0}{1+e^{\infty}}=\frac{0}{1+\infty}=0 \text{ für } x\to +0$$

Aufg. 2.2. 4)

Define $y(x)=(x-1)\ln(x)$

done

$$\frac{d}{dx}(y(x))=1$$

$$\frac{x\cdot\ln(x)+x-1}{x}=1$$

solve(ans, x)

$$\{x=1.763222834\}$$

nichtlin. Gleichung: $x\cdot\ln(x)+x-1=x$, d.h. $\mathbf{x\cdot\ln(x)-1=0}$ lösen

Define $f(x)=x\cdot\ln(x)-1$

done

2D–Grafik	Y1:… Y2:…

Regula falsi: ableitungsfreies Näherungsverfahren

Startwerte (Vorzeichenwechsel von f(x))

$x_0:=1$

1

$x_1:=e$

e

$f(\mathbf{x_0})=-1<0$ und $f(\mathbf{x_1})=e\cdot\ln(e)-1=e-1>0$

Nst. x_n **der Sekante durch** $(x_0, f(x_0))$ **und** $(x_1, f(x_1))$**:**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{y-f(x_1)}{x-x_1}$$ und

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{0-f(x_1)}{x_n-x_1}$$

ergibt die Iterationsvorschrift mit $x_n=x_2$

$$x2:=\text{approx}\left(x_1-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}f(x_1)\right)$$

1.632120559

approx$(f(x_2))$

−0.2004565756

x_0 durch x_2 ersetzen,

einseitige Konvergenz von links her, da f(x) konvex:

$x:=\text{approx}(x_2)$

1.632120559

$$x:=\text{approx}\left(x_1-\frac{x_1-x}{f(x_1)-f(x)}f(x_1)\right)$$

1.745595209

$$x:=\text{approx}\left(x_1-\frac{x_1-x}{f(x_1)-f(x)}f(x_1)\right)$$

1.760937289

$$x:=\text{approx}\left(x_1-\frac{x_1-x}{f(x_1)-f(x)}f(x_1)\right)$$

1.762927911

$$x:=\text{approx}\left(x_1-\frac{x_1-x}{f(x_1)-f(x)}f(x_1)\right)$$

1.763184801

$$x:=\text{approx}\left(x_1-\frac{x_1-x}{f(x_1)-f(x)}f(x_1)\right)$$

1.76321793

$$x:=\text{approx}\left(x_1-\frac{x_1-x}{f(x_1)-f(x)}f(x_1)\right)$$

1.763222202

Ergebnis: $x_n \approx 1{,}76$

Bem.: Newton-Verfahren konvergiert schneller

$x:=1$

1

$$x:=\text{approx}\left(x-\frac{f(x)}{\frac{d}{dx}(f(x))}\right)$$

2

$x{:=}\text{approx}\left(x-\dfrac{f(x)}{\frac{d}{dx}(f(x))}\right)$

1.771848327

$x{:=}\text{approx}\left(x-\dfrac{f(x)}{\frac{d}{dx}(f(x))}\right)$

1.763236211

$x{:=}\text{approx}\left(x-\dfrac{f(x)}{\frac{d}{dx}(f(x))}\right)$

1.763222834

stop

Aufg. 2.2. 9c)

DelVar x, y

done

$x_0{:=}4$

4

Define y1(x)=4*ln(x^2−4x+3)

done

Define $y2(x)=y1(t)+\frac{d}{dt}(y1(t))\cdot(x-t)\,|\,t=x_0$

done

Define $y3(x)=y1(t)+\dfrac{-1}{\frac{d}{dt}(y1(t))}\cdot(x-t)\,|\,t=x_0$

done

2D−Grafik

Tangente:

y=y2(x)

$$y=\frac{16\cdot(x-4)}{3}+4\cdot\ln(3)$$

approx(expand(y=y2(x)))

$$y=5.333333333\cdot x-16.93888418$$

Normale:

y=y3(x)

$$y=\frac{-3\cdot(x-4)}{16}+4\cdot\ln(3)$$

approx(expand(y=y3(x)))

$$y=-0.1875\cdot x+5.144449155$$

stop

Aufg. 2.2. 11b)

x_0:=0

$$0$$

$x+y\boldsymbol{e}^{y\hat{}2}=0$

$$y\cdot\boldsymbol{e}^{y^2}+x=0$$

solve($x_0+y\boldsymbol{e}^{y\hat{}2}=0$, y)

$$\{y=0\}$$

Define $x(y)=-y\boldsymbol{e}^{y\hat{}2}$

done

$1/\frac{d}{dy}(x(y))$

$$\frac{-1}{2\cdot y^2\cdot\boldsymbol{e}^{y^2}+\boldsymbol{e}^{y^2}}$$

ans|y=0

$$-1$$

d.h. $y'(x_0)=-1$, Tangente in P(0,0) somit $y=-x$

Parameterdarstellung: Umkehrfkt. zu $x(y)=-ye^{y^2}$

$x(t)=t$ und $y(t)=-te^{t^2}$

2D-Grafik

stop

Aufg. 2.2. 14c)

vgl. Rep. 2. KW

Aufg. 2.3. 4

DelVar x, y, t

done

Define y(x)=x^3-2x^2+t*x-1

done

$\frac{d}{dx}(y(x))$

$3\cdot x^2-4\cdot x+t$

solve(ans=0, x)

$\left\{x=\frac{-\sqrt{-3\cdot t+4}}{3}+\frac{2}{3}, x=\frac{\sqrt{-3\cdot t+4}}{3}+\frac{2}{3}\right\}$

solve(-3·t+4<0, t)

$\left\{t>\frac{4}{3}\right\}$

Lösung: $t>\frac{4}{3}$

Aufg. 2.3. 21b)

Define y(x)=sinh(x)

done

Define $\kappa(x)=\dfrac{\dfrac{d^2}{dx^2}(y(x))}{\left(1+\left(\dfrac{d}{dx}(y(x))\right)\hat{}2\right)\hat{}(3/2)}$

done

$\kappa(x)$

$$\frac{\sinh(x)}{\left((\cosh(x))^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

2D−Grafik

fMax(κ(x), x, −10, 10)

{MaxValue=0.1924500896, x=0.8814}

fMin(κ(x), x, −10, 10)

{MinValue=−0.1924500896, x=−0.8814}

approx(y(x)|x=0.8814)

1.000037354

approx(y(x)|x=−0.8814)

−1.000037354

approx($\rho=\dfrac{1}{0.1924500896}$)

ρ=5.196152426

Lösung: P(±0.8814, ±1.000037354), ρ=5.196152426

stop

Aufg. 2.3. 26i) x>0, einseitiger Grenzwert

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin(x)*\ln(x))$

0

sin(x)*ln(x) → "0*(−∞)" für x → +0

unbestimmte Form

$\frac{\ln(x)}{1/\sin(x)} \rightarrow$ "$-\infty/\infty$" für $x \rightarrow +0$

Regel v. l'Hospital:

$$\frac{\frac{d}{dx}(\ln(x))}{\frac{d}{dx}(1/\sin(x))}$$

$$\frac{-(\sin(x))^2}{x\cdot\cos(x)}$$

$\frac{-(\sin(x))^2}{x\cdot\cos(x)}=-\frac{\sin(x)}{x}*\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \rightarrow -1*0=0$ für $x \rightarrow +0$

Aufg. 2.3. 31b)

DelVar x

done

Define $y1(x)=(1-e^{-2x})$^2

done

2D–Grafik Y1:⋯ Y2:⋯

$D(y1(x))=(-\infty,\infty)$, $W(y1(x))=[0,\infty)$

Nst.: $x_n=0$, $y_n=0$,

$\frac{d^2}{dx^2}(y1(x))=0$

$$-\left(8\cdot e^{2\cdot x}-16\right)\cdot e^{-4\cdot x}=0$$

solve(ans, x)

$$\left\{x=\frac{\ln(2)}{2}\right\}$$

Wendestelle: $x=\frac{\ln(2)}{2}$,

$y1(x)|x=\frac{\ln(2)}{2}$

$\frac{1}{4}$

Grenzwerte:

$\lim_{x \to -\infty} (y1(x))$

∞

$\lim_{x \to \infty} (y1(x))$

1

Asymptote: y=1

konvex: $x \le \frac{\ln(2)}{2}$, konkav: $x > \frac{\ln(2)}{2}$

stop

Aufg. 2.3. 41b)

Define y2(x)=x^2*ln(x)

done

x_0:=1

1

taylor(y2(x), x, 1, x_0)

x−1

Define y3(x)=taylor(y2(x), x, 1, x_0)

done

taylor(y2(x), x, 2, x_0)

$\frac{3\cdot(x-1)^2}{2}+x-1$

Define y4(x)=taylor(y2(x), x, 2, x_0)

done

expand(y4(x))

$$\frac{3\cdot x^2}{2}-2\cdot x+\frac{1}{2}$$

2D–Grafik

1. Näherung (linear): y=x−1

2. Näherung: (quadratisch): $y=\frac{3\cdot x^2}{2}-2\cdot x+\frac{1}{2}$

stop

Aufg. 2.3.44 (Skizze)

Define y(x)=sin(x)

done

Abstand P(0;1) und Q(x;y(x))

Define f(x)=(x−0)^2+(1−y(x))^2

done

f(x)

$$(\sin(x)-1)^2+x^2$$

fMin(f(x),x,−5,5)

{MinValue=0.5200783338,x=0.4787}

$\frac{d}{dx}(f(x))=0$

$$2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)-2\cdot\cos(x)+2\cdot x=0$$

solve(ans,x)

{x=0.4787224241}

Define g(x)=sin(2x)−2·cos(x)+2·x

done

Newton–Verfahren:

x:=0

0

$$x:=\text{approx}\left(x-\frac{g(x)}{\frac{d}{dx}(g(x))}\right)$$

0.5

$$x:=\text{approx}\left(x-\frac{g(x)}{\frac{d}{dx}(g(x))}\right)$$

0.4786342845

$$x:=\text{approx}\left(x-\frac{g(x)}{\frac{d}{dx}(g(x))}\right)$$

0.4787224227

stop

Aufg. 2.4.1b)

$$\frac{1}{4-2}\int_2^4 x\hat{}2dx$$

$$\frac{28}{3}$$

Aufg. 2.4.11a),c),m)

DelVar x,C

done

$$\int_{\square}^{\square}\frac{1}{x*\ln(x)}dx+C$$

$$\ln(|\ln(x)|)+C$$

$$\int_{\square}^{\square}\frac{1}{x*\ln(x)}dx=\int_{\square}^{\square}\frac{1}{x}*(\ln(x))^{-1}dx,$$

Subst.: $t=\ln(x)$, $dt=\frac{1}{x}dx$

$$\int_{□}^{□} t^{-1}\,dt$$

$$\ln(|t|)$$

ans+C | t=ln(x)

$$\ln(|\ln(x)|)+C$$

stop

$$\int_{□}^{□} \frac{x+1}{(x-1)\text{^}3}\,dx$$

$$\frac{-x}{(x-1)^{2}}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)\text{^}3}=\frac{x-1+2}{(x-1)\text{^}3}=\frac{1}{(x-1)\text{^}2}+\frac{2}{(x-1)\text{^}3} \quad \text{(PBZ)}$$

$$\int_{□}^{□} \frac{1}{(x-1)\text{^}2}\,dx+\int_{□}^{□} \frac{2}{(x-1)\text{^}3}\,dx$$

$$\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^{2}}$$

simplify(ans)

$$\frac{-x}{(x-1)^{2}}$$

stop

$$\int_{□}^{□} \frac{e^{x}+2}{e^{x}+1}\,dx+C$$

$$2\cdot x+C-\ln\left(e^{x}+1\right)$$

$$\frac{e^{x}+2}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}+1+1}{e^{x}+1}=1+\frac{1}{e^{x}+1}$$

Subst.: $t=e^{x}$, $dt=e^{x}dx=t\,dx$

$$\int_{□}^{□} \left(1+\frac{1}{t+1}\right)\frac{1}{t}\,dt$$

$$-\ln(|t+1|)+2\cdot\ln(|t|)$$

ans+C | t=e^x

$$2\cdot x+C-\ln(e^x+1)$$

PBZ:

expand$\left(\left(1+\frac{1}{t+1}\right)\frac{1}{t}, t\right)$

$$\frac{-1}{t+1}+\frac{2}{t}$$

usw.

Aufg. 2.4. 13a), b), c)

$\int_1^{\sqrt{19}} \frac{x}{\sqrt{4x^2+5}} dx$

$$\frac{3}{2}$$

Subst.: t=4x^2+5, dt=8xdx

$\int_9^{81} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{8} dt$

$$\frac{3}{2}$$

$\int_0^{\sqrt{3}} x*\tan^{-1}(x) dx$

$$\frac{2\cdot\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

part. Integration:

x → x^2/2 (integrieren)

$\tan^{-1}(x)$ → 1/(1+x^2) (differenzieren)

expand(x^2/2*1/(1+x^2), x)

$$\frac{-1}{2\cdot(x^2+1)}+\frac{1}{2}$$

$(x\text{^}2/2*\tan^{-1}(x)\,|\,x=\sqrt{3})-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{-1}{2\cdot(x^2+1)}+\frac{1}{2}dx$

$$\frac{2\cdot\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

approx(ans)

1.228369699

$\int_2^8\frac{1}{t\text{^}2+t}dt$

$$-\ln(3)+2\cdot\ln(2)$$

PBZ:

expand$\left(\frac{1}{t\text{^}2+t}, t\right)$

$$\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{t}$$

$\int_2^8\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{t}dt$

$$-\ln(3)+2\cdot\ln(2)$$

simplify(ans)

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Aufg. 2.4. 19b)

vgl. Rep. 4.KW

Aufg. 2.5. 8g)

DelVar x,y,t

done

Define xt1(t)=ln(t)

done

Define $yt1(t)=2\sqrt{t}$

done

2D-Grafik

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dt}(xt1(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(yt1(t))\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{t+1}{t^2}}$$

$$\int_3^8 ans\,dt$$

$$\ln(3)-\ln(2)+2$$

simplify(ans)

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right)+2$$

approx(ans)

2.405465108

s≈2.405

Integrand: t>0

$$\sqrt{\frac{t+1}{t^2}}=\frac{1}{t}\sqrt{t+1}$$

$$\int_{\square}^{\square}\frac{1}{t}\sqrt{t+1}\,dt$$

$$-\ln\left(\left|\sqrt{t+1}+1\right|\right)+\ln\left(\left|\sqrt{t+1}-1\right|\right)+2\cdot\sqrt{t+1}$$

simplify(ans)

$$\ln\left(\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right|\right)+2\cdot\sqrt{t+1}$$

Subst.: t+1=u^2, dt=2udu

$$\int_{□}^{□} \frac{2u}{u\hat{}2-1} u\,du$$

$$-\ln(|u+1|)+\ln(|u-1|)+2\cdot u$$

PBZ:

$$\text{expand}\left(\frac{2u}{u\hat{}2-1}u, u\right)$$

$$\frac{-1}{u+1}+\frac{1}{u-1}+2$$

$$-\ln(|u+1|)+\ln(|u-1|)+2\cdot u \mid u=\sqrt{t+1}$$

$$-\ln\left(\left|\sqrt{t+1}+1\right|\right)+\ln\left(\left|\sqrt{t+1}-1\right|\right)+2\cdot\sqrt{t+1}$$

usw.

stop

Aufg. 2.5. 12b) (Skizze)

$$A:=\int_0^2 \sqrt[3]{x}\,dx$$

$$\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2}$$

$$xs:=\frac{1}{A}*\int_0^2 x*\sqrt[3]{x}\,dx$$

$$\frac{8}{7}$$

$$ys:=\frac{1}{2A}*\int_0^2 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$$

$$\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{3}}}{5\cdot 2^{\frac{1}{3}}}$$

simplify(ans)

$$\frac{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{5}$$

stop

Aufg. 2.5.15a)

DelVar x

done

$$V:=\pi*\int_3^5(\sqrt{x\verb|^|2-9})\verb|^|2dx$$

$$\frac{44\cdot\pi}{3}$$

approx(ans)

46.07669225

2D−Grafik

3D−Grafik

Aufg. 2.5.17b) (Skizze)

Herzkurve (Kardioide)

Polgerade=x−Achse

obere Kurvenstück rotiert:

Define r(φ)=a*(1+cos(φ))

done

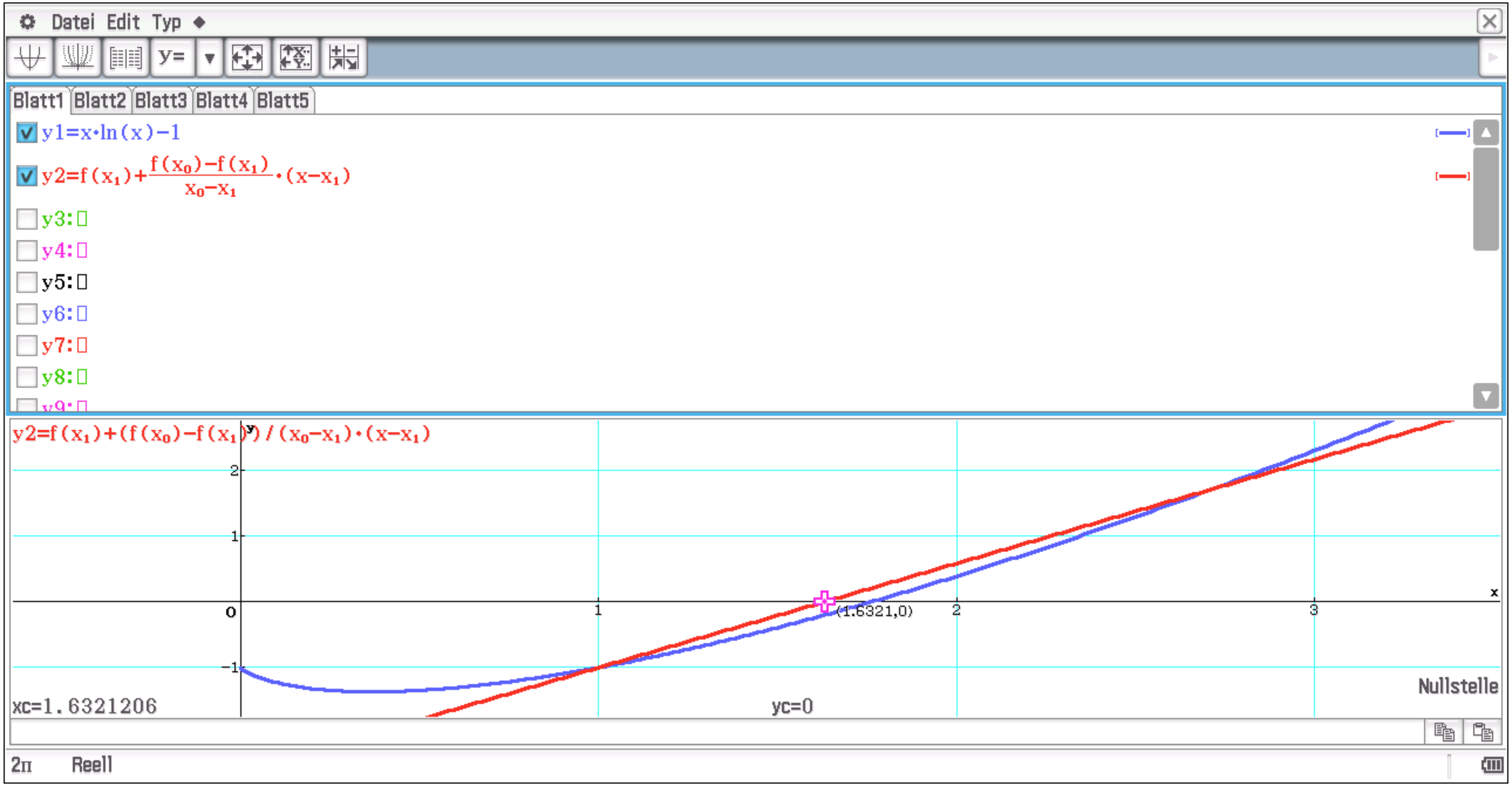
$$\frac{d}{d\varphi}(r(\varphi))$$

$$-a\cdot\sin(\varphi)$$

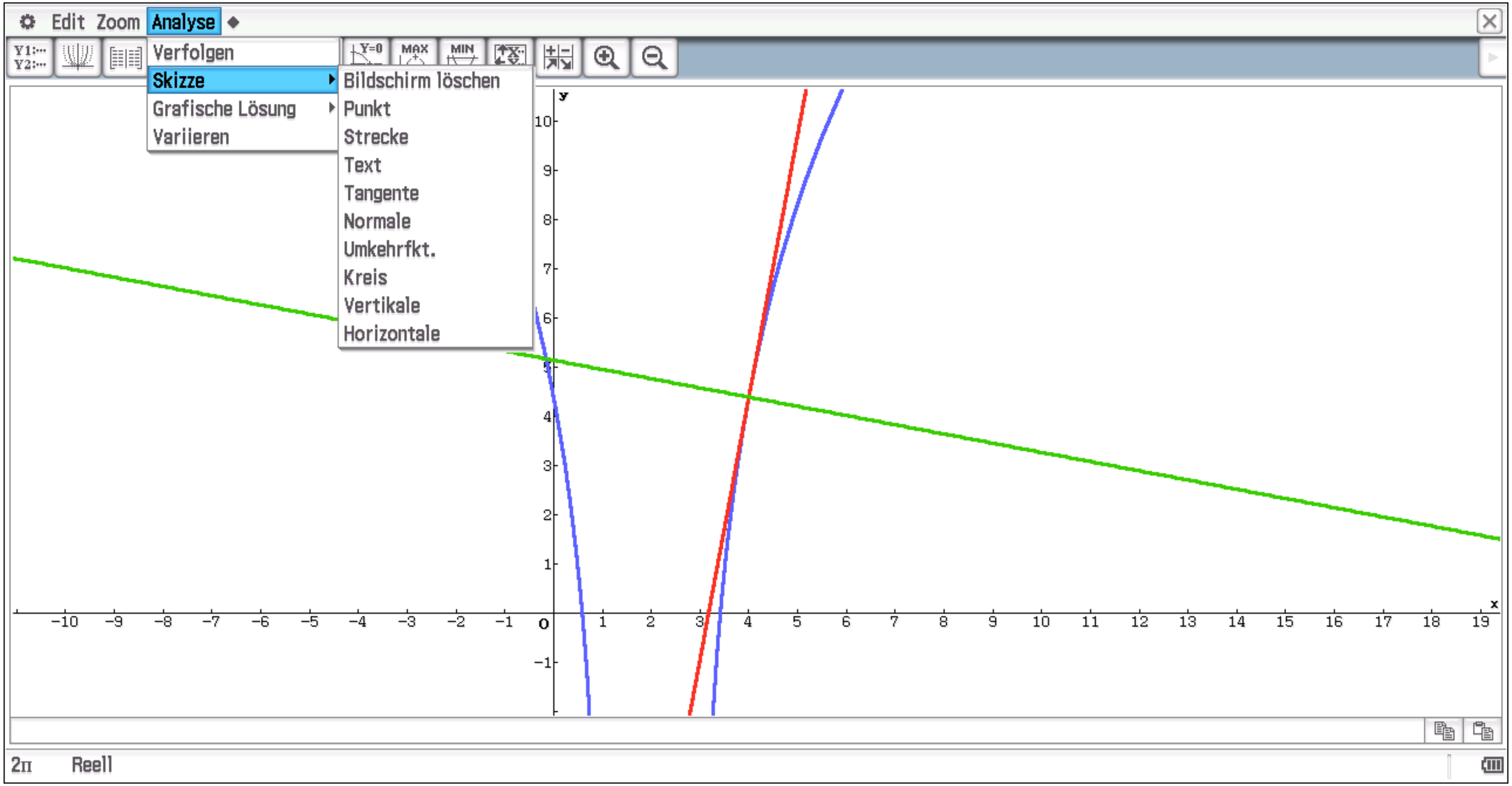
$$M:=2\pi*\int_0^{\pi}r(\varphi)*\sin(\varphi)\sqrt{(-a*\sin(\varphi))\verb|^|2+(r(\varphi))\verb|^|2}\,d\varphi\ |$$

$$\frac{32 \cdot a^2 \cdot \pi}{5}$$

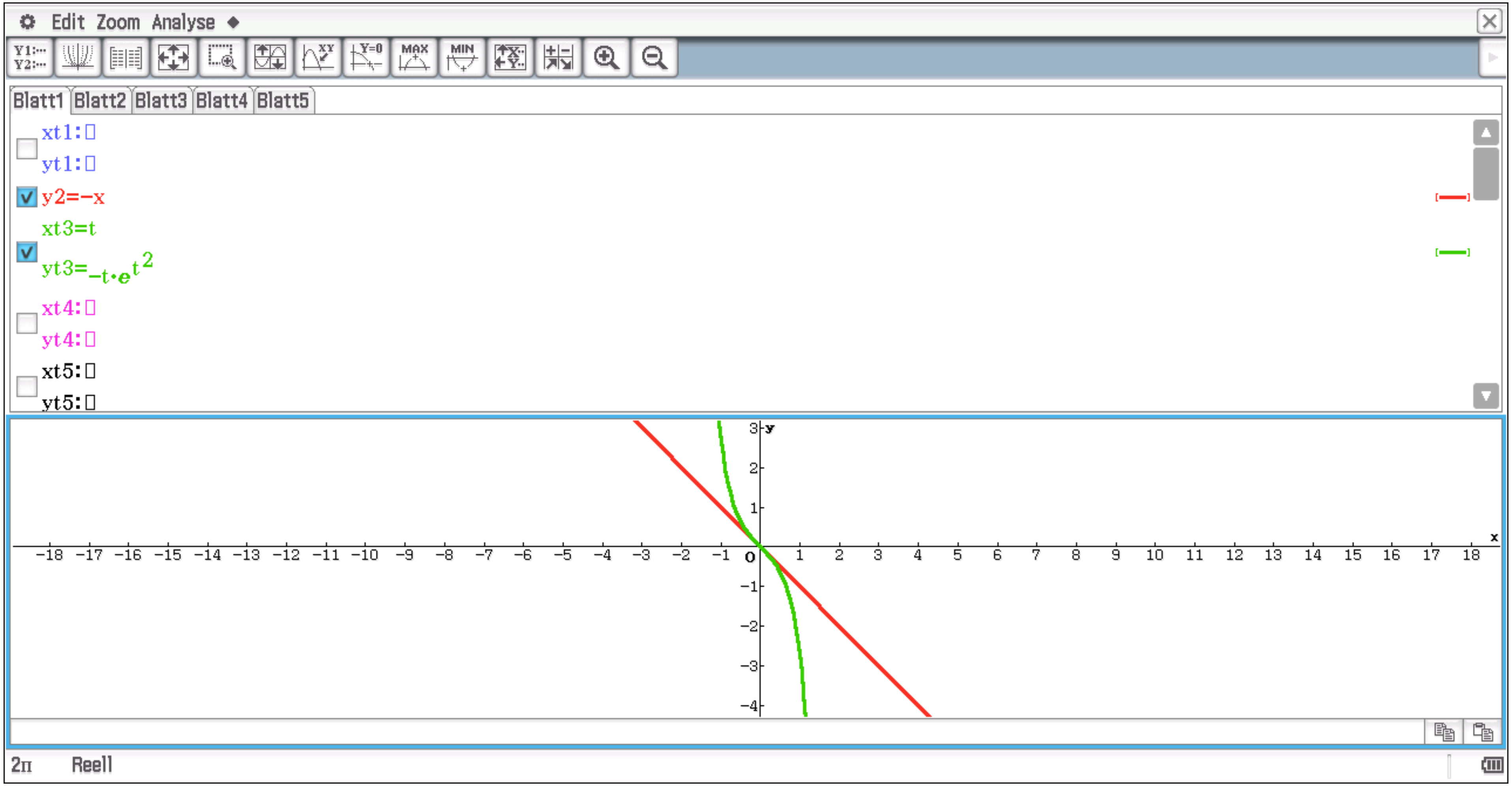
stop



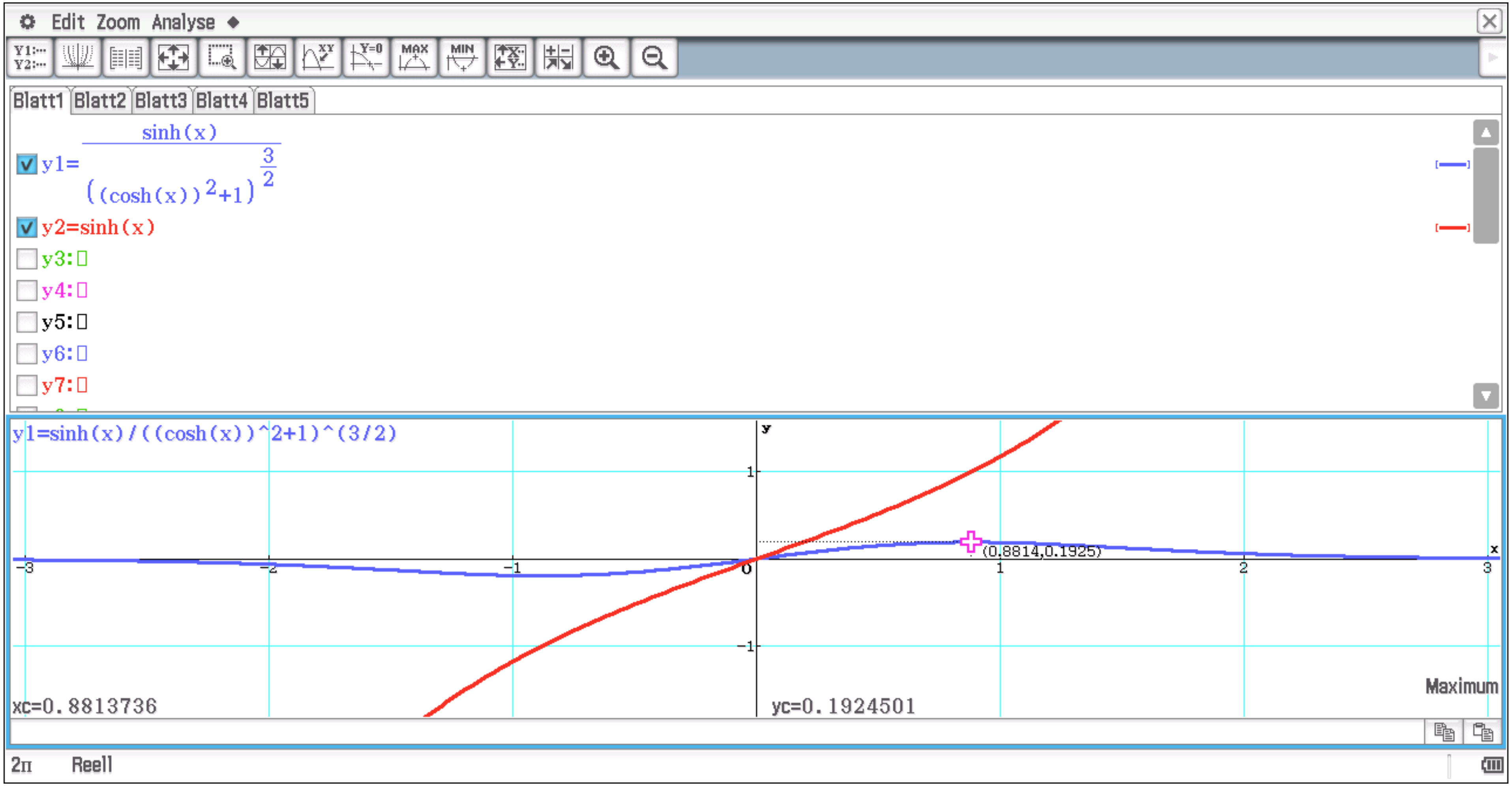
Grafik zu Aufg. 2.2.4



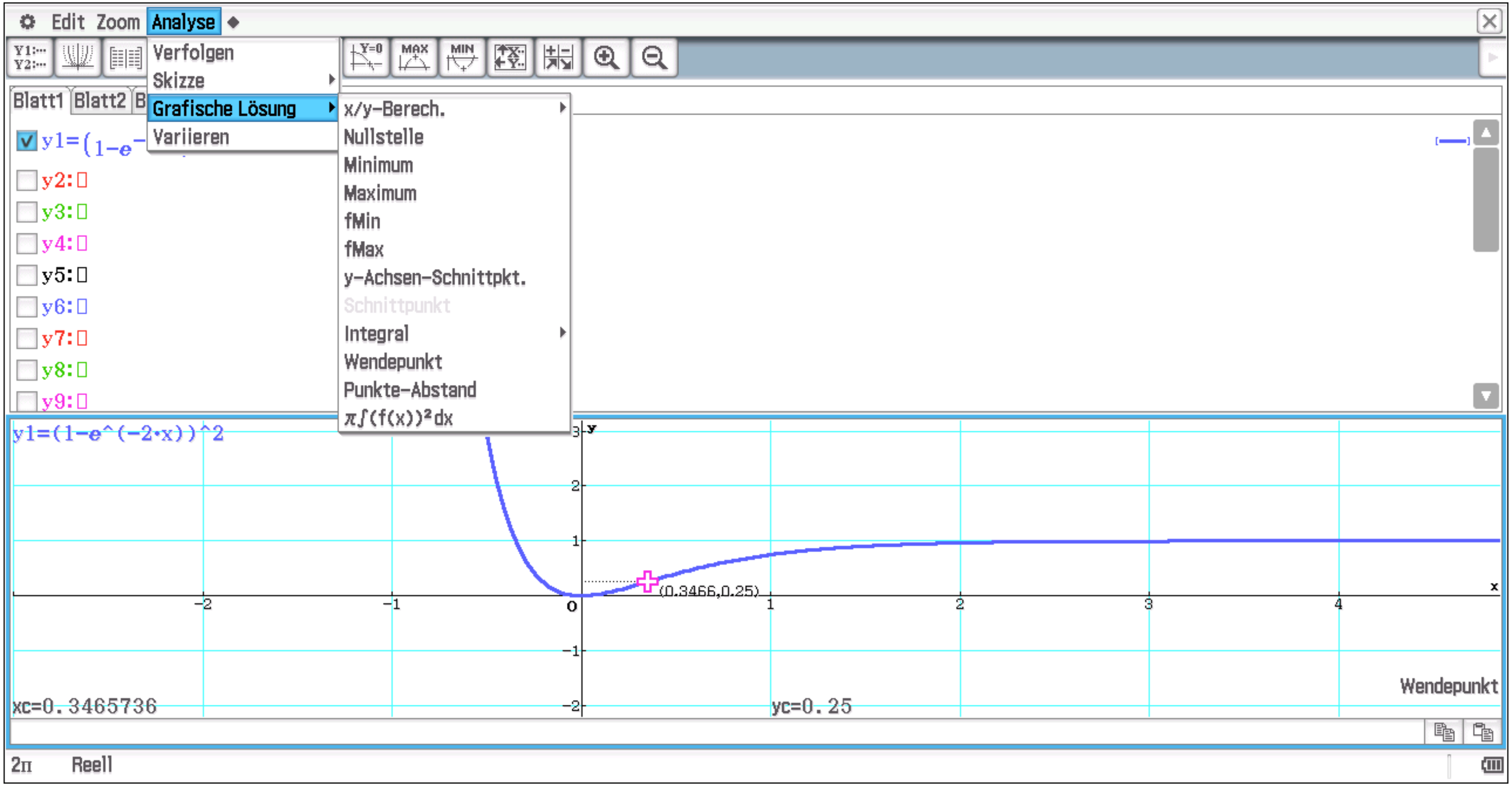
Grafik zu Aufg. 2.2.9c)



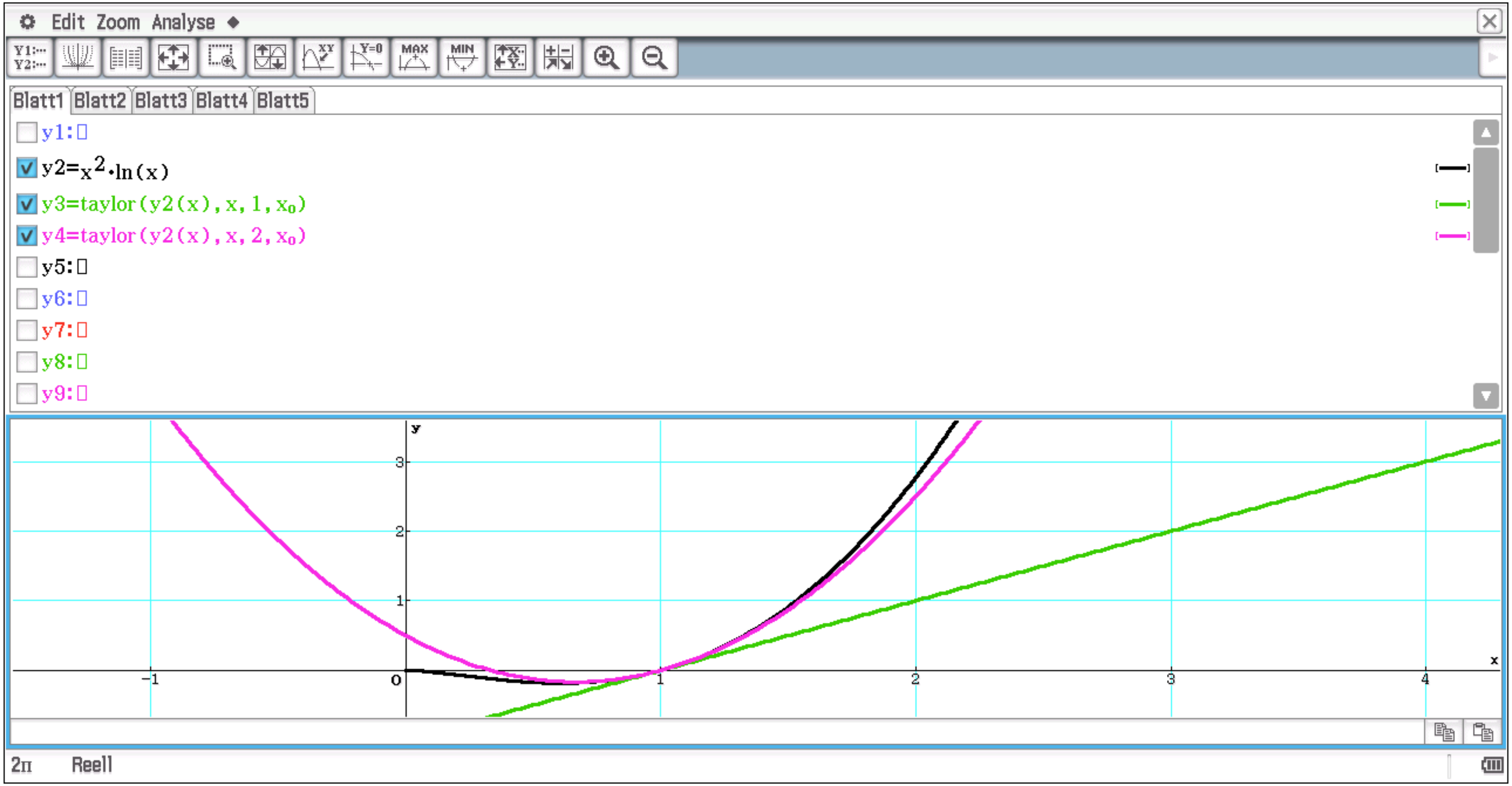
Grafik zu Aufg. 2.2.11b)



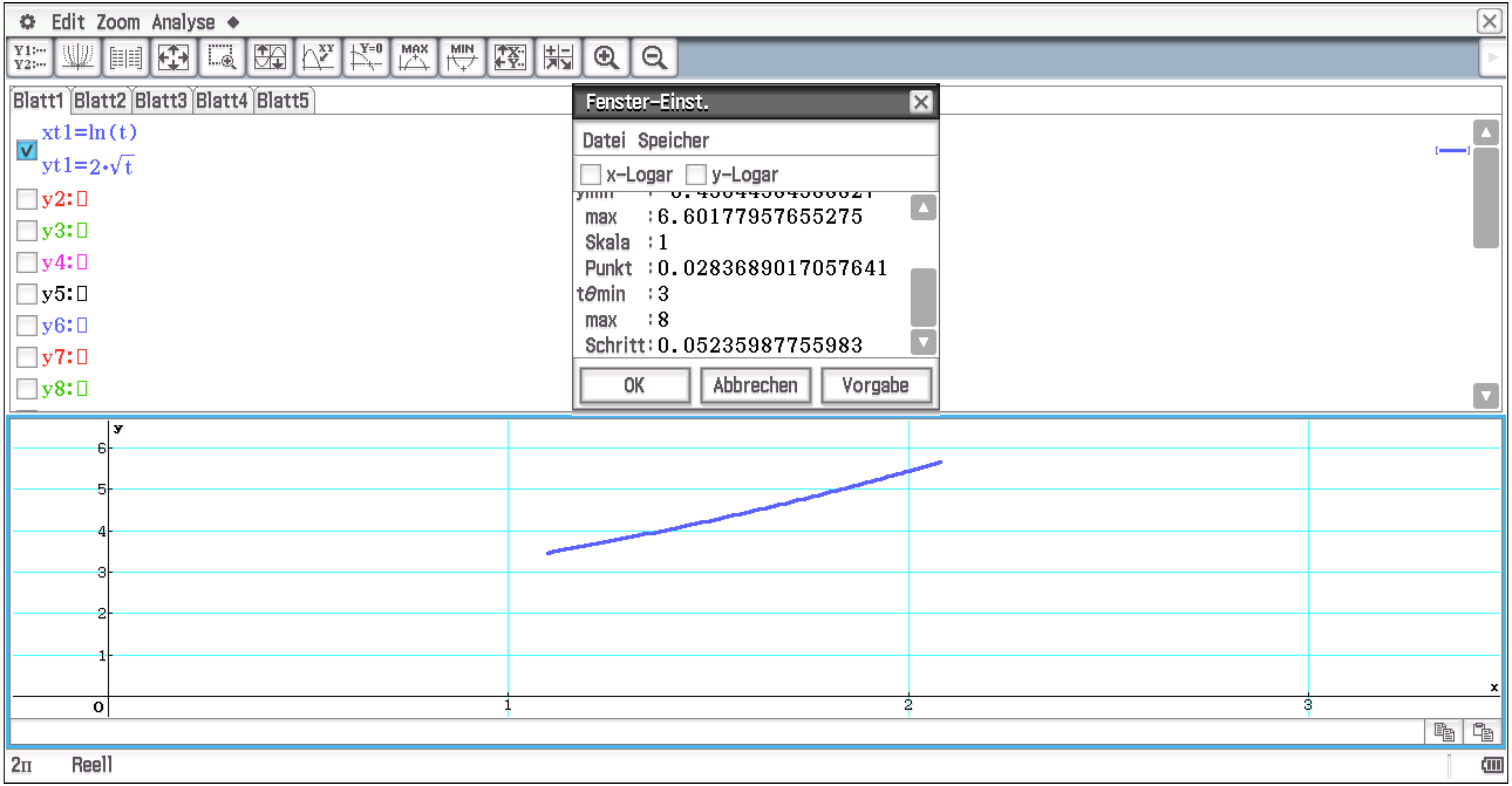
Grafik zu Aufg. 2.3.21b)



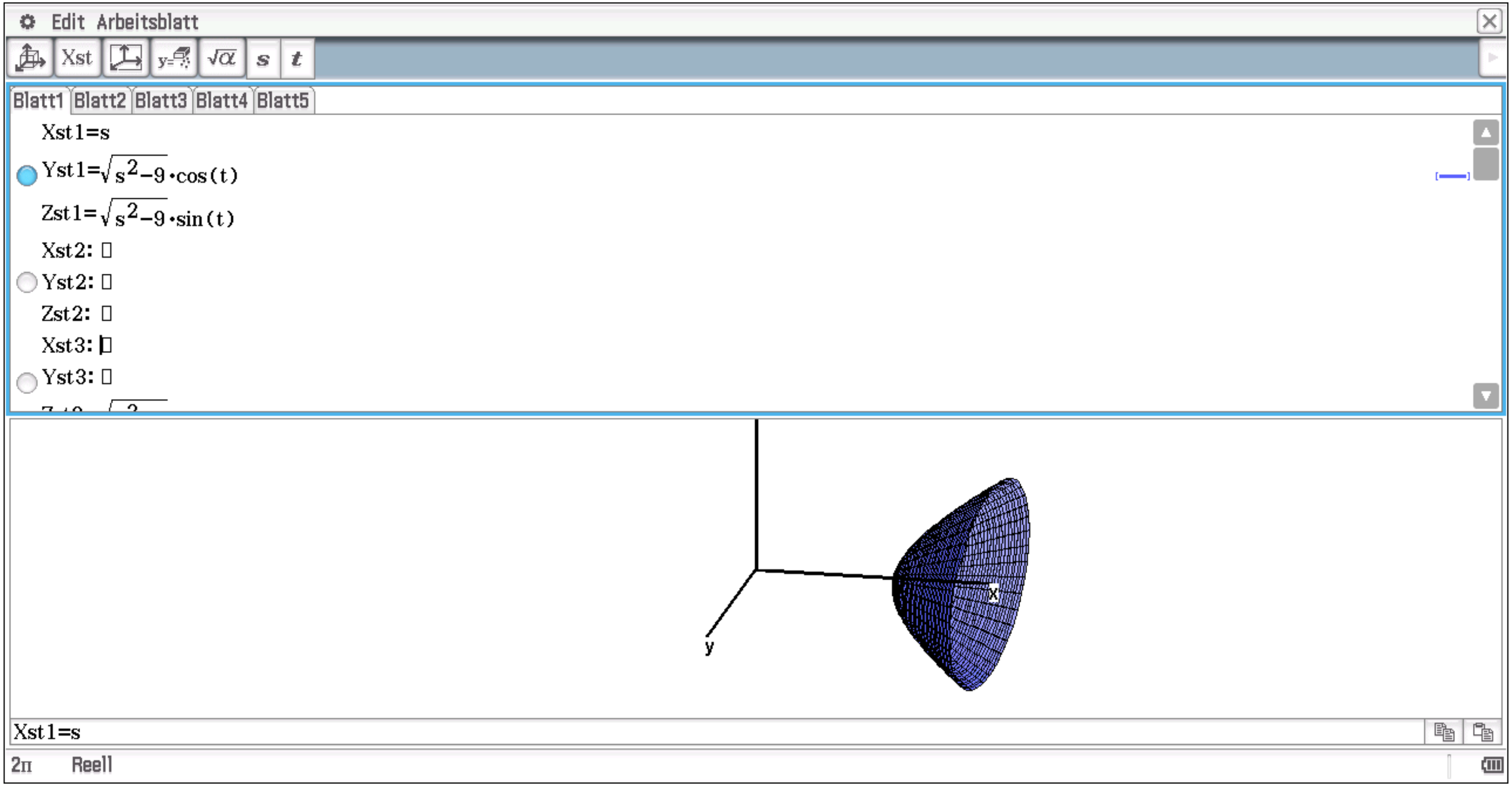
Grafik zu Aufg. 2.3.31b)



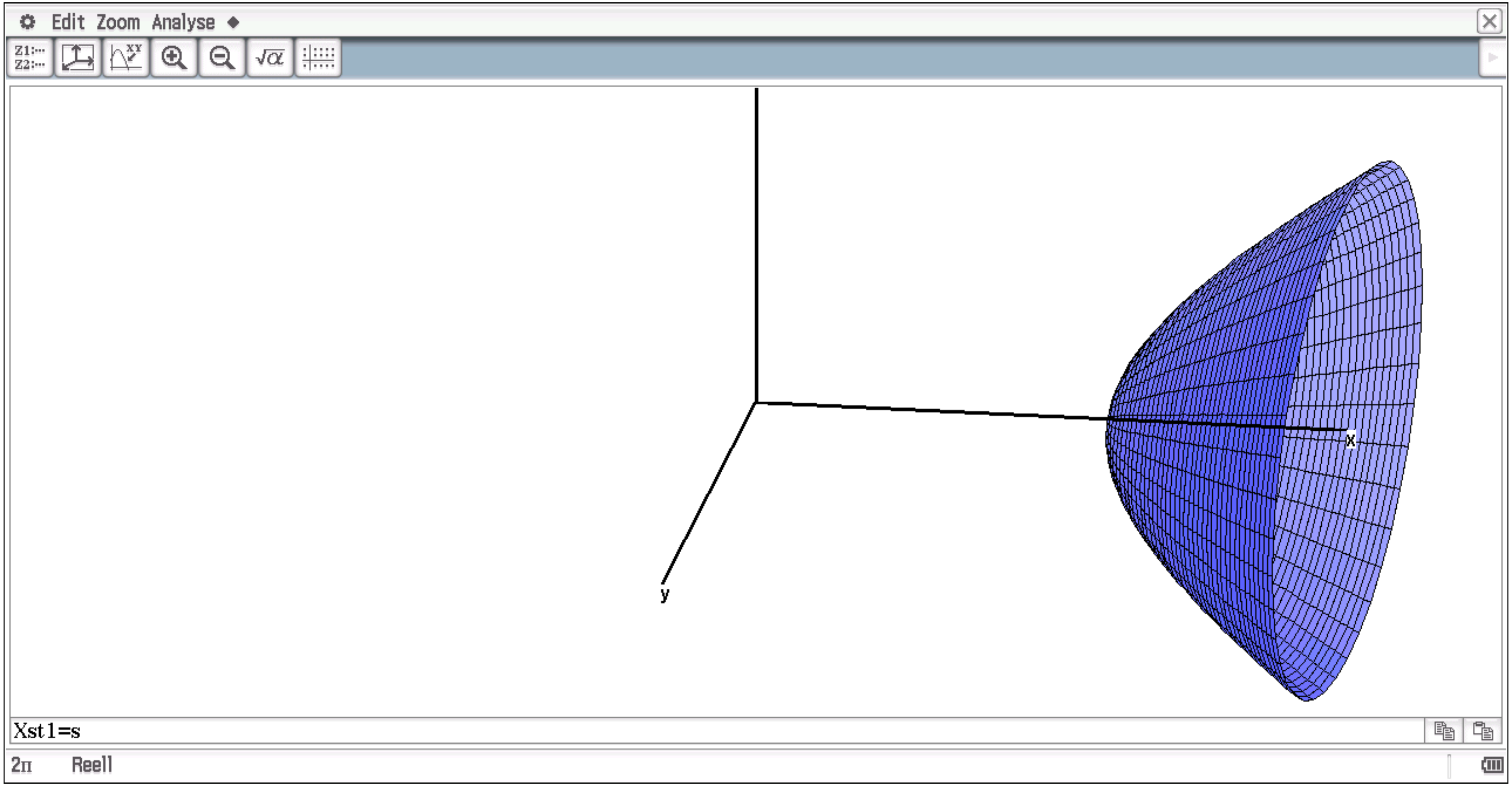
Grafik zu Aufg. 2.3.41b)



Grafik zu Aufg. 2.5.8g)



Grafik zu Aufg. 2.5.15a)



Edit Zoom Analyse
x
y
Xst1=s
2π Reell