Vorl. Prof. Oestreich – Vertretung Prof. Paditz

Prüfungsvorbereitung (Teil 1) 14.02.2018

===

1. Grundlagen

A) Mengenlehre und mathematische Logik:

1.1. 12,17b)

B) Algebraische Gleichungen und Ungleichungen, Beträge, Wurzelgleichungen, Exponentialgleichungen:

1.2. 1b),3k),7e),8d),24b)

C) Definitionsbereich und elementare Eigenschaften von Funktionen, Horner-Schema, Interpolationspolynome, Umkehrfunktionen, Funktionen in Polarkoordinaten:

1.3. 1c),8a),12,24f),36

1.1.12

A:={2,4,8,16,32}

{2,4,8,16,32}

B:={0,2,4,6,8,10,12}

{0,2,4,6,8,10,12}

Alternativ:

seq(2^x,x,1,5)→A

{2,4,8,16,32}

seq(2x,x,0,6)→B

{0,2,4,6,8,10,12}

A∪B und A∩B sowie A\B und B\A sind nicht programmierte Rechenoperationen im Betriebssystem des GTR, obwohl die Operationszeichen ∪, ∩ und \ im virtuellen Keyboard vorhanden sind.

per Hand:

A∪B={0,2,4,6,8,10,12,16,32}

A∩B={2,4,8}

A\B={16,32}

B\A={0,6,10,12}

Anmerkung:

vgl. auch Projekt zur Mengenlehre:

http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/

Bedienungsanleitung_Menge_Version_0_9_13.pdf

stop

1.1.17b)

$p\wedge({}_{no}q \rightarrow {}_{no}p) \rightarrow q$ (indirekter Schluss)

Wahrheitstafel:

p	q	${}_{no}p$	${}_{no}q$	${}_{no}q\rightarrow{}_{no}p$	$p\wedge({}_{no}q\rightarrow{}_{no}p)$	$p\wedge({}_{no}q\rightarrow{}_{no}p)\rightarrow q$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w

Anmerkung:

${}_{no}q\rightarrow{}_{no}p \Leftrightarrow p\rightarrow q$ (Kontraposition), somit

$p\wedge({}_{no}q\rightarrow{}_{no}p)\rightarrow q \Leftrightarrow p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$ (Abtrennungsregel)

z.B.:

p:="Ich beherrsche die Mathematik"

q:="Ich kann die Mathematikaufgabe lösen"

${}_{no}p$="Ich beherrsche die Mathematik nicht"

${}_{no}q$="Ich kann die Mathematikaufgabe nicht lösen"

${}_{no}q\rightarrow{}_{no}p$ bedeutet

aus "Ich kann die Mathematikaufgabe nicht lösen" folgt

"Ich beherrsche die Mathematik nicht"

diese Implikation ist nur falsch, wenn

aus "Ich kann die Mathematikaufgabe nicht lösen"

gefolgert wird "Ich beherrsche die Mathematik"

Die Konjunktion $p\wedge({}_{no}q\rightarrow{}_{no}p)$ ist immer falsch – es sei denn, beide Aussagen p und $({}_{no}q\rightarrow{}_{no}p)$ sind wahr.

Damit ist dann die letzte Impliktion immer wahr:
unter den Voraussetzungen p="Ich beherrsche die Mathematik"
und $({}_{no}q \rightarrow {}_{no}p)$=(aus "Ich kann die Mathematikaufgabe nicht lösen" folgt "Ich beherrsche die Mathematik nicht")
folgt stets q="Ich kann die Mathematikaufgabe lösen" als wahre Implikation,
egal wie der Wahrheitsgehalt der beteiligten Aussagen aussieht.
Damit ist die Gesamtaussage ein Tautologie.
stop

1.2. 1b)

$x^3-9x^2-4x+36>0$

$$x^3-9\cdot x^2-4\cdot x+36>0$$

solve(ans, x)

$$\{-2<x<2, 9<x\}$$

$L=(-2,2)\cup(9,\infty)$

schrittweise:

factor$(x^3-9x^2-4x+36)$

$$(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-9)$$

Es gibt 3 Nullstellen und $f(x)=x^3-9x^2-4x+36$ geht für $x\rightarrow-\infty$ nach $-\infty$ und für $x\rightarrow\infty$ nach ∞.

Damit ist der Term $x^3-9x^2-4x+36$ in den angezeigten

Intervallen positiv.

Alternativ: grafische Lösung für $f(x)=x^3-9x^2-4x+36>0$

grafische Lösung	Y1:… Y2:…

stop

1.2. 3k)

$$\frac{|2x-1|}{3x+1}<2$$

$$\frac{|2\cdot x-1|}{3\cdot x+1}<2$$

solve(ans, x)

$$\left\{x<-\frac{1}{3}, -\frac{1}{8}<x\right\}$$

$$\mathbf{L=(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(-\frac{1}{8},\infty)}$$

schrittweise:

$\mathbf{x\neq-\frac{1}{3}}$ (Nenner!)

Betragauflösung kritische Stelle $x=\frac{1}{2}$

Fall 1: $-\infty<x<-\frac{1}{3}$: $|2x-1|=1-2x$

Fall 2: $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$: $|2x-1|=1-2x$

Fall 3: $\frac{1}{2}\leq x<\infty$: $|2x-1|=2x-1$

zu Fall 1: $\frac{1-2x}{3x+1}<2 \rightarrow 1-2x>6x+2 \rightarrow x<-\frac{1}{3}<-\frac{1}{8}$

zu Fall 2: $\frac{1-2x}{3x+1}<2 \rightarrow 1-2x<6x+2 \rightarrow \frac{1}{2}>x>-\frac{1}{8}$

zu Fall 3: $\frac{2x-1}{3x+1}<2 \;\rightarrow\; 2x-1<6x+2 \;\rightarrow\; x\geq\frac{1}{2}>-\frac{1}{8}$

zusammenfassend:

$\mathbf{L=(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(-\frac{1}{8},\infty)}$

Alternativ: grafische Lösung für $f(x)=\frac{|2x-1|}{3x+1}<2$

grafische Lösung	Y1:… Y2:…

stop

1.2. 7e)

$\frac{1}{4}\log_{10}(x^5)+3\log_{10}(\sqrt{x})-3\log_{10}(\sqrt[4]{x})=2(\log_{10}(2)+\mathrm{lc}$ ▶

$$\frac{\log(x^5)}{4}+\frac{3\cdot\log(x)}{4}=2\cdot(\log(3)+\log(2))$$

simplify(ans)

$$\frac{\log(x^5)+3\cdot\log(x)}{4}=2\cdot\log(6)$$

ans|x>0

$$x=6$$

schrittweise: für x>0 gilt

$\frac{5}{4}\log_{10}(x)+\frac{3}{2}\log_{10}(x)-\frac{3}{4}\log_{10}(x)=\frac{8}{4}\log_{10}(x)$

und

$2(\log_{10}(2)+\log_{10}(3))=2\log_{10}(6)$

hieraus x=6 als eindeutige Lösung.

alternativ: Verify-Fenster

kontrollierte Termumformung	f(x)=

stop

1.2. 8d)

$\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+8}$ nur sinnvoll für $x\geq 0$

solve$(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+8}, x)$

$$\{x=1\}$$

schrittweise: für $x>0$ gilt

$(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+8})^2$

$$(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})^2=x+8$$

expand(ans)

$$2\cdot x+2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+3}+3=x+8$$

ans−2x−3

$$2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+3}=-x+5$$

ans^2

$$4\cdot x\cdot(x+3)=(x-5)^2$$

$\text{ans}-(x-5)^2$

$$-(x-5)^2+4\cdot x\cdot(x+3)=0$$

expand(ans)

$$3\cdot x^2+22\cdot x-25=0$$

solve(ans, x)

$$\left\{x=1, x=-\frac{25}{3}\right\}$$

$x=-\frac{25}{3}$ Scheinlösung!

alternativ: grafische Lösung

grafische Lösung	Y1:⋯ Y2:⋯

stop

1.2. 24b) für $a \neq 0$ und $b \neq 0$:

$\frac{b*x}{a}-\frac{a}{b}(a-b*x)-\frac{b}{a}(b*x-a)=1$

$$\frac{a\cdot(b\cdot x-a)}{b}-\frac{b\cdot(b\cdot x-a)}{a}+\frac{b\cdot x}{a}=1$$

solve(ans, x)

$$\left\{x=\frac{a}{b}\right\}$$

genauer:

simplify$\left(\frac{a\cdot(b\cdot x-a)}{b}-\frac{b\cdot(b\cdot x-a)}{a}+\frac{b\cdot x}{a}\right)$

$$\frac{-b^2\cdot x}{a}+a\cdot x-\frac{a^2}{b}+\frac{b\cdot x}{a}+b$$

factor(ans)$*a\cdot b=a\cdot b$

$$-b^3\cdot x+a^2\cdot b\cdot x-a^3+b^2\cdot x+a\cdot b^2=a\cdot b$$

ans$-a\cdot b^2+a^3$

$$-b^3\cdot x+a^2\cdot b\cdot x+b^2\cdot x=a^3-a\cdot b^2+a\cdot b$$

factor(ans)

$$b\cdot x\cdot\left(a^2-b^2+b\right)=a\cdot\left(a^2-b^2+b\right)$$

Falls $a^2-b^2+b=0$ ist x bel. wählbar, d.h.

$a^2-b^2+b=0$

Lösung: für $a \neq 0$ und $b \neq 0$:

$x=\frac{a}{b}$ für $a^2-b^2+b \neq 0$ oder $x \in \mathbf{R}$ für $a^2-b^2+b=0$

stop

1.3. 1c)

y(x)=ln(x^2-2x-3)

$$y(x)=\ln\left(x^2-2\cdot x-3\right)$$

solve(x^2-2x-3>0, x)

$$\{x<-1, 3<x\}$$

Lösung: $D=(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$

stop

1.3.8a) Horner-Schema

Define f(x)=x^4-3.5x^3-7x^2+1

done

f(1.5)

$$-\frac{43}{2}$$

approx(ans)

$$-21.5$$

f(x)=(((x-3.5)*x-7)*x-0)*x+1

$$x^4-\frac{7\cdot x^3}{2}-7\cdot x^2+1=x^2\cdot\left(x\cdot\left(x-\frac{7}{2}\right)-7\right)+1$$

simplify(ans)

$$x^4-\frac{7\cdot x^3}{2}-7\cdot x^2+1=x^4-\frac{7\cdot x^3}{2}-7\cdot x^2+1$$

(((1.5-3.5)*1.5-7)*1.5-0)*1.5+1=

(((-2)*1.5-7)*1.5-0)*1.5+1=

((-3-7)*1.5-0)*1.5+1=

((-10)*1.5-0)*1.5+1=

(-15)*1.5+1=

-22.5+1=-21.5

stop

1.3.12 Interpolationspolynom

geg. 6 Nullstellen: $x_n\in\{\pm1,\pm2,\pm3\}$ und $y(0)=-1$

ges. Polynom

Ansatz mit Linearfaktoren

Define $y(x)=\prod_{k=-3}^{-1}((x-k))*\prod_{k=1}^{3}((x-k))$

done

y(0)

−36

Ergebnis: $y=f(x)=\frac{1}{36}*\prod_{k=-3}^{-1}((x-k))*\prod_{k=1}^{3}((x-k))$

Define $y10(x)=\frac{1}{36}*\prod_{k=-3}^{-1}((x-k))*\prod_{k=1}^{3}((x-k))$

done

2D−Grafik	Y1:… Y2:…

simplify(y10(x))

$$\frac{x^6-14\cdot x^4+49\cdot x^2-36}{36}$$

expand(ans)

$$\frac{x^6}{36}-\frac{7\cdot x^4}{18}+\frac{49\cdot x^2}{36}-1$$

stop

1.3. 24f)

y=ln(sin(x))

y=ln(sin(x))

solve(sin(x)>0, x)

$\{2\cdot\pi\cdot\text{constn}(1)<x<2\cdot\pi\cdot\text{constn}(1)+\pi\}$

Def.−Bereich: $D=\{x\,|\,2\cdot\pi\cdot k<x<2\cdot\pi\cdot k+\pi, k\in N\}$,

$N=\{0,1,2,...\}$

Define y8(x)=ln(sin(x))

done

2D–Grafik

streng mon. wachsend: $\{x|0<x\le\frac{\pi}{2}\}$

und streng mon. fallend: $\{x|\frac{\pi}{2}<x<\pi\}$

solve(y=ln(sin(x)),x)

$\{x=-\sin^{-1}(e^{y})+2\cdot\pi\cdot\text{constn}(1)+\pi, x=\sin^{-1}(e^{y})+2\cdot\pi\cdot\text{constn}$

Umkehrfkt. für $\{y|0<y\le\frac{\pi}{2}\}$: $y=f^{-1}(x)=\arcsin(e^{x})$,

$x\in(-\infty,0]$

Define $y9(x)=\sin^{-1}(e^{x})$

done

stop

1.3.36 (Lemniskate, Schleifenkuve)

(x^2+y^2)^2-2x*y=0

$$(x^{2}+y^{2})^{2}-2\cdot x\cdot y=0$$

ans|{x=r*cos(φ),y=r*sin(φ)}

$$(r^{2}\cdot(\cos(\varphi))^{2}+r^{2}\cdot(\sin(\varphi))^{2})^{2}-2\cdot r^{2}\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)=0$$

simplify(ans)

$$r^{4}-r^{2}\cdot\sin(2\cdot\varphi)=0$$

solve(ans,r)

$$\{r=0, r=-\sqrt{\sin(2\cdot\varphi)}, r=\sqrt{\sin(2\cdot\varphi)}\}$$

Lösung: $r(\varphi)=\sqrt{\sin(2\cdot\varphi)}$

expand((x^2+y^2)^2-2x*y=0)

$$x^4+y^4+2\cdot x^2\cdot y^2-2\cdot x\cdot y=0$$

Define xt7(t)=$\sqrt{\sin(2\cdot t)}$*cos(t)

done

Define yt7(t)=$\sqrt{\sin(2\cdot t)}$*sin(t)

done

2D-Grafik

Define z1(x, y)=$x^4+y^4+2\cdot x^2\cdot y^2-2\cdot x\cdot y$

done

$x^4+y^4+2\cdot x^2\cdot y^2-2\cdot x\cdot y$ | {x=s*cos(t), y=s*sin(t)}

$$s^4\cdot(\cos(t))^4+s^4\cdot(\sin(t))^4+2\cdot s^4\cdot(\cos(t))^2\cdot(\sin(t))^2-$$

simplify(ans)

$$s^4-s^2\cdot\sin(2\cdot t)$$

Define Xst2(s, t)=s*cos(t)

done

Define Yst2(s, t)=s*sin(t)

done

Define Zst2(s, t)=$s^4-s^2\cdot\sin(2\cdot t)$

done

3D-Grafik

stop

1.3. 36 (Lemniskate, Schleifenkuve)

Zusatz Drehung des Koordinatensystems um 45°:

Drehmatrix

$$\begin{bmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$ans*\begin{bmatrix} xa \\ ya \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\cdot xa}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot ya}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\cdot xa}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot ya}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^4+y^4+2\cdot x^2\cdot y^2-2\cdot x\cdot y=0\,|\,\{x=\frac{\sqrt{2}\cdot xa}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot ya}{2},\ y=\frac{\sqrt{2}\cdot xa}{2}+\cdot$$ ▶

$$\left(\frac{\sqrt{2}\cdot xa}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot ya}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{2}\cdot xa}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot ya}{2}\right)^4+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot xa}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot ya}{2}\right.$$ ▶

simplify(ans) | {xa=x, ya=y}

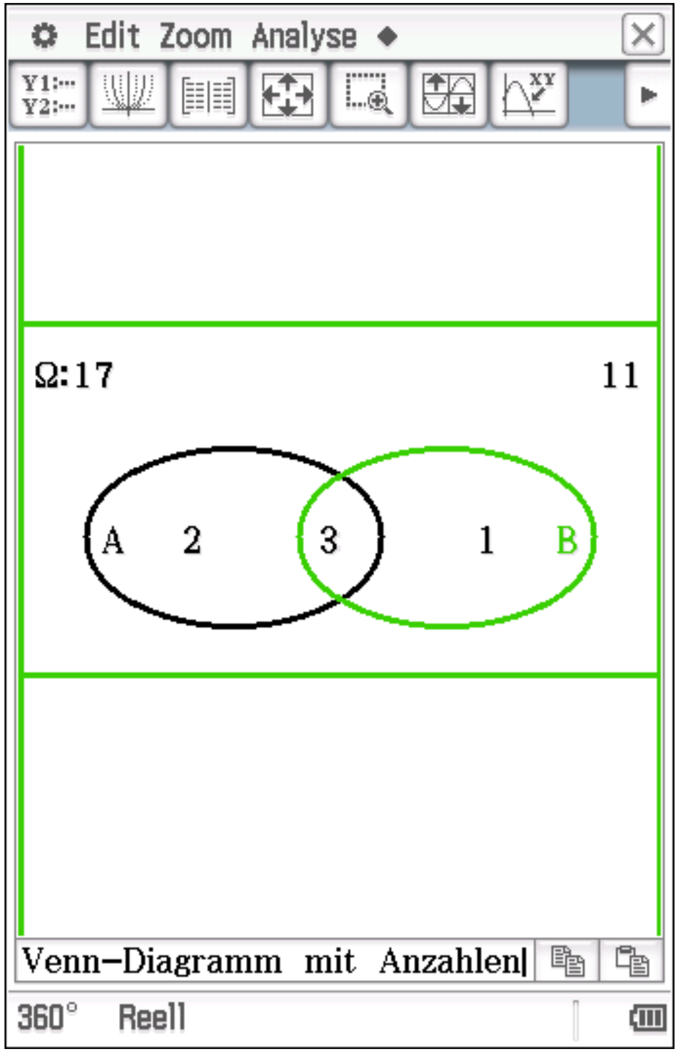
$$x^4+y^4+2\cdot x^2\cdot y^2-x^2+y^2=0$$

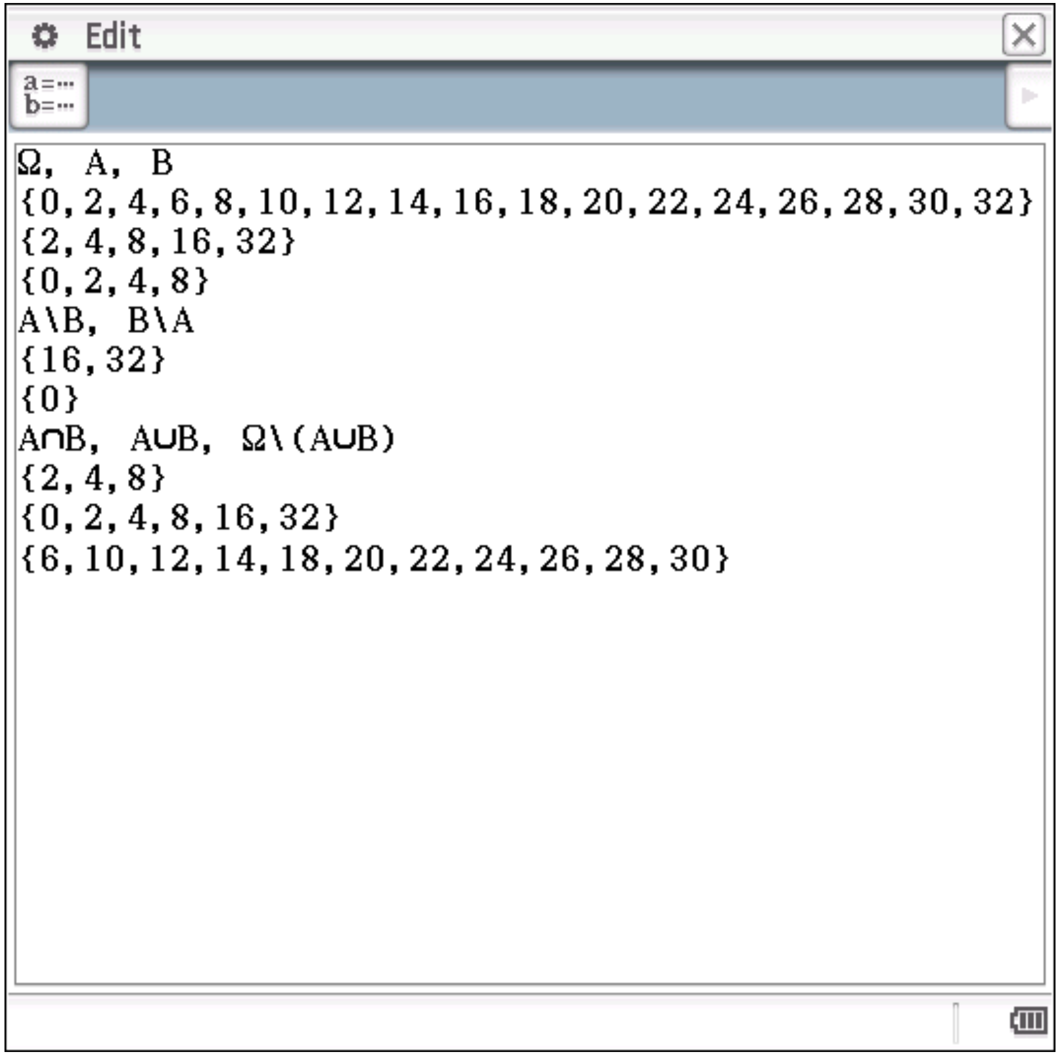
$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

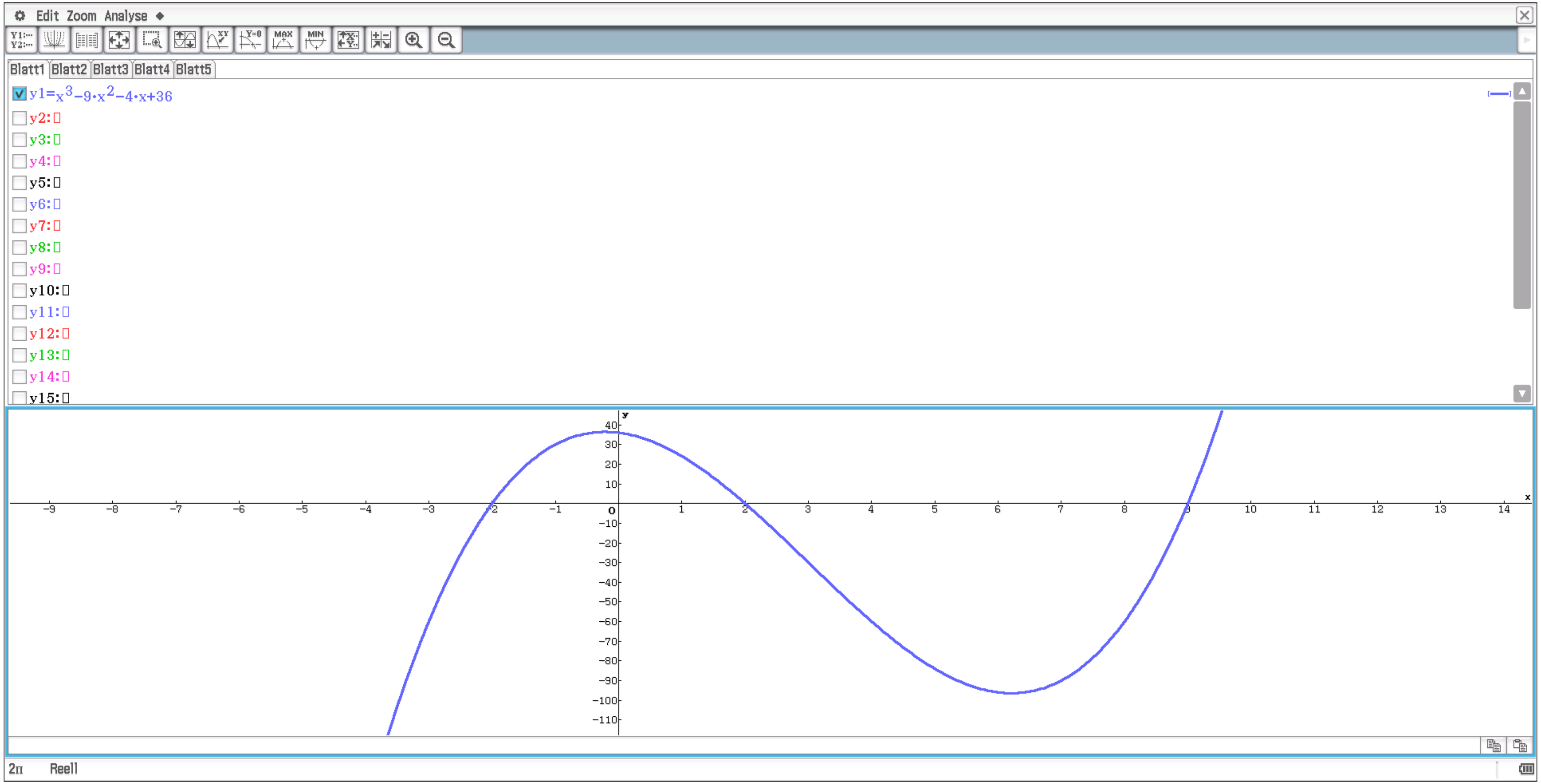
Normalform der Lemniskate (Schleifenkuve)

stop

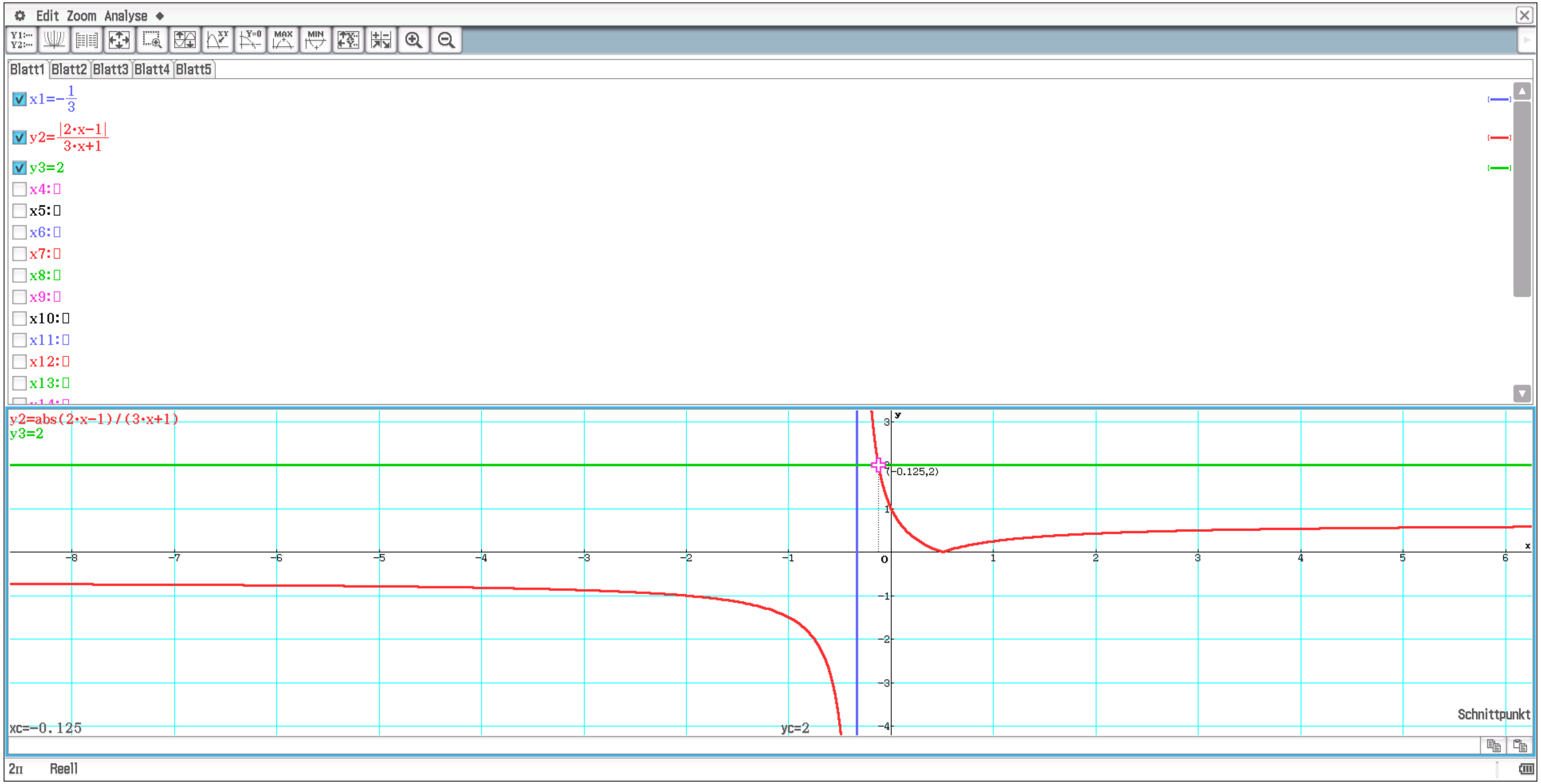




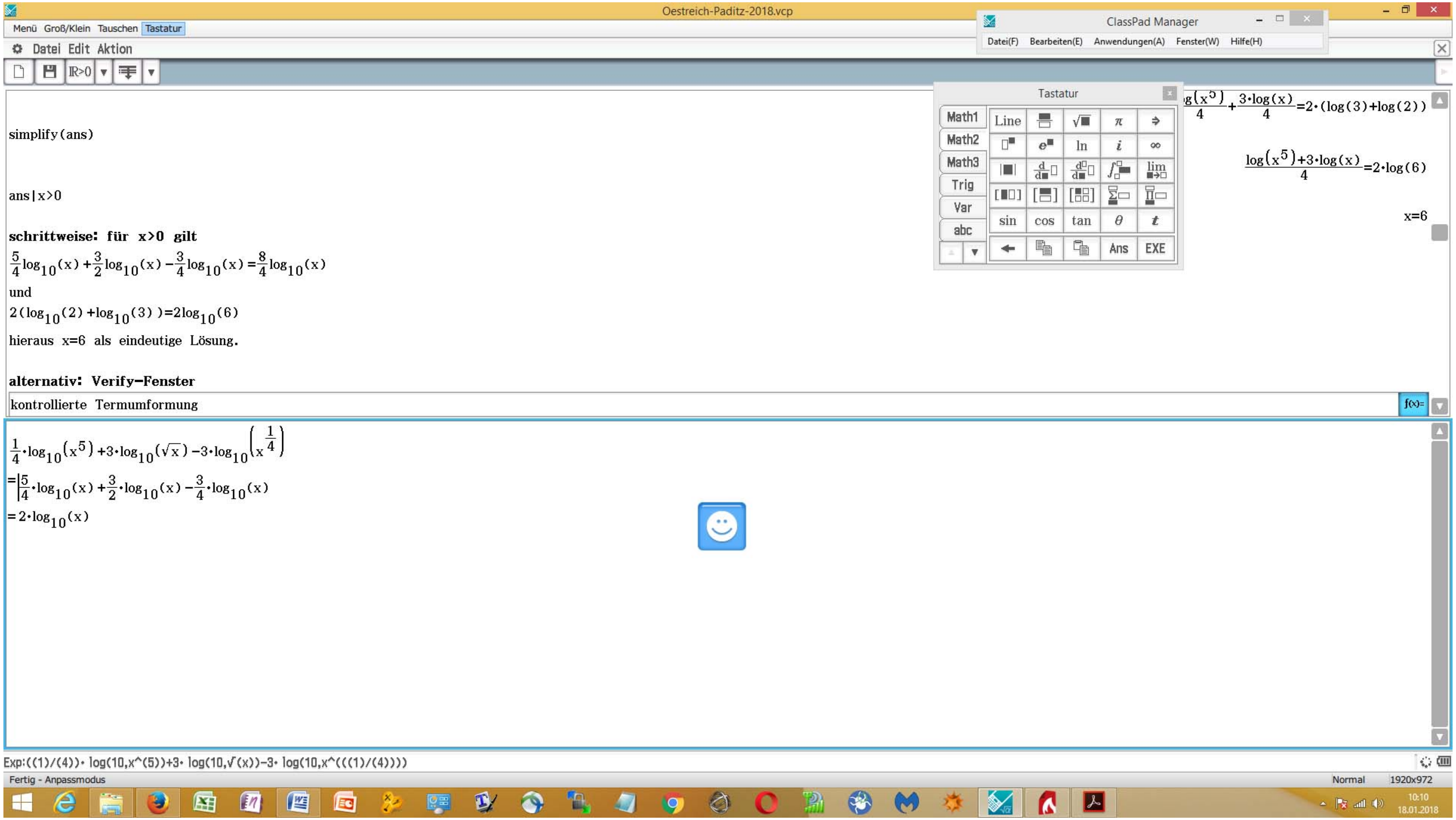
Grafik zu **1.1.**12: Rechenoperationen mit zwei Teilmengen A, B innerhalb einer Grundmenge Ω



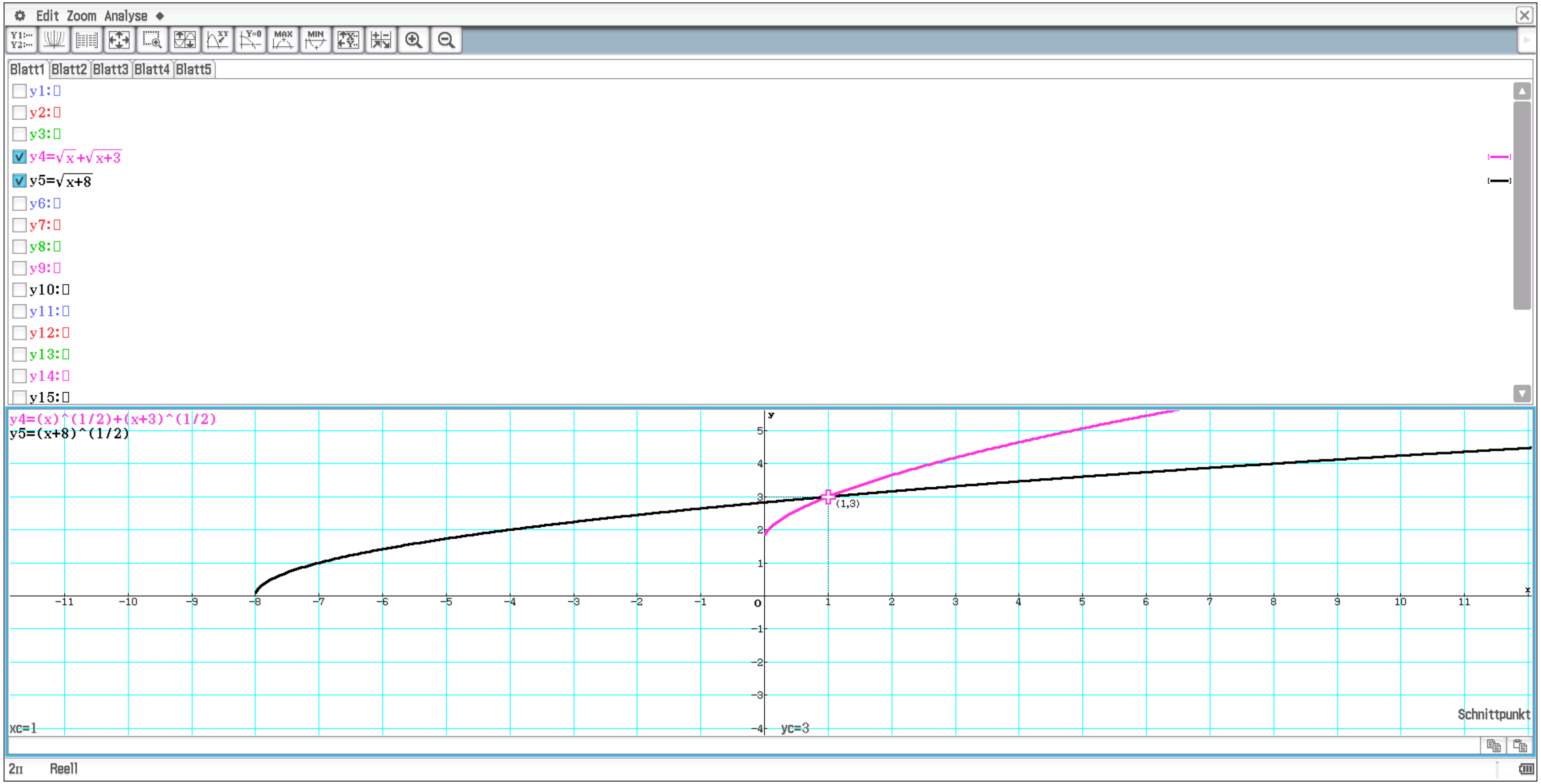
Grafik zu **1.2.**1b



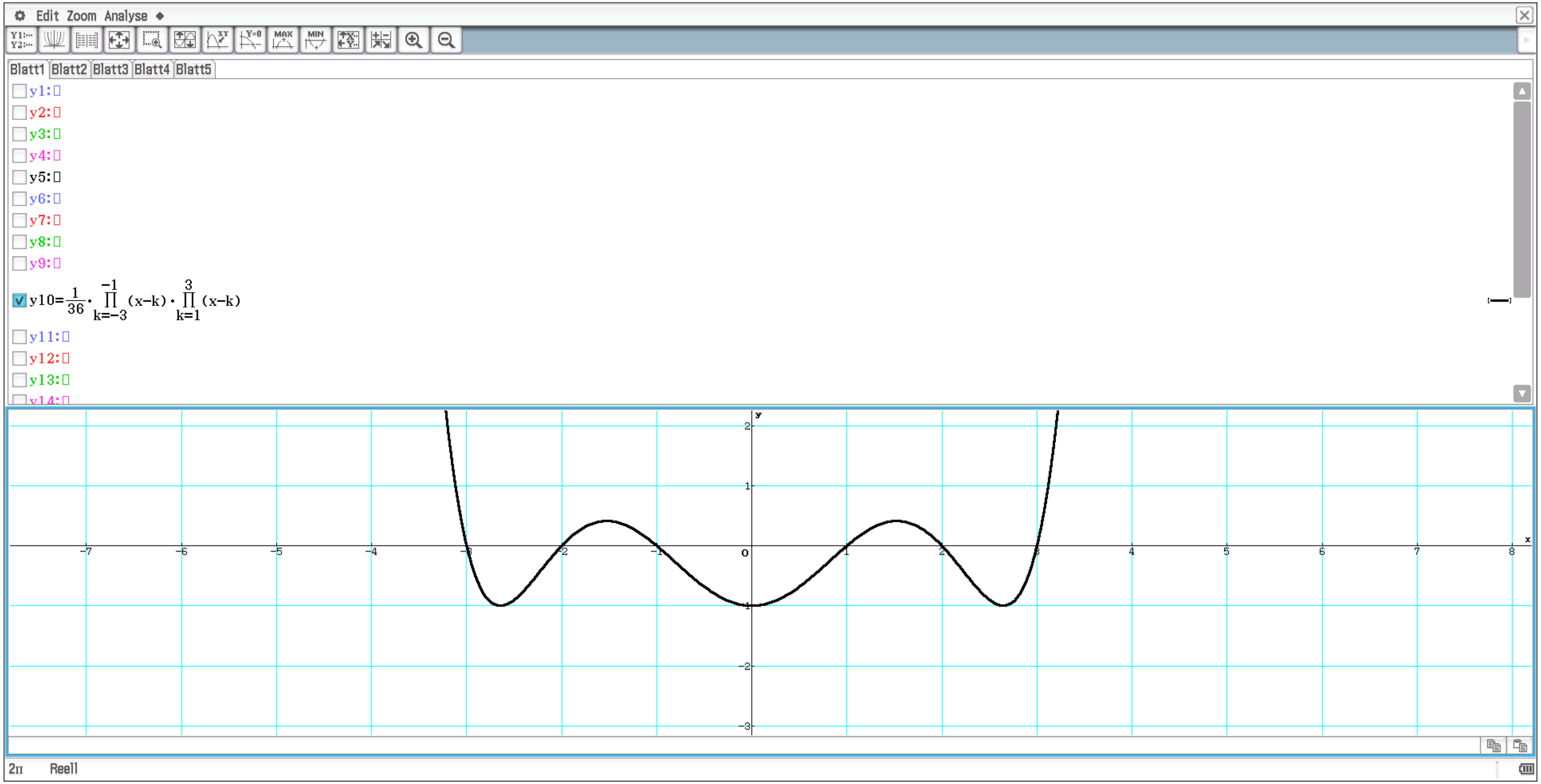
Grafik zu **1.2.**3k



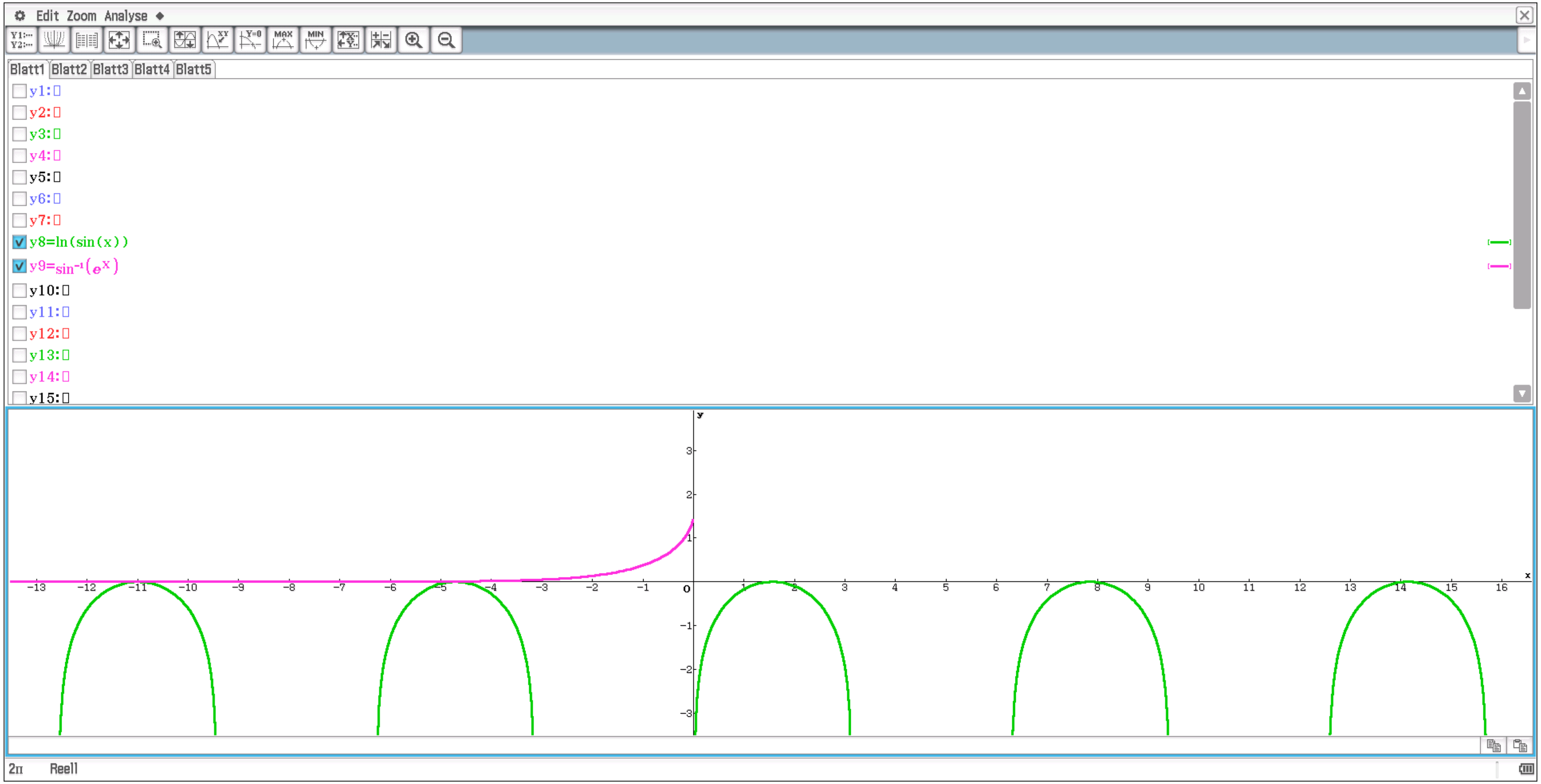
Grafik zu **1.2.**7e



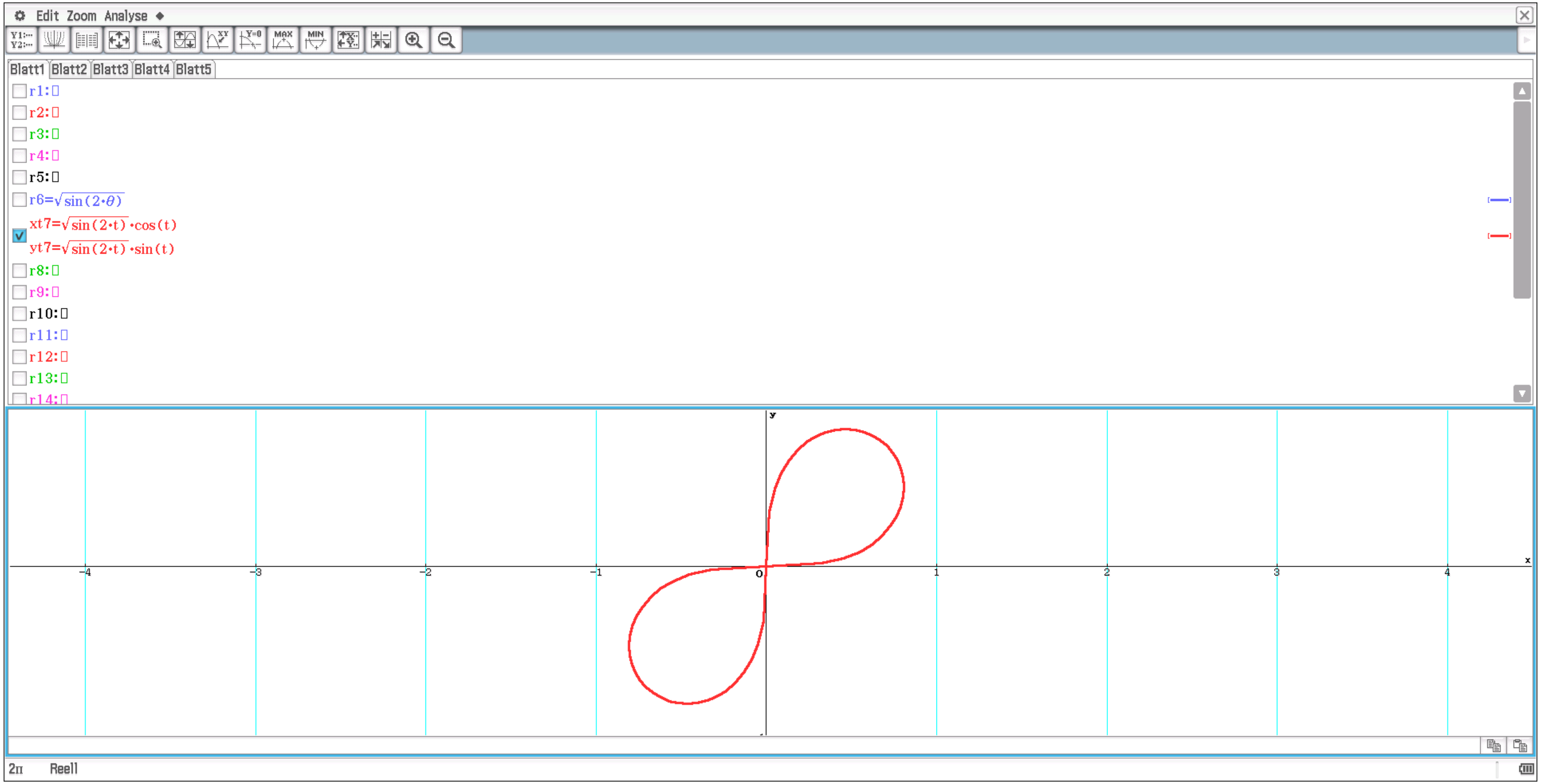
Grafik zu **1.2.**8d



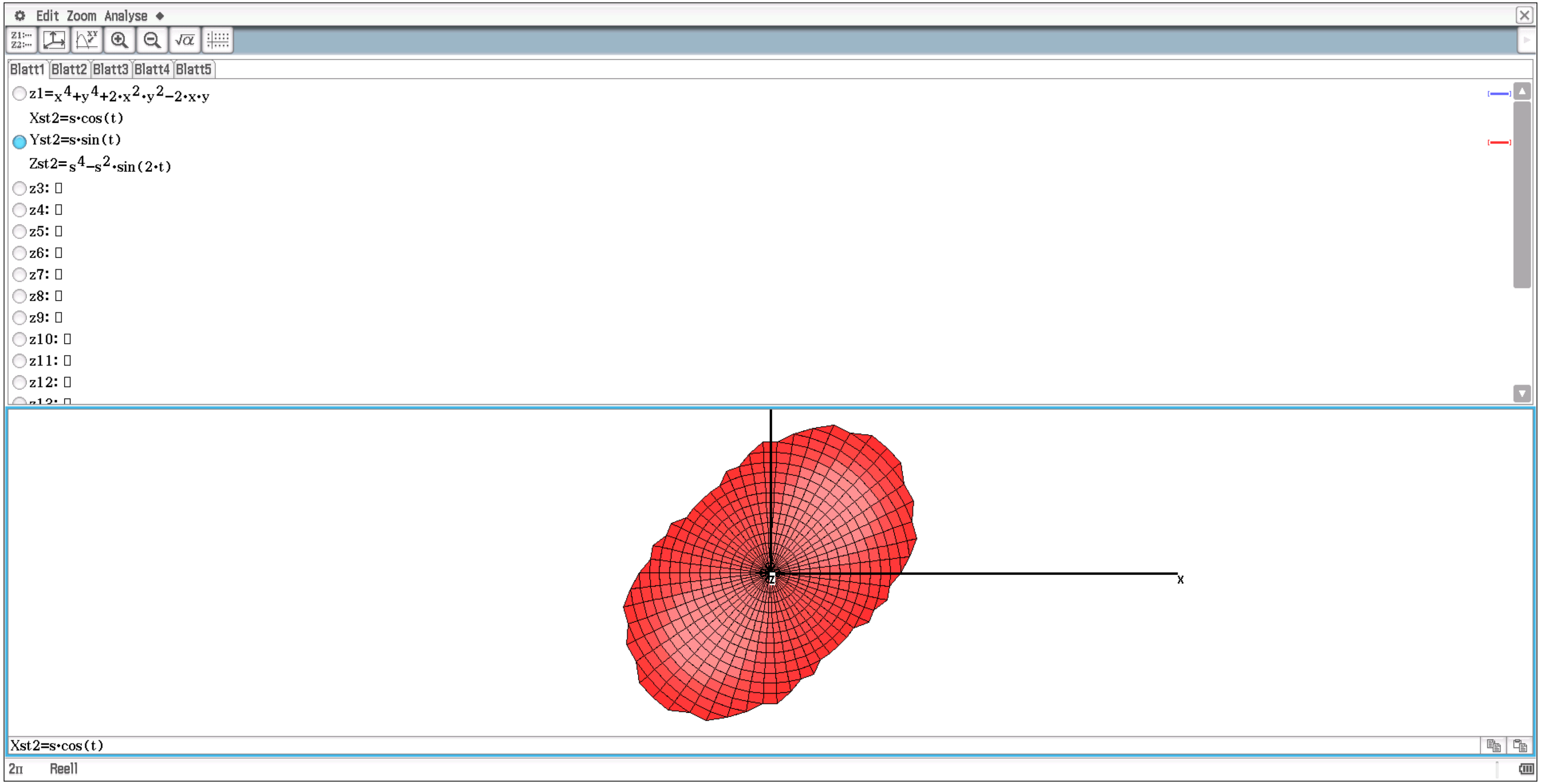
Grafik zu **1.3.**12



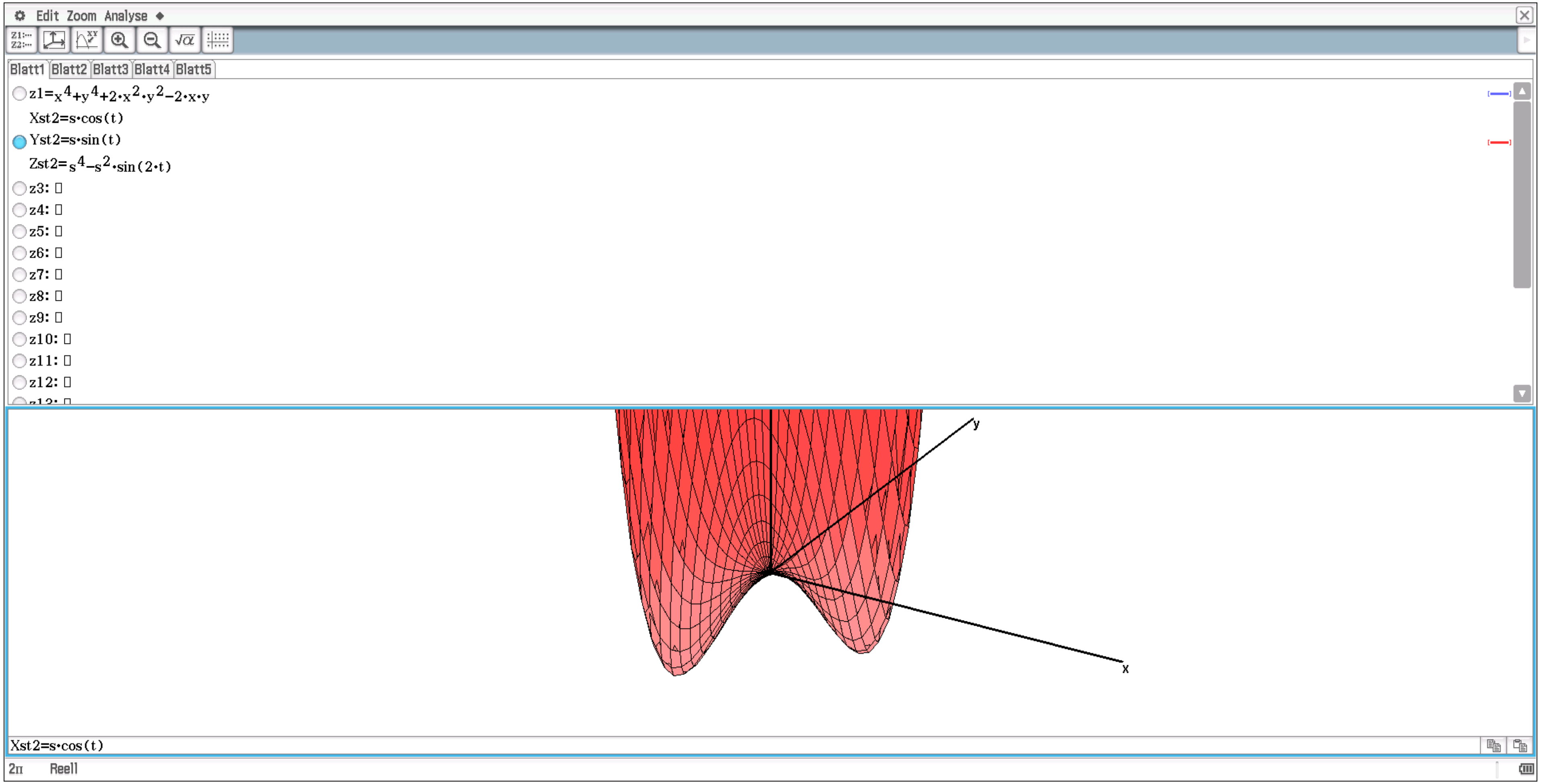
Grafik zu **1.3.**24f



Grafik zu **1.3.**36



Grafik zu **1.3.**36



Grafik zu **1.3.**36 (gekrümmte Oberfläche im Raum, die mit zwei Tiefpunkten nach unten „durchhängt“)