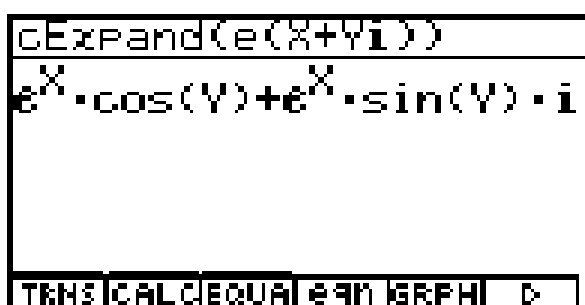


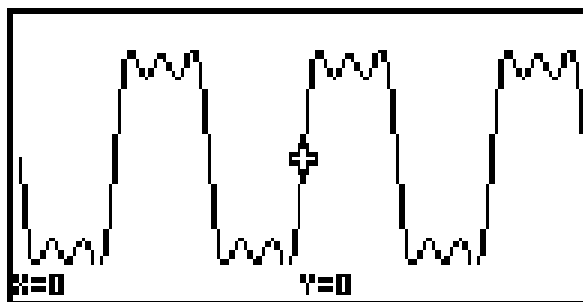
Rechnen und graphische Darstellungen mit komplexen Zahlen

Autor: Prof. Dr. Ludwig Paditz

Anwendungsbeispiele aus Schule und Studium für den ALGEBRA FX 2.0

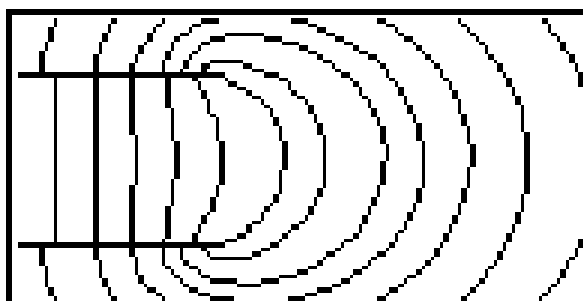


Eulersche Formel



Fourier-
Analyse

Plattenkondensator
(Feldlinien)



CASIO Europe GmbH (Hrsg.)

© CASIO Europe GmbH, Norderstedt 2004.
2. korrigierte Auflage, August 2004.
Alle Rechte vorbehalten.

Internetadresse: <http://www.casio-europe.com>

Text und Abbildungen wurden mit größter Sorgfalt erarbeitet. Für eventuell verbleibende Fehler und deren Folgen kann keine Haftung übernommen werden.

Umschlaggestaltung: CONSEQUENCE Werbung und Kommunikation GmbH, Hamburg
Layoutgestaltung: Prof. Dr. Ludwig Paditz, Dresden
Druck und Bindung: Contaq Repro und Produktion GmbH, Hamburg

CASIO ist ein eingetragenes Warenzeichen.

Einleitung

Moderner Mathematikunterricht in Schule oder Studium ist ohne elektronische Rechenhilfsmittel undenkbar geworden.

Obwohl es sich dabei oftmals um klassische Lehrinhalte handelt, mit denen sich schon frühere Schüler- und Studentengenerationen auseinandersetzen mußten, unterliegt auch die Darstellung mathematischer Lehrinhalte einem Wandel und wird von den Erfordernissen unserer Zeit mitbestimmt:

Anspruchsvollere Aufgaben sind zu lösen, die nicht mehr nur mit Zettel und Bleistift bewältigt werden können.

Schüler technischer Gymnasien oder Fachoberschulen und auch zukünftige Ingenieure insbesondere auf den Gebieten der Kommunikationstechnik, der Elektrotechnik, der Automatisierungs- und Computertechnik und verwandter Gebiete lernen spätestens in der mathematischen Grundlagenausbildung ihres Studiums die komplexen Zahlen kennen.

Praxisorientierte Mathematikausbildung bedeutet nicht nur Berücksichtigung praktischer Anwendungsbeispiele und Computerpraktikum sondern auch Berücksichtigung international üblicher Standards zur Mathematik und insbesondere von DIN-Empfehlungen hier speziell beim Umgang mit komplexen Zahlen.

Mit dem vorliegenden Buch wird der Versuch unternommen, dem formulierten Anspruchsniveau eines modernen Mathematikunterrichts nahezukommen, indem zum zielgerichteten Einsatz des ALGEBRA FX 2.0 Unterrichtsempfehlungen für das Rechnen mit komplexen Zahlen gegeben werden.

Schnell stellt man fest, dass der ALGEBRA FX 2.0 "DIN-gerecht" programmiert ist.

Lehrer wie auch Schüler und Studenten finden anhand der ausführlich dargestellten und erprobten Unterrichtsbeispiele Anregungen zum Umgang mit dem ALGEBRA FX 2.0 und können so ihre Kenntnisse über komplexe Zahlen festigen und vertiefen.

Neben dem numerischen Rechnen mit komplexen Zahlen wird auch auf graphische Darstellungsmöglichkeiten in der Gaußschen Zahlenebene eingegangen und schließlich werden im CAS-Menü symbolische Umformungen mit komplexen Zahlen und entsprechende Formelstrukturen erläutert.

So erweist sich der ALGEBRA FX 2.0 auch im Bereich der komplexen Zahlen als nützliches elektronisches Rechenhilfsmittel für anspruchsvolle Aufgaben, die in der Unterrichtsstunde oder zu Hause im Selbststudium erarbeitet werden können, insbesondere auch dann, wenn aus Zeitgründen ein Computerlabor nicht aufgesucht werden kann oder im Stundenplan nicht vorgesehen ist.

Der Leser lernt die Arbeit in unterschiedlichen Menüs des ALGEBRA FX 2.0 (z.B. RUN·MAT-Menü (numerisches Rechnen), GRPH·TBL-Menü (Funktionsplots), STAT-Menü (Scatterplots) und CAS-Menü (symbolisches Rechnen) sowie EQUA-Menü (Gleichungen

und Gleichungssysteme)) innerhalb einer komplexen Aufgabenstellung kennen, wenn gleichzeitig numerische, graphische und symbolische Lösungswege dargestellt werden. An vielen Stellen werden Hintergrundbilder erzeugt, um die grafischen Darstellungen noch eindrucksvoller zu gestalten.

Der ALGEBRA FX 2.0 erweist sich in didaktischer Hinsicht als besonders nützliches elektronisches Hilfsmittel: Der Anwender muß zunächst selbst die Lösungsstrategie zur Aufgabe entwickeln und die Rechenschritte festlegen. Dann erfolgt der Einsatz entsprechender Taschenrechnerbefehle in vorher auszuwählenden Menüs.

Dieses interaktive Arbeiten ist für den Lernprozeß besonders wertvoll:

Der Schüler bekommt nicht sofort das fertige Endergebnis ohne den Lösungsweg zu kennen, sondern er muß den erdachten Lösungsweg Schritt für Schritt mit seinem Taschenrechner umsetzen. Der Schüler trainiert dabei die Lösungswege und der Taschenrechner sorgt für fehlerfreie Zwischenergebnisse und anschauliche graphische Darstellungen, die ohne den Graphik-Taschenrechner nicht so einfach zu finden sind. Der Formelhintergrund kann dabei im CAS-Menü bereitgestellt und abgespeichert werden.

Für das Verständnis dieses Buches werden Grundkenntnisse im Umgang mit dem ALGEBRA FX 2.0 vorausgesetzt.

Text und Abbildungen wurden auf Grundlage der zurzeit vorliegenden Produktversion des ALGEBRA FX 2.0 mit größter Sorgfalt erarbeitet. Hinweise und Anregungen, die sich durch die Arbeit mit diesem Buch ergeben werden, nehmen der Herausgeber wie auch der Autor jederzeit gern entgegen.

Für eventuell enthaltene Fehler kann keine Haftung übernommen werden.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Dies betrifft auch die Übersetzung und die Vervielfältigung oder die Verbreitung unter Verwendung elektronischer Systeme, sowie die Vervielfältigung für Zwecke der Unterrichtsgestaltung ohne schriftliche Genehmigung des Herausgebers.

In der 2. Auflage dieses Buches wurden bekannt gewordene Druckfehler korrigiert.

Dresden, im August 2004

Prof. Dr. Ludwig Paditz

Kontaktadresse des Autors:

Hochschule für Technik und Wirtschaft (FH)
FB Informatik/Mathematik
Friedrich-List-Platz 1
D-01069 Dresden

paditz@informatik.htw-dresden.de
<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/>

Inhaltsverzeichnis

1. Definition und Darstellungsformen komplexer Zahlen (Addition und Multiplikation) 7



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Was ist eine unendlich große komplexe Zahl (im Reellen kennt man $+\infty$ und $-\infty$) ?

2. Herleitung der Umkehroperationen zu “+” und “·” (Subtraktion und Division) 13

3. Die Potenz z^N einer komplexen Basis z 16



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Wie erkennt man bei gleichen Potenzwerten z^N von welcher Basis z ausgegangen wurde ?

4. Die Potenz e^z mit einem komplexen Exponenten z 21



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Warum ist die komplexe e -Funktion eine periodische Funktion ?

5. Die N -te Wurzel einer komplexen Zahl z (Haupt- und Nebenwurzeln) 24



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Warum ist -2 nicht die komplexe Hauptwurzel der Aufgabe $(-8)^{1/3}$?

Warum erhält man für die Aufgabe $(-8)^{1/3}$ im **Real**-Modus bzw. **Complex**-Modus unterschiedliche Ergebnisse?

Warum erhält man beim Wurzelziehen im Komplexen mit dem Taschenrechner stets nur Zahlen im I. oder IV. Quadranten?

6. Der komplexe Logarithmus einer komplexen Zahl z (Haupt- und Nebenwerte) 30



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Warum erhält man beim Logarithmieren im Komplexen mit dem Taschenrechner stets nur Zahlen in einem waagerechten Parallelstreifen um die x -Achse?

7. Eine Bemerkung zur komplexen Signum-Funktion (Vorzeichenfunktion) 35



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Wie berechnet man das „Vorzeichen“ einer komplexen Zahl z ?

8. Die allgemeine Potenz $z_1^{z_2}$ (Haupt- und Nebenwerte)	37
 Was den Schüler hier besonders interessiert: Warum ist die allgemeine Potenz $z_1^{z_2}$ unendlich vieldeutig?	
9. Die komplexen trigonometrischen Funktionen $w = \sin(z)$ und $w = \cos(z)$	43
 Was den Schüler hier besonders interessiert: Warum sind die trigonometrischen Funktionen $w = \sin(z)$ und $w = \cos(z)$ unbeschränkt ?	
10. Bemerkungen zu den komplexen Arcusfunktionen	48
 Was den Schüler hier besonders interessiert: Wie ist die Umkehrabbildung der nicht eineindeutigen sin -Funktion definiert?	
11. Die hyperbolischen Funktionen im komplexen Zahlenbereich	51
12. Komplexe Polynome, deren Nullstellen und Faktorisierung in Linearfaktoren	53
13. Komplexe Fourierreihen und Integration (Parameterintegrale)	57
14. Analytische Funktionen und partielle Ableitungen	60
15. Graphische Darstellung von Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene	62
16. Kurven in der Gaußschen Zahlenebene und deren komplexe Parameterdarstellungen	65
17. Komplexe Matrizen, Determinanten sowie Gleichungssysteme	70
18. (Keine) Scherzaufgaben mit komplexen Zahlen - “ Wo steckt der Fehler ? ”	72
Lösungshinweise zu den weiterführenden Aufgaben der einzelnen Kapitel	74
Stichwortverzeichnis	98

KAPITEL 1

Definition und Darstellungsformen komplexer Zahlen (Addition und Multiplikation)



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Was ist eine unendlich große komplexe Zahl (im Reellen kennt man $+\infty$ und $-\infty$) ?

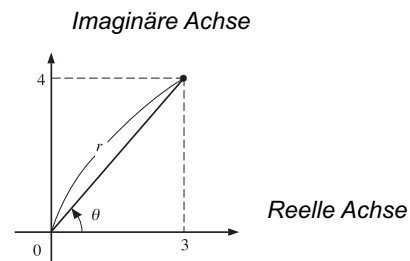
Der Taschenrechner interpretiert jede komplexe Zahl z in der Form $z = a + b \cdot i$ als Punkt oder Koordinatenpaar (a, b) in der Gaußschen Zahlenebene und berechnet den Betrag (Absolutwert) $r = |z|$ und das Argument (Winkel) $\theta = \arg(z)$ mit Hilfe des Koordinatenpaares (a, b) .

Beispiel:

Zu berechnen sind der Betrag (r) und das Argument (θ) für die komplexe Zahl $3 + 4 \cdot i$, wobei der Winkelmodus auf Altgrad eingestellt werden soll.

Hinweis zur Wahl des Zahlensystems ("Mode"):

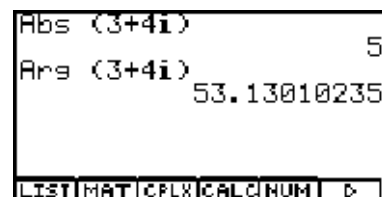
Wählen Sie in der Einstellanzeige (SET UP) für "Mode" unbedingt "Comp"!



Im **RUN·MAT-Menü** werden die Funktionstasten **[OPTN]** **[F3]** **[CPLX]**-[1:Abs]/[2:Arg] benutzt, nachdem zuvor über die Tastenfolge **[CTRL]** **[F3]** **[SET UP]** der Zahlenmodus (komplexen Zahlen in arithmetischer Darstellung $a+bi$) und der Winkelmodus (Altgrad **Deg**) voreingestellt wurden:

[AC] **[OPTN]** **[F3]** (CPLX) **[1]** (Abs)
[C] **[3]** **+** **[4]** **[SHIFT]** **[0]** (i) **[EXE]**
(Berechnung des Betrages (Absolutwertes))

[AC] **[OPTN]** **[F3]** (CPLX) **[2]** (Arg)
[C] **[3]** **+** **[4]** **[SHIFT]** **[0]** (i) **[EXE]**
(Berechnung des Arguments (Winkels))



Mit Beispielen stellt man sofort fest, dass die Winkel stets im Bereich von $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$, dem sogenannten **Hauptargumentbereich**, ausgegeben werden (entsprechend im Bogenmaß von $-\pi < \theta \leq \pi$). Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt stets $0 \leq r < \infty$ und damit lautet die Antwort auf die Eingangs gestellte Frage: Sobald unter einem beliebigen Winkel der Betrag unendlich groß wird, handelt es sich um eine unendlich große komplexe Zahl, die symbolisch mit $z = \infty$ bezeichnet wird.



Damit gibt es in \mathbb{C} nur ein (vorzeichenloses und richtungsloses) Unendlich!

Mit $\mathbb{C} = \{ z = (a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R} \} = \{ z = a+bi \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } i^2 = -1 \}$ wird die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet. In der Algebra spricht man auch vom Körper der komplexen Zahlen.

Aus algebraischer Sicht ist der Zahlenkörper $C = \{ z = (a, b) \mid a \in R \text{ und } b \in R \}$ durch folgende drei Eigenschaften definiert (weitere Rechenoperationen werden nachträglich abgeleitet und müssen nicht per Definition festgelegt werden):

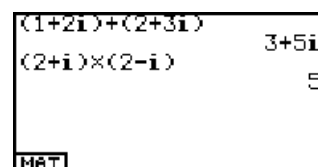
- | | |
|---------------------------|---|
| ① Gleichheitseigenschaft: | $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2$ |
| ② Additionsregel: | $z_1 + z_2 := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ |
| ③ Multiplikationsregel: | $z_1 \cdot z_2 := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$ |

Beispiel (Additionsregel im RUN·MAT-Menü):

Gegeben sind die Zahlen $z_1 = (1, 2) = 1 + 2i$ und $z_2 = (2, 3) = 2 + 3i$. Zu berechnen ist $z_1 + z_2$ nach der Additionsregel. Mit der Tastenfolge

AC **(** **1** **+** **2** **SHIFT** **0** **(i)** **)** **+** **(** **2** **+** **3** **SHIFT** **0** **(i)** **)** **EXE**

erhält man das gewünschte Ergebnis $z_1 + z_2 = (1+2) + (2+3)i = 3 + 5i$.

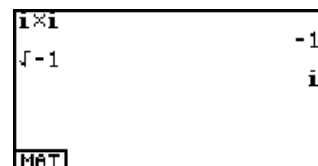


Beispiel (Multiplikationsregel im RUN·MAT-Menü):

Gegeben sind die Zahlen $z_1 = (2, 1) = 2 + i$ und $z_2 = (2, -1) = 2 - i$. Zu berechnen ist $z_1 \cdot z_2$ nach der Multiplikationsregel. Mit der Tastenfolge

AC **(** **2** **+** **SHIFT** **0** **(i)** **)** **×** **(** **2** **-** **SHIFT** **0** **(i)** **)** **EXE**

erhält man das gewünschte Ergebnis $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2)i = 5$.

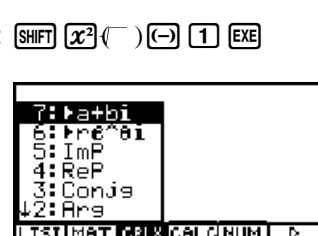


Beispiel (Multiplikationsregel im RUN·MAT-Menü):

Gegeben sind die Zahlen $z_1 = (0, 1) = i$ und $z_2 = (0, 1) = i$ (imaginäre Einheit). Zu berechnen ist $z_1 \cdot z_2$ nach der Multiplikationsregel. Mit der Tastenfolge

AC **SHIFT** **0** **(i)** **×** **SHIFT** **0** **(i)** **EXE**

erhält man das gewünschte Ergebnis $z_1 \cdot z_2 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1$.



Hinweis: Wegen $i \cdot i = -1$ wird i auch als Hauptwurzel von -1 bezeichnet: **SHIFT** **x²** **(√)** **(-)** **1** **EXE**

Weitere Befehle im RUN·MAT-Menü:

Im Zahlenpaar $z = (a, b)$ ($z = a + i \cdot b$) heißt die erste reelle Koordinate a **Realteil** von z , kurz $a = \text{Re}(z)$, die zweite reelle Koordinate b **Imaginärteil** von z , kurz $b = \text{Im}(z)$. Taschenrechnersymbolik: **ReP**(z) bzw. **ImP**(z)



Beispiel:

Zu berechnen sind der Realteil und der Imaginärteil der Zahl $z = 2 + 5i$:

AC **OPTN** **F3** **(CPLX)** **4** **(ReP)**
(**2** **+** **5** **SHIFT** **0** **(i)** **)** **EXE**
 (Berechnung des Realteils)

ReP (2+5i) **2**

AC **OPTN** **F3** **(CPLX)** **5** **(ImP)**
(**2** **+** **5** **SHIFT** **0** **(i)** **)** **EXE**
 (Berechnung des Imaginärteils)

ImP (2+5i) **5**

Zum Zahlenpaar $z = (a, b)$ ($z = a + b \cdot i$) heißt die Zahl $\bar{z} = (a, -b)$ ($\bar{z} = a - b \cdot i$) die zu z konjugiert komplexe Zahl. Taschenrechnersymbolik: **Conjg**(z)

Beispiel:

Zu berechnen ist die konjugiert komplexe Zahl zur komplexen Zahl $z = 2 + 4i$:

AC **OPTN** **F3** **(CPLX)** **3** **(Conjg)**
(**2** **+** **4** **SHIFT** **0** **(i)** **)** **EXE**

Conjg (2+4i) **2-4i**

Beispiel (Gleichheitseigenschaft):

Nachzuprüfen ist die folgende Gleichheit: $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$

Die Multiplikationsregel ergibt zunächst auf der linken Seite die Koordinaten (Realteil und Imaginärteil)

$$a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \quad \text{und} \quad a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 = \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2$$

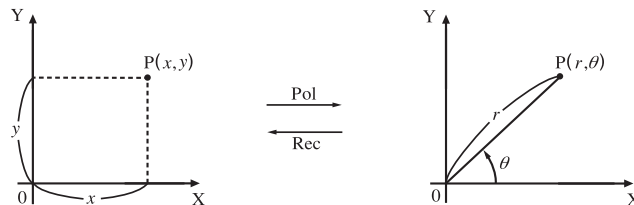
dann im Vergleich mit der rechten Seite (die bekannten Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen)

$$\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad \text{und} \quad \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Die Koordinatenumwandlung beruht auf den bekannten Formeln $x = r \cdot \cos\theta$ und $y = r \cdot \sin\theta$ (hier $r = 1$):

• Kartesische Koordinaten $z = (x, y)$

• Polarkoordinaten $z = (r, \theta)$



Nun soll die praktische Kontrolle der Gleichheitseigenschaft im **CAS**-Menü nachvollzogen werden: [TRNS]-[6: simplify]. Die Winkel θ_1 und θ_2 wurden hierbei zur Vereinfachung durch die Variablen **V** und **W** ersetzt:

```
simplify(
↑6:simplify
5:TRIG
4:solve
3:factor
2:nFactor
1:expand
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

```
simplify(cos Wcos W-s
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

```
cos Wcos W-sin Wsin W
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

```
simplify(cos Wcos W-s
cos(W+W)
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

```
simplify(cos Wsin W+s
sin(W+W)
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

Kontrolle der Gleichheit zweier komplexer Zahlen durch Vergleich der Real- und Imaginärteile (hier: Kontrolle der Additionstheoreme)

Überprüfung der Additionsregel im **CAS**-Menü mit [TRNS]-[A: cExpnd]/[6: simplify]/[8: collect]:

```
cExpnd((A+iB)+(C+iD)
A+C+(B+D)i
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

```
simplify((A+iB)+(C+iD)
A+(B+D)i+C
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

```
collect((A+iB)+(C+iD)
(B+D)i+A+C
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

Überprüfung der Multiplikationsregel im **CAS**-Menü mit [TRNS]-[6: simplify]/[A: cExpnd]/[8: collect]:

```
simplify((A+iB)×(C+iD)
(C+Di)(A+Bi)
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

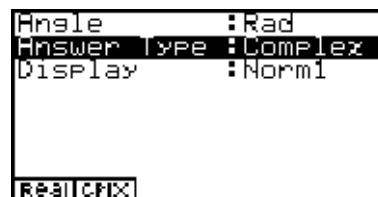
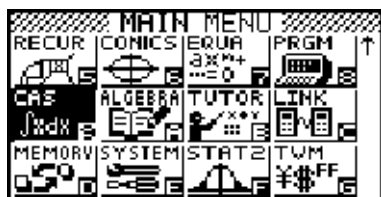
```
cExpnd((A+iB)×(C+iD)
AC-BD+(AD+BC)i
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

```
collect((A+iB)×(C+iD)
(AD+BC)i+AC-BD
TH3ICALQEQWAE99HJREFH D
```

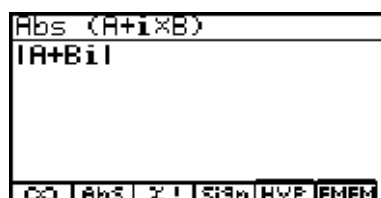
Während hier **simplify** nicht mehr vereinfacht, erfolgt mit den anderen beiden Befehlen die symbolische Umformung gemäß der Multiplikationsregel!

KAPITEL 1

Wir erinnern uns hier noch einmal an die Voreinstellung im **SET UP** des **CAS**-Menüs (bekanntlich hat jedes Menü seine eigenen modifizierbaren Voreinstellungen, vgl. **SET UP** im **RUN·MAT**-Menü):



Nun sind wir neugierig auf die symbolische Berechnung des Betrages einer komplexen Zahl $z = a + bi$:



Mit Hilfe von **[TRNS]-cExpand** wird der **[OPTN] Abs**-Befehl schließlich symbolisch ausgeführt!

Hinweis:

Der im **RUN·MAT**-Menü vorhandene Befehl **arg** zur numerischen Berechnung des Winkels ist im **CAS**-Menü nicht vorhanden.

Es wird an dieser Stelle daran erinnert, dass die trigonometrische Umkehrfunktion **arctan(b/a)** nur einen Wertebereich von $-\pi/2 < \arctan(b/a) < \pi/2$ besitzt und für Zahlen $z = (a, b)$ im *II. Quadranten* mit $+\pi (+180^\circ)$ und im *III. Quadranten* mit $-\pi (-180^\circ)$ zu korrigieren ist, wie folgende Screenshots im **CAS**-Menü zeigen.

Ausgangspunkt sind die komplexen Zahlen **1+i** (*I. Quadrant*), **-1+i** (*II. Quadrant*), **-1-i** (*III. Quadrant*) und **1-i** (*IV. Quadrant*), deren Argument in Altgrad mittels der Befehle **approx** und **tan⁻¹** (entspricht **arctan**) berechnet werden soll:



II. Quadrant
 $\arg(z) = -45^\circ + 180^\circ$
 $= 135^\circ$



I. Quadrant
 $\arg(z) = 45^\circ$



III. Quadrant
 $\arg(z) = 45^\circ - 180^\circ$
 $= -135^\circ$



IV. Quadrant
 $\arg(z) = -45^\circ$

Anordnung der Screenshots entsprechend der Lage der Quadranten im Koordinatensystem.

Abschließend wird im **CAS**-Menü die **Eulersche Formel** betrachtet, die eine Umformung von der exponentiellen Darstellung in die trigonometrische Darstellung und umgekehrt beschreibt. Dazu gibt es im Untermenü **[TRNS]-[5:TRIG]** die speziellen Befehle **expToTrig** bzw. **trigToExp**:

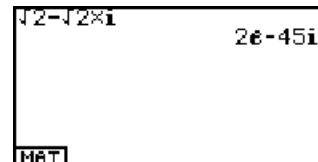
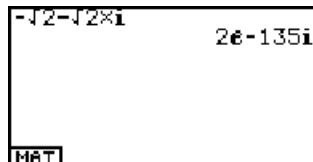
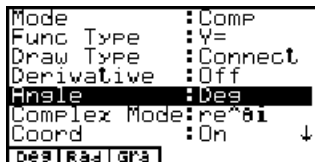
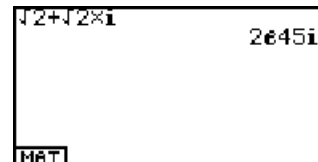
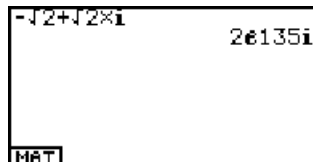


Eulersche Formel:
 $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$

Die **Eulersche Formel** kann im **CAS**-Menü auch über die **Taylor-Entwicklung** der beteiligten Formeln nachvollzogen werden, indem man feststellt, dass die Summe der **cos-Reihe** und der mit **i** multiplizierten **sin-Reihe** genau die betrachtete **e-Reihe** ergeben:

$\text{Taylor}(\cos x + i \sin x, x, 5, 0)$ $\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + xi + 1$	$\text{Taylor}(\cos x, x, 5, 0)$ $\frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} + 1$	$\text{Taylor}(i \sin x, x, 5, 0)$ $\frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{6} + xi$	$\text{Taylor}(e(ix), x, 5, 0)$ $\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + xi + 1$
--	--	--	--

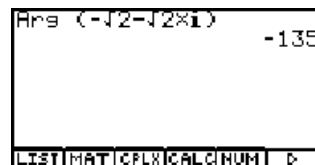
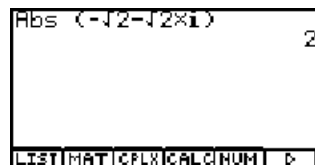
Wir beenden den Einstieg in das symbolische und numerische Rechnen mit komplexen Zahlen, indem wir im **RUN·MAT**-Menü die Zahlen $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ und $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ betrachten und dabei wie zu Beginn dieses Kapitels wieder im Winkelmodus Altgrad rechnen. Diesmal wurde für das Zahlenformat (Complex Mode) die exponentielle Darstellung im **SET UP** ausgewählt.



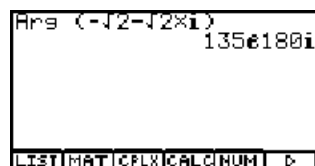
Voreinstellungen im **SET UP** des **RUN·MAT**-Menüs

Die Anordnung der Quadranten gemäß dem Koordinatensystem: exakte Angabe der Winkel im sogenannten Hauptargumentbereich

Berechnungen von Betrag und Argument von $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ nach Voreinstellung Complex Mode: $a+bi$:



Berechnungen des Arguments von $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ nach Voreinstellung Complex Mode: $re^{\theta i}$:



Winkelangabe
 $\theta = -135^\circ = (135 e^{180i})^\circ$
 in exponentieller Darstellung!

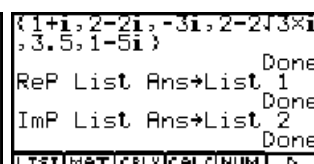
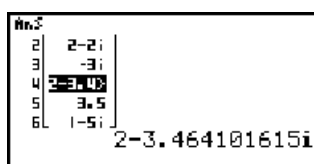
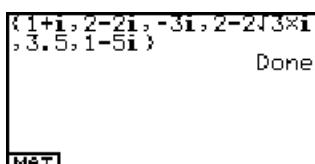
Beispiel:

Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene als Scatter-Plot (= statistische Graphik)

Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 2i$, $z_3 = -3i$, $z_4 = 2 - \sqrt{3} \cdot 2i$, $z_5 = 3,5$, $z_6 = 1 - 5i$.

Lösungsweg:

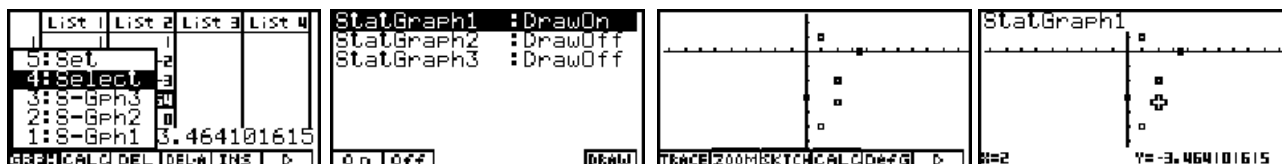
Die Zahlenliste wird zuerst im **[List]-[Ans]-Speicher** abgelegt. Die Real- und Imaginärteile werden als verbundene Datenlisten **List1** und **List2** eingegeben und über das **STAT**-Menü als statistische Graphik (Scatterplot der Zahlenpaare) entsprechend der nachstehenden Screenshots dargestellt.



Nachdem der **STAT-Listen-Editor** geöffnet ist, wird über **[GRPH]-[5:Set]** der Plot **StatGraph1** definiert:



Nun werden über **[GRPH]-[4:Select]** der Plot **StatGraph1** aktiviert (**DrawOn**) und die **TRACE**-Taste genutzt:



Die zwei letzten Plots zeigen die Lage der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgaben:

- 1.1. Veranschaulichen Sie sich die Zahlenliste $\{i, i^2, i^3, i^4\}$ in der Gaußschen Zahlenebene (Hinweis: Scatterplot).
- 1.2. Vereinfachen Sie die Zahlenliste $\{i^7, i^9, i^{14}\}$ im **RUN·MAT**-Menü. (Hinweis: **[List]**-**[Ans]**-Speicher nutzen)
- 1.3. Gegeben ist die Zahlenliste $\{4-3i, 1+i, 1-\sqrt{3}\cdot i, 9, -12i\}$ (Hinweis: $\sqrt{3}i$ statt $\sqrt{3}\cdot i$ führt zu einem Eingabefehler, $\sqrt{3}i = \sqrt{(3i)}$).
 - a) Bestimmen Sie die Liste der Realteile und die Liste der Imaginärteile!
 - b) Bestimmen Sie die Liste der Beträge und die Liste der Winkel (Altgrad)!
 - c) Stellen Sie die Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar (Scatterplot)!
 - d) Bestimmen Sie die Liste der konjugiert komplexen Zahlen!
- 1.4. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 4 + 3i$. Berechnen Sie im **RUN·MAT**-Menü die Zahlen $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, \bar{z}_1 , \bar{z}_2 , $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_1 \cdot z_2$,
- 1.5. Formen Sie die komplexe Zahlenliste $\{1+i\sqrt{3}, 3+4i, -3i\}$ in die exponentielle Form um (Hinweis: im **SET UP Complex Mode** auf $r e^{i\theta}$ einstellen).
- 1.6. Formen Sie $z = 9 \cdot (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$ in die arithmetische Darstellung und exponentielle Darstellung um (Hinweis: $\blacktriangleright a+bi$ bzw. $\blacktriangleright re^{i\theta}$ im **[OPTN]-[CLPX]**-Untermenü des **RUN·MAT**-Menüs nutzen!)
- 1.7. a) Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z = 3 + 4i$! (Hinweis: **Pol**(- Befehl im **[OPTN]-[ANGL]**-Untermenü des **RUN·MAT**-Menüs nutzen!)
 b) Ermitteln Sie zu $z = 5 \cdot e^{i\pi/3}$ die kartesischen Koordinaten (Bogenmaß beachten!) (Hinweis: **Rec**(- Befehl im **[OPTN]-[ANGL]**-Untermenü des **RUN·MAT**-Menüs nutzen!)
- 1.8. Gegeben sind $z = \cos X + i \cdot \sin X$ und $\bar{z} = \cos X - i \cdot \sin X$. Zeigen Sie im **CAS**-Menü die Gleichung $z \cdot \bar{z} = 1$ (Hinweis: **Simplify**-Befehl nutzen!)
- 1.9. Gegeben sind $z_1 = 2 + 2i$ und $z_2 = 3 \cdot (\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4))$. Berechnen Sie $z_1 + z_2$ sowie $z_1 \cdot z_2$.

KAPITEL 2

Herleitung der Umkehroperationen zu “+” und “•” (Subtraktion und Division)

Zunächst werden die “Null” und “Eins” als komplexe Zahlen $a+bi$ wie folgt definiert:

Für jede Zahl $x+yi$ gilt:
 $(x+yi) + \text{“Null”} = x+yi \Leftrightarrow \text{“Null”} = 0+0i = (0,0)$

Für jede Zahl $x+yi \neq \text{“Null”}$ gilt:
 $(x+yi) \cdot \text{“Eins”} = x+yi \Leftrightarrow \text{“Eins”} = 1+0i = (1,0)$

Die spezielle Gestalt der Null ergibt sich aus der Additionsregel, die der Eins aus der Multiplikationsregel für komplexe Zahlen, vgl. Kapitel 1.

Die **Subtraktion** als Umkehroperation zur Addition kann nun so definiert werden, dass

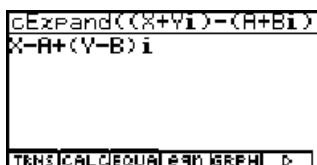
$$(x+yi) - (a+bi) = (x+yi) + \text{“Inverse zu } a+bi \text{ bei Addition”}$$

gelten soll, wobei “Inverse zu $a+bi$ bei Addition” diejenige komplexe Zahl bedeutet, für die gilt:

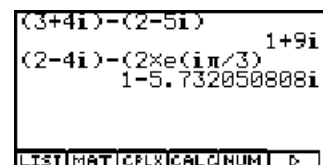
$$(a+bi) + \text{“Inverse zu } a+bi \text{ bei Addition”} = \text{“Null”} = 0+0i$$

$$\Leftrightarrow \text{“Inverse zu } a+bi \text{ bei Addition”} = (-a -bi) = (-a, -b)$$

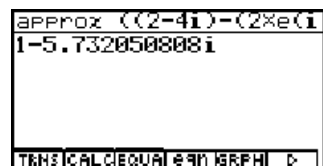
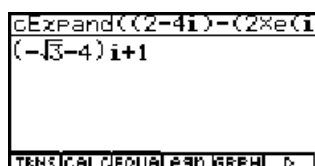
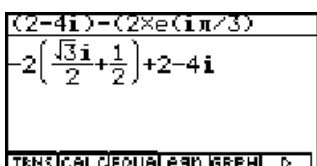
Damit ergibt sich die bekannte Rechenregel $(x+yi) - (a+bi) = (x+yi) + (-a -bi)$, die unmittelbar in **CAS**-Menü mit dem Befehl **[F1][TRNS]-[A:cExpnd]** nachvollzogen werden kann:



Subtraktion im **RUN·MAT**-Menü:
 (Zahlendarstellung mit Nachkommastellen - exakte Zahlen-
 darstellung im **CAS**-Menü)



Die nachfolgenden Screenshots zeigen verschiedene Lösungsdarstellungen ein und derselben Subtraktionsaufgabe im **CAS**-Menü:



Entsprechend kann man nun die Division durch den Divisor $a+bi \neq 0+0i$ aus der Multiplikationsregel und dem Vorhandensein der “Eins” ableiten:

$(x+yi) : (a+bi) = (x+yi) \cdot \text{“Inverse zu } a+bi \text{ bei Multiplikation”}$

soll gelten, wobei **“Inverse zu $a+bi$ bei Multiplikation”** diejenige komplexe Zahl bedeutet, für die gilt:

$$(a+bi) \cdot \text{“Inverse zu } a+bi \text{ bei Multiplikation”} = \text{“Eins”} = 1+0i \Leftrightarrow \\ \text{“Inverse zu } a+bi \text{ bei Multiplikation”} = a/(a^2+b^2) + i(-b)/(a^2+b^2)$$

Wir ermitteln die zuletzt genannte Darstellung der **Inversen** zu $a+bi$ bei Multiplikation im **CAS**-Menü, indem wir ein lineares Gleichungssystem symbolisch lösen. Es sei $v+wi$ die **Inverse** zu $a+bi$ bei Multiplikation, vgl. Kapitel 1.

Dann gilt:

$$(a+bi) \cdot (v+wi) = 1+0i.$$

Nach der Multiplikationsregel bedeutet das:

$$(av-bw) + (aw+bv)i = 1+0i,$$

d.h. mit der Gleichheitseigenschaft

$$av-bw = 1 \quad \text{und} \quad aw+bv = 0.$$

Wir lösen das Gleichungssystem mit im **CAS**-Menü:

$$\text{solve}(\{av-bw = 1, aw+bv = 0\}, \{v, w\})$$

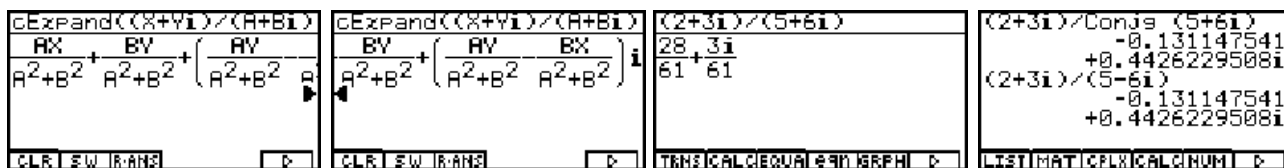


Das letzte Bild verdeutlicht, dass das Multiplikationszeichen zwischen den symbolischen Variablen **A, B, V** und **W** weggelassen werden kann.

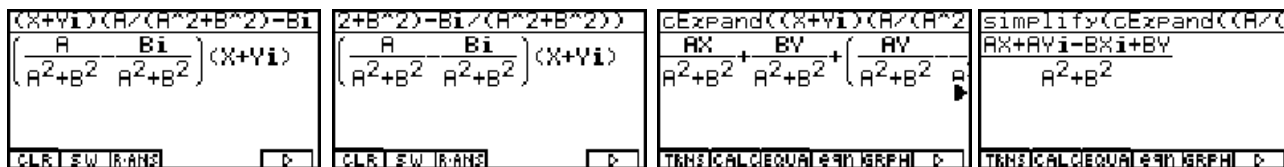
Damit ergibt sich die bekannte Rechenregel

$$(x+yi) : (a+bi) = (x+yi) \cdot (a/(a^2+b^2) + i(-b)/(a^2+b^2)) = (xa+yb + (ya-xb)i) / (a^2+b^2),$$

die unmittelbar in **CAS**-Menü mit dem Befehl **[F1][TRNS]-[A:cExpnd]** nachvollzogen werden kann. Das letzte Bild zeigt wieder eine Rechnung im **RUN·MAT**-Menü:



Zur Kontrolle berechnen wir das Produkt mit dem „Inversen“ des Divisors symbolisch:



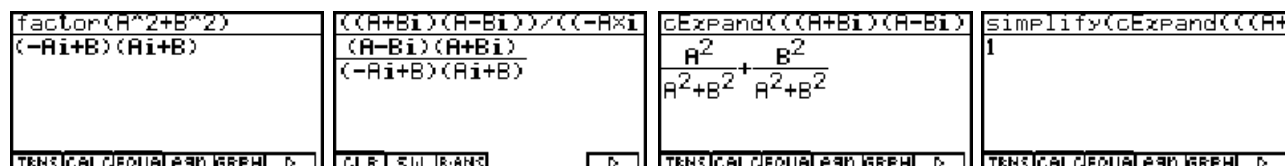
Das letzte Bild zeigte hier die Möglichkeit, Befehle zu schachteln: **simplify(cExpand(...**



Interessante Darstellungen ergeben sich mit dem Befehl **simplify(...** bzw. geschachtelt **factor(simplify(...** (Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl $a-bi$)

Der aufmerksame Leser wird die Faktorisierung $a^2+b^2=(-ai+b)(ai+b)$ festgestellt haben (im letzten Screenshot). Damit erhält man im **CAS**-Menü eine interessante Formelstruktur:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = (-i)(a+bi) \cdot i(a-bi) = (-ai+b)(ai+b)$$



Die Screenshots im **CAS**-Menü verdeutlichen die oben dargelegten Gleichungen.

Beispiele: $17 = 1+16 = (1-4i)(1+4i) = (4-i)(4+i)$ oder $x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) = (y-ix)(y+ix)$.

Aufgaben:

- 2.1. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ und $z_3 = -1 - i$
 - a) Berechnen Sie $z_4 = z_1^2 \cdot z_3 / z_2^3$ und $z_5 = (z_1 + i) \cdot z_2^2 / z_3$.
 - b) Stellen Sie z_4 und z_5 in trigonometrischer und arithmetischer Form dar (Altgrad)!
- 2.2. Berechnen Sie für die Zahlen $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 4 + 3i$ die Zahlen $z_1 \cdot z_2$, $1/(z_1 \cdot z_2)$, z_1/z_2 , \bar{z}_1/\bar{z}_2 , sowie die konjugiert komplexe Zahl zu \bar{z}_1/\bar{z}_2 .
- 2.3. Berechnen Sie möglichst vorteilhaft folgende Zahlen in arithmetischer und exponentieller Darstellung $\{ (1+i)/(-1+i)^2, (3+4i)/5 + 5/(3+4i), (1+i)^2, (1+2i)^2, (1+i)^2/(1-i)^2 \}$.
- 2.4. Berechnen Sie im **RUN·MAT**-Menü
 - a) z_1/\bar{z}_1 für $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$
 - b) z_1/z_2 für $z_1 = 4$ und $z_2 = 4 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- 2.5. Berechnen Sie die Zahl $A \cdot B/C$ sowie den Betrag $|A \cdot B/C|$ für die Zahlen $A = \sqrt{2} \cdot (\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4))$, $B = 1 \cdot (\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$ sowie $C = \sqrt{2} \cdot (\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$ im **CAS**-Menü.
- 2.6. Für welche reellen Faktoren a und b ergibt die Linearkombination $az_1 + bz_2$ mit $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 1 + 2i$ die Zahl $z = 1 - 4i$?
(Hinweis: Trennen Sie in der Gleichung $az_1 + bz_2 = z$ den Real- und Imaginärteil und lösen Sie das entstehende Gleichungssystem in geeigneter Form.)
- 2.7. Berechnen Sie die Zahl $z = (-2 + 2\sqrt{3} \cdot i)/(2 + \sqrt{5} \cdot i) - 5 \cdot (\sqrt{3} + i)/(2\sqrt{5} + 5i)$ in arithmetischer und exponentieller Darstellung und geben Sie die Ergebnisse sowohl in exakter als auch näherungsweise Darstellung auf 4 Nachkommastellen gerundet an (Winkel in Altgrad angeben).
- 2.8. Lösen Sie das komplexe lineare Gleichungssystem durch elementare Umformungen (Eliminationsverfahren): $3z_1 - (2+i) \cdot z_2 = -i$, $(4-2i) \cdot z_1 - 5z_2 = -1-2i$.

KAPITEL 3

Die Potenz z^N einer komplexen Basis z



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Wie erkennt man bei gleichen Potenzwerten z^N von welcher Basis z ausgegangen wurde?

$(1+i)^4$	-4
$(-1+i)^4$	-4
$(-1-i)^4$	-4
MAT	

$(-1+i)^4$	-4
$(-1-i)^4$	-4
$(1-i)^4$	-4
MAT	



Im **RUN·MAT**-Menü wurden die komplexen Zahlen $1+i$, $1-i$, $-1-i$ oder $-1+i$ in die vierte Potenz genommen und jedesmal erhält man die gleiche scheinbar reelle Zahl **-4**.

Man müßte jeder ursprünglichen komplexen Zahl $1+i$, $1-i$, $-1-i$ oder $-1+i$ einen **Index k** zuordnen und diesen dann auch dem Ergebnis **-4** beifügen, indem man sagt, dass es sich um die komplexe Zahl **-4** im k -ten "Exemplar" einer Gaußschen Zahlenebene der Potenzwerte handelt. Eine solche Zahlenebene wird als **Blatt mit der Blattnummer k** bezeichnet.

Das sieht so aus (Reihenfolge im mathematisch positiven Drehsinn - Gegenuhrzeigersinn)



$$z_0 = 1+i, \quad z_1 = -1+i, \quad z_2 = -1-i \quad \text{oder} \quad z_3 = 1-i$$

und dann sagt man



$$\begin{aligned} z_0^4 = -4 & \text{ liegt im } \mathbf{Blatt\ 0}, & z_1^4 = -4 & \text{ liegt im } \mathbf{Blatt\ 1}, \\ z_2^4 = -4 & \text{ liegt im } \mathbf{Blatt\ 2}, & z_3^4 = -4 & \text{ liegt im } \mathbf{Blatt\ 3} \end{aligned}$$

einer **4-blättrigen RIEMANNschen Fläche** (Gaußsche Zahlenebene in vier Exemplaren).

Allgemein gilt:

Es gibt für die feste Zahl $w = z^N$ insgesamt N Zahlen z_k , $k=0, 1, 2, \dots, N-1$, mit $z_k^N = w$. Dabei liegt z_k im sogenannten **Winkelraum D_k** der ursprünglichen Gaußschen Zahlenebene der z -Werte. Der Potenzwert $w = z_k^N$ liegt dann im sogenannten **Blatt k** der N -blättrigen **RIEMANNschen Fläche**.

Der **Winkelraum** D_0 liegt dabei symmetrisch um die positive x-Achse und hat bei Betrachtung der Potenz z^N die Winkelöffnung $2\pi/N$, d.h.

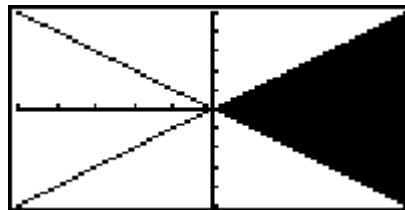
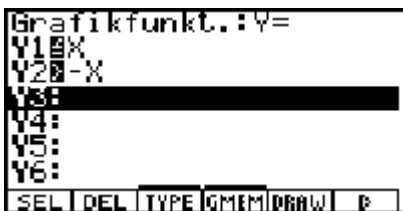
$$D_0 = \{ z \mid -\pi / N < \arg(z) \leq \pi / N \} .$$

Für D_k gilt, indem man den Winkelraum D_0 im mathematisch positiven Drehsinn um $P(0,0)$ dreht,

$$D_k = \{ z \mid (-\pi + 2k\pi) / N < \arg(z) \leq (\pi + 2k\pi) / N \} , k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

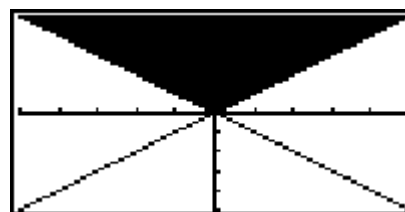
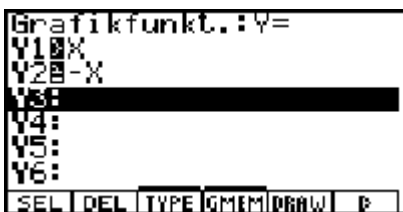
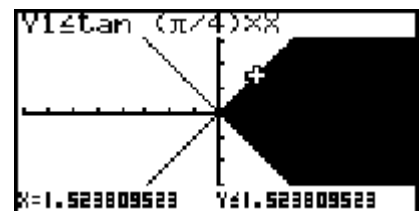
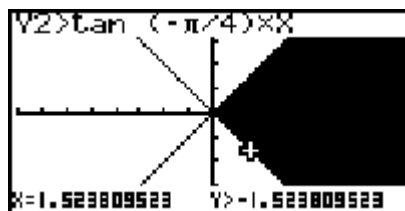
Hierbei bezeichnet $\arg(z) = \theta$ mit $-\pi < \theta \leq \pi$ das DIN-gerechte Hauptargument der Zahl z .

Die vier Winkelräume des oben erwähnten Beispiels haben folgendes graphische Aussehen, das unschwer über das **GRPH · TBL**-Menü zu erhalten ist:



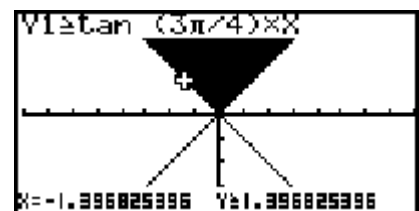
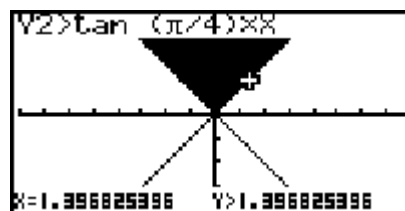
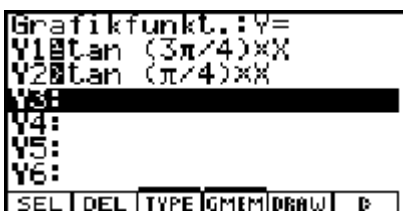
Der Winkelraum D_0 im Fall $N=4$ in symmetrischer Lage um die positive x-Achse

Für alle komplexen Zahlen z im Winkelraum D_0 gilt also: $-\pi/4 < \theta = \arg(z) \leq \pi/4$, d.h.



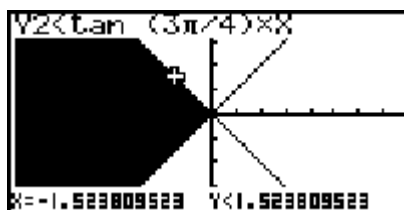
Der Winkelraum D_1 im Fall $N=4$ in symmetrischer Lage um die positive y-Achse

Für alle komplexen Zahlen z im Winkelraum D_1 gilt also: $\pi/4 < \theta = \arg(z) \leq 3\pi/4$, d.h.



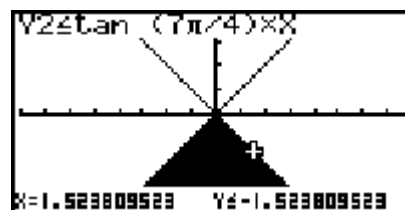
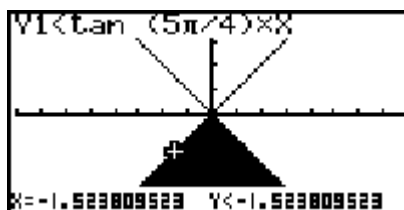
Für alle komplexen Zahlen z im Winkelraum D_2 gilt somit: $3\pi/4 < \theta = \arg(z) \leq 5\pi/4$, d.h.

```
Grafikfunkt.:Y=
Y1:tan (5π/4)×X
Y2:tan (3π/4)×X
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
SEL DEL TYPE GMM DRAW D
```



Schließlich gilt für alle komplexen Zahlen z im Winkelraum D_3 : $5\pi/4 < \theta = \arg(z) \leq 7\pi/4$:

```
Grafikfunkt.:Y=
Y1:tan (5π/4)×X
Y2:tan (7π/4)×X
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
SEL DEL TYPE GMM DRAW D
```



Es gilt zusammenfassend (wenn man sich die z -Ebene wie einen runden „Kuchen“ in N gleichgroße „Kuchentstücke“ zerlegt vorstellt und jedes „Kuchentstück“ einen Winkelraum beschreibt):



Alle z -Werte aus dem Winkelraum D_k in der z -Ebene gehen über in die Potenzwerte z^N im Blatt k .

Damit wird die eindeutige Aussage möglich:

Betrachtet man die (komplexe) **Zahl $w = -4$ im Blatt 1**, kurz $w = (-4, \text{Blatt 1})$, dann handelt es sich z.B. um die Potenz z^N mit $N = 4$ und $z = z_1 = -1 + i \in D_1$ (Winkelraum D_1).

Nun soll die praktische Berechnung der Potenz z^N mit $N = 4$ dargestellt werden.

In arithmetischer Darstellung $z = x + y \cdot i$ erhält man im **CAS**-Menü entsprechend dem Binomischen Satz:



$$(x + y \cdot i)^4 = x^4 + 4x^3y \cdot i - 6x^2y^2 - 4xy^3 \cdot i + y^4$$



```
expand((X+YI)^4)
X^4+4X^3YI-6X^2Y^2-4XY^3I+Y^4
TRN/CALC/EQUA/APP/GRAPH D
```

```
expand((X+YI)^4)
4X^3YI-6X^2Y^2-4XY^3I+Y^4
TRN/CALC/EQUA/APP/GRAPH D
```

Wird die Zahl $z = 1 + 1 \cdot i = 1 + i$ potenziert, erhält man für z^N mit beliebigem N im **CAS**-Menü entsprechend dem **Satz von Moivre**

$$z^N = (|z| e^{i \cdot \arg(z)})^N = |z|^N e^{i \cdot \arg(z) \cdot N} = |z|^N (\cos(\arg(z) \cdot N) + i \cdot \sin(\arg(z) \cdot N))$$

$$\sqrt{2}^N \cdot \cos\left(\frac{\pi N}{4}\right) + \sqrt{2}^N \cdot \sin\left(\frac{\pi N}{4}\right) \cdot i$$

$$\sqrt{2}^N \cdot \cos\left(\frac{\pi N}{4}\right) + \sqrt{2}^N \cdot \sin\left(\frac{\pi N}{4}\right) \cdot i$$

Abschließend wird die Potenz $(x + y \cdot i)^N$ mit beliebigem z und N im **CAS**-Menü wie folgt berechnet (Vorzeichenfunktion: $\text{signum}(y) = \text{sgn}(y) = y / |y|$ für $y \neq 0$, vgl. Kapitel 7):

$$(x + y \cdot i)^N = (x^2 + y^2)^{N/2} \left(\cos\left\{(-\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(y)) \cdot N\right\} + i \cdot \sin\left\{(-\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(y)) \cdot N\right\} \right)$$

$$\cos\left(\left(-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi \cdot \text{signum}(y)}{2}\right) \cdot N\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}^N$$

$$\cos\left(\left(-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi \cdot \text{signum}(y)}{2}\right) \cdot N\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}^N$$

Hinweis:
Die TR-Symbolik
der Umkehrfunktion
ist \tan^{-1} statt **arctan**

$$\sin\left(\left(-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi \cdot \text{signum}(y)}{2}\right) \cdot N\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}^N$$

$$\sin\left(\left(-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi \cdot \text{signum}(y)}{2}\right) \cdot N\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}^N$$

Man erkennt hierbei, dass die allgemeine Potenz z^N über die trigonometrische Darstellung mit dem Hauptargument

$$\arg(z) = \theta = -\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(y)$$

berechnet wird.

Wegen des Additionstheorems

$$\arctan(x/y) + \arctan(y/x) = \pi/2 \quad \text{für } x/y > 0$$

erkennt man unschwer, dass im I. Quadranten gilt:

$$\arg(z) = \theta = -\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(y) = \arctan(y/x)$$

und im III. Quadranten:

$$\arg(z) = \theta = -\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(y) = \arctan(y/x) - \pi$$

Wegen des Additionstheorems

$$\arctan(x/y) + \arctan(y/x) = -\pi/2 \quad \text{für } x/y < 0$$

erkennt man auch unschwer, dass im II. Quadranten gilt:

$$\arg(z) = \theta = -\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(y) = \arctan(y/x) + \pi$$

und im IV. Quadranten:

$$\arg(z) = \theta = -\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(y) = \arctan(y/x) .$$

Damit ist die im **CAS**-Menü angezeigte Formel eine interessante Darstellung mit Gültigkeit in jedem Quadranten (außerhalb der reellen Achse) und entspricht den von der Schule her bekannten Formeln.

Aufgaben:

- 3.1. Gegeben ist die Zahl $z = -2 + 5i$. Zu berechnen ist z^2 . In welchem Winkelraum D_k liegt z und in welchem Blatt k liegt demzufolge die Potenz $w = z^2$?
- 3.2. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 3^{1/2} + i$ und $z_2 = -3^{1/2} + i$. Zu berechnen ist z^3 . In welchem Winkelraum D_k liegen z_1 bzw. z_2 und in welchem Blatt k liegen demzufolge die Potenzen $w = z^3$ für $z = z_1$ bzw. $z = z_2$?
- 3.3. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 2i$, $z_2 = -1 + 2i$ und $z_3 = -1 - 2i$. Zu berechnen ist z^4 . In welchem Winkelraum D_k liegen z_1 , z_2 bzw. z_3 und in welchem Blatt k liegen demzufolge die Potenzen $w = z^3$ für $z = z_1$, $z = z_2$ bzw. $z = z_3$?
- 3.4. Gegeben ist $z = -1 - i3^{1/2}$.
 - a) Berechnen Sie z^7 . In welchem der Winkelräume D_0 bis D_6 liegt die Zahl z (Index k)?
 - b) In welchem Blatt k (der 7-blättrigen Riemannschen Fläche) liegt der Wert $w = z^7$?
- 3.5. Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 11/10 \cdot e^{(i\pi/10)}$. Stellen Sie die Potenzen z^N , $N = 1, 2, \dots, 20$, als Scatterplot (= statistische Graphik) in der x-y-Ebene dar und gehen Sie dabei wie folgt vor:
 - a) Abspeicherung von z im **RUN-MAT**-Menü (Variablenname **Z**).
 - b) $\operatorname{Re}(z^N)$ bzw. $\operatorname{Im}(z^N)$ als Zahlenfolge in **List1** bzw. **List2** abspeichern. (Hinweis: **Seq**-Befehl im Untermenü **[OPTN]-[LIST]** nutzen.)
 - c) Das Scatterplot als **StatGraph1** im **STAT**-Menü definieren (über **GRPH-Set**) und über **GRPH-Select** darstellen.
- 3.6. Untersuchen Sie die komplexe Zahl $z = 11/10 \cdot e^{(i\pi/10)}$ im **CAS**-Menü.
 - a) Speichern Sie z ab (Variablenname **Z**) und geben Sie z in exakter arithmetischer Darstellung sowie in gerundeter arithmetischer Form (3 Nachkommastellen) an.
 - b) Berechnen Sie z^5 und vereinfachen Sie das Ergebnis. Wie lautet das Ergebnis in exakter arithmetischer Darstellung? (Hinweis: Untersuchen Sie im **CAS**-Menü die Umformung $(e^{(i\pi/10)})^5 = e^{(i\pi/2)}$ und beachten Sie die Potenzgesetze.)

KAPITEL 4

Die Potenz e^z mit einem komplexen Exponenten z



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Warum ist die komplexe **e**-Funktion eine periodische Funktion?

In Verallgemeinerung der Eulerschen Formel $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ gilt:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$$

Dies kann man sofort im **CAS**-Menü nachprüfen:

```
CEXPAND(E(X+YI))
E^X*cos(Y)+E^X*sin(Y)*I
TMSICALCULATOR 4.00 GRAPH D
```

Die Potenz e^z als Exponentialfunktion von $z = x + iy$.

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen **sin(y)** und **cos(y)** gilt damit für unterschiedliche z -Werte, z.B. $z = 1 + i$, $z = 1 + i + 2\pi i$, $z = 1 + i - 8\pi i$, das gleiche Ergebnis:

```
E(1+I)      2.718281828Ei
E(1+i+2pi)  2.718281828Ei
E(1+i-8pi)  2.718281828Ei
MAT
```

Das Ergebnis $e^1 \cdot e^i = 2,718281828 \cdot e^i$ im **RUN · MAT**-Menü

Es ist ersichtlich, dass unterschiedliche z -Werte, die sich im Imaginärteil um ein k -faches von 2π unterscheiden (k ganzzahlig), stets die gleiche **e**-Potenz haben. Man sagt deshalb:

Die komplexe **e**-Funktion $w = e^z$ ist mit $2\pi i$ periodisch.

Um gleiche Ergebnisse $w = e^{1+i} = e^{1+i+2\pi i} = e^{1+i-8\pi i}$ hinsichtlich ihrer Herkunft eindeutig zuordnen zu können, betrachtet man wieder wie im Kapitel 3 jedes Ergebnis in einer anderen gedachten Gaußschen Zahlenebene und sagt:

$$w_0 = e^{1+i} = e^{1+i+0 \cdot 2\pi i} = e^1 \cdot e^i \text{ liegt im Blatt } 0,$$

$$w_1 = e^{1+i+2\pi i} = e^{1+i+1 \cdot 2\pi i} = e^1 \cdot e^i \text{ liegt im Blatt } 1,$$

$$w_2 = e^{1+i-8\pi i} = e^{1+i-4 \cdot 2\pi i} = e^1 \cdot e^i \text{ liegt im Blatt } -4$$

einer unendlich-blättrigen **Riemannschen Fläche**.

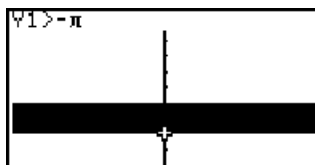
Unter Beachtung der Periodizität gilt allgemein: $w = e^z$ liegt genau dann im Blatt k , wenn für den Imaginärteil die Ungleichung $-\pi + k \cdot 2\pi < \text{Im}(z) \leq \pi + k \cdot 2\pi$ (k ganzzahlig) gilt.

KAPITEL 4

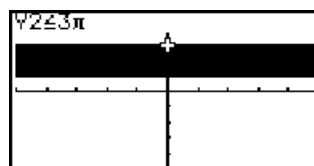
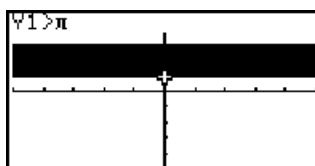
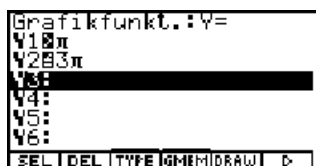
In diesem Zusammenhang spricht man auch vom k -ten Parallelstreifen D_k innerhalb der Gaußschen z -Ebene:

$$D_k = \{ z \mid -\pi + k \cdot 2\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi + k \cdot 2\pi \}, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

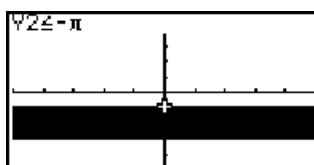
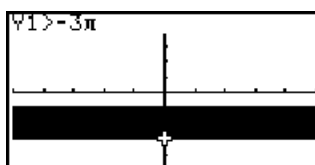
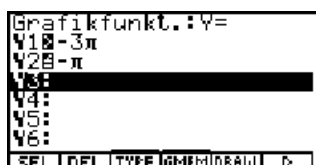
Im **GRPH**·**TBL**-Menü kann man diese Parallelstreifen wieder unschwer darstellen:



Der Parallelstreifen D_0



Der Parallelstreifen D_1



Der Parallelstreifen D_{-1}

Der Parallelstreifen D_0 liegt hierbei genau wie der Winkelraum D_0 symmetrisch um die x -Achse.

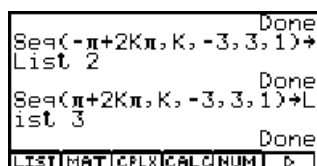
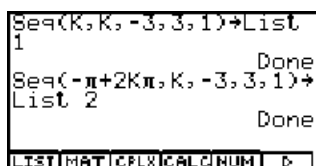
Beispiel:

Im welchem Blatt der Riemannschen Fläche liegen die e -Funktionswerte $w = e^z$ für die komplexen Zahlen $z = z_1 = 2 + 5 \cdot i$, $z = z_2 = 2 - 3 \cdot i$, $z = z_3 = 2 - 6 \cdot i$ und $z = z_4 = 2 + 11 \cdot i$? Geben Sie jeweils die w -Werte an!

Hinweis zur Wahl des Zahlensystems ("Mode"): Wählen Sie in der Einstellanzeige (SET UP) für "Mode" unbedingt "Comp"!

Wir lösen die Aufgabe wie folgt:

Über die (reellen) Imaginärteile **5**, **-3**, **-6** und **11** wird der Index k des Parallelstreifens für den jeweiligen z -Wert ermittelt. Dieser Index ist dann unmittelbar die gesuchte Blattnummer k . Dazu werden die Intervallgrenzen der Parallelstreifen als Zahlenfolgen im **RUN**·**MAT**-Menü erzeugt und dann im **STAT**-Menü betrachtet. Der Index k ist dann unmittelbar ersichtlich!



Liste1 mit den Indizes $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Liste2 mit den unteren Grenzen von D_k und

Liste3 mit den oberen Grenzen von D_k .

List 1	List 2	List 3	List 4
1	-3	-21.99	-15.7
2	-2	-15.7	-9.424
3	-1	-9.424	-3.141
4	0	-3.141	3.1415
5	1	3.1415	9.4247

z_1 liegt in D_1
(wegen $\pi < 5 \leq 3\pi$)
also: $w_1 = e^{z_1} \in \text{Blatt 1}$

List 1	List 2	List 3	List 4
1	-3	-21.99	-15.7
2	-2	-15.7	-9.424
3	-1	-9.424	-3.141
4	0	-3.141	3.1415
5	1	3.1415	9.4247

z_2 liegt in D_0
(wegen $-\pi < -3 \leq \pi$)
also: $w_2 = e^{z_2} \in \text{Blatt 0}$

List 1	List 2	List 3	List 4
1	-3	-21.99	-15.7
2	-2	-15.7	-9.424
3	-1	-9.424	-3.141
4	0	-3.141	3.1415
5	1	3.1415	9.4247

z_3 liegt in D_{-1}
(wegen $-3\pi < -6 \leq -\pi$)
also: $w_3 = e^{z_3} \in \text{Blatt -1}$

List 1	List 2	List 3	List 4
3	-1	-9.424	-3.141
4	0	-3.141	3.1415
5	1	3.1415	9.4247
6	2	9.4247	15.707
7	3	15.707	21.991

z_4 liegt in D_2
(wegen $3\pi < 11 \leq 5\pi$)
also: $w_4 = e^{z_4} \in \text{Blatt 2}$

Abschließend werden die Potenzwerte $w = e^z$ berechnet und die Endergebnisse angegeben:

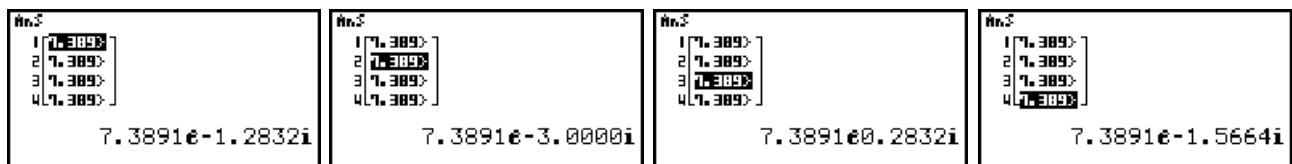
Im **SET UP** des **RUN·MAT**-Menüs wird zuerst die arithmetische Zahlendarstellung (**Complex Mode: a+bi**) voreingestellt. Dann werden die vier Zahlen als Datenliste $\{2+5i, 2-3i, 2-6i, 2+11i\}$ ohne Speicherbefehl eingegeben und mittels **EXE** im **List-Ans**-Speicher abgelegt und angezeigt:



Nun werden im **SET-UP** des **RUN·MAT**-Menüs die exponentielle Zahlendarstellung sowie vier Nachkommastellen voreingestellt. Im Exponenten der **e**-Funktion kann sofort die **List-Ans**-Liste eingegeben werden:



Für die Werte $w = e^z$ erhält man folgende interessanten Ergebnisse, die einer Interpretation bedürfen:



Alle w -Werte haben den gleichen Radius $r = e^x = e^2 = 7,3891$, jedoch nur w_2 hat seinen ursprünglichen Winkel $\theta = -3$ (im Bogenmaß) behalten! In allen anderen Fällen wurde der Winkel $\theta = y$ in das DIN-gerechte **Hauptargument** umgeformt, für das $-\pi < \theta \leq \pi$ festgelegt ist. Damit wird das Ergebnis verständlich:

$5-2\pi$	-1.2832	$\theta = 5 - 1 \cdot 2\pi = -1,2832$ für w_1 oder
$-6+2\pi$	0.2832	$\theta = -6 + 1 \cdot 2\pi = 0,2832$ für w_3 oder
$11-2 \times 2\pi$	-1.5664	$\theta = 11 - 2 \cdot 2\pi = -1,5664$ für w_4 .

Aufgaben:

- 4.1. Gegeben ist die Zahl $z = A + Bi$. Im **CAS**-Menü sind der Betrag sowie der Realteil und Imaginärteil von e^z symbolisch darzustellen! Wie lautet das Hauptargument von e^z ?
- 4.2. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 3^{1/2} + 5i$ und $z_2 = -3^{1/2} - 5i$.
 - a) Zu berechnen ist e^z für $z = z_1$ bzw. $z = z_2$.
 - b) Geben Sie für das Ergebnis w jeweils den Betrag und das Hauptargument an!
 - c) In welchem Parallelstreifen D_k liegen z_1 bzw. z_2 und in welchem Blatt k liegen demzufolge die Potenzen $w = e^z$ für $z = z_1$ bzw. $z = z_2$?
- 4.3. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 20+20i$, $z_2 = 10+10i$ und $z_3 = -40-40i$.
 - a) Zu berechnen ist e^z für $z = z_1$, $z = z_2$ bzw. $z = z_3$.
 - b) Geben Sie jeweils die konjugiert komplexe Zahl zu e^z sowie $\text{Re}(e^z)$ und $\text{Im}(e^z)$ an.
 - c) In welchem Parallelstreifen D_k liegen z_1 , z_2 bzw. z_3 und in welchem Blatt k liegen demzufolge die Potenzen $w = e^z$ für $z = z_1$, $z = z_2$ bzw. $z = z_3$?
- 4.4. Stellen Sie die Ergebnisse in 4.3.a) in einer Gaußschen Zahlenebene (Scatterplot) dar!

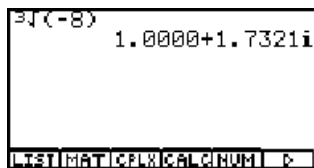
KAPITEL 5

Die N-te Wurzel einer komplexen Zahl z (Haupt- und Nebenwurzeln)



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Warum ist -2 nicht die komplexe Hauptwurzel der Aufgabe $\sqrt[3]{(-8)} = (-8)^{1/3}$?



Im **RUN·MAT**-Menü:

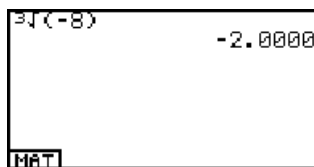
Voreinstellung im **SET UP** auf

Complex Mode: a+bi

Die dritte Wurzel aus -8 ist gleich $1,0000+1,7321i$?



Warum erhält man für die Aufgabe $(-8)^{1/3}$ im **Real**-Modus bzw. **Complex**-Modus unterschiedliche Ergebnisse?



Im **RUN·MAT**-Menü:

Voreinstellung im **SET UP** auf

Complex Mode: Real

Die dritte Wurzel aus -8 ist gleich $-2,0000$?



Warum erhält man beim Wurzelziehen im Komplexen mit dem Taschenrechner stets nur Zahlen im I. oder IV. Quadranten? Auf diese Frage kommen wir weiter unten zurück.

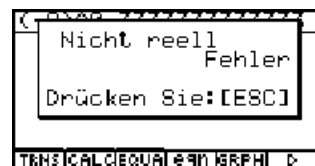
Es scheint so, als ob der Taschenrechner eigenwillig ist und nicht vorhersehbare Ergebnisse liefert. Dem ist nicht so! Einblicke in die algebraischen Formelstrukturen geben hier eine klare Antwort zum Wurzelziehen.

Vorab der Hinweis:

Man geht diesem Ärger aus dem Wege, wenn man die Wurzel $w = \sqrt[N]{z}$ als Potenz $z^{1/N}$ interpretiert und im Bereich der reellen Zahlen keine negativen Basen bei gebrochenem Exponenten zulässt.

In vielen Formelsammlungen findet man genau diesen Hinweis:
In der allgemeinen reellen Potenz a^b ist nur dann eine negative Basis zugelassen, wenn der Exponent ganzzahlig ist!

Somit vermeidet man im **Real**-Modus die negative Basis und hat nicht den folgenden Ärger, z.B. im **CAS**-Menü:



Versucht man jedoch trotzdem, im **Real**-Modus mit einer negativen Basis und einem gebrochenem Exponenten zu rechnen, dann ist das negative reelle Ergebnis (wenn es scheinbar ein solches gibt) aus Sicht der komplexen Zahlen **stets nur eine Nebenwurzel** und niemals eine Hauptwurzel bzw. ein Hauptwert der Potenz $z^{1/N}$.

Für die N-te Wurzel aus einer komplexen Zahl gilt folgende bekannte Formel:

$$w = \sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{|z|} \cdot \exp \left\{ i (\arg(z) + k \cdot 2\pi) / N \right\}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Im Fall $k = 0$ erhält man die sogenannte Hauptwurzel $w = w_0$:

$$w_0 = \sqrt[N]{|z|} \cdot \exp \left\{ i \arg(z) / N \right\}$$

und im Fall $k = 1, 2, \dots, N-1$ die sogenannten Nebenwurzeln $w = w_k$:

$$w_k = \sqrt[N]{|z|} \cdot \exp \left\{ i (\arg(z) + k \cdot 2\pi) / N \right\}.$$

Diese Formeln sind dann eindeutig, wenn für $\arg(z)$ stets das DIN-gerechte Hauptargument eingesetzt wird, für das gilt:

$$-\pi < \theta = \arg(z) \leq \pi$$

Im Taschenrechner **ALGEBRA FX 2.0** sind genau diese Formeln programmiert unter Beachtung des Hauptarguments und der Hauptwurzel. Wir sehen uns das im **CAS**-Menü an:

Wir erkennen hier für w_0 die gleiche Formelstruktur wie im Kapitel 3 auf S. 19, wenn man wie dort ausgeführt beachtet, dass $\arg(z) = -\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(y)$ und $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ gilt und der Exponent N durch seinen Kehrwert $1/N$ ersetzt wird:

$$w_0 = (x + y \cdot i)^{1/N} = (x^2 + y^2)^{1/(2N)} \left(\cos \left\{ (-\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(y)) / N \right\} + i \cdot \sin \left\{ (-\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(y)) / N \right\} \right)$$

Jetzt soll die N -te Wurzel einer komplexen Zahl in trigonometrischer Darstellung untersucht werden. Im **CAS**-Menü erhält man dazu für w_0 folgende Formelstruktur:

Man erkennt hier im Vergleich zur vorangehenden Formel, dass $y = r \cdot \sin(\theta)$ und $x = r \cdot \cos(\theta)$ gesetzt wurden, d.h. $x/y = \cos(\theta) / \sin(\theta)$. Mit dem geschachtelten Befehl **simplify(cExpand(...** statt nur **cExpand(...** wird dieser lange Formelterm etwas vereinfacht: $\cos(\theta) / \sin(\theta) = 1 / \tan(\theta)$.

Nach kurzer Rechenzeit erhält man folgende interessante Formelstruktur im **CAS**-Menü:

The screenshots show the following steps in the CAS menu:

- `Simplify(cExpand((re(iθ))^(1/N)))` resulting in $\cos\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right)$.
- `cExpand((re(iθ))^(1/N))` resulting in $\cos\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right) + i \sin\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right)$.
- `cExpand((re(iθ))^(1/N))` resulting in $\cos\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right) + i \sin\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right)$.
- `cExpand((re(iθ))^(1/N))` resulting in $\cos\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right) + i \sin\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right)$.
- `cExpand((re(iθ))^(1/N))` resulting in $\cos\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right) + i \sin\left(\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) + \pi}{N}\right)$.
- `(re(iθ))^(1/N)` resulting in $(r^2 \cdot (\sin(\theta))^2 + r^2 \cdot (\cos(\theta))^2)^{1/(2N)}$.

$$w_0 = (r \cdot e(i\theta))^{1/N} = (r^2 \cdot (\sin(\theta))^2 + r^2 \cdot (\cos(\theta))^2)^{1/(2N)} \cdot \left(\cos\left(\frac{-\arctan(1/\tan(\theta)) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(r \cdot \sin(\theta))}{N}\right) + i \sin\left(\frac{-\arctan(1/\tan(\theta)) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(r \cdot \sin(\theta))}{N}\right) \right)$$

Diese Formel ist fast nicht mehr überschaubar, denn z.B. $(\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2 = 1$ und $\theta = -\arctan(1/\tan(\theta)) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(r \cdot \sin(\theta))$ wurden nicht vereinfacht!

Lieber Leser, an dieser Stelle muß zur Ehrenrettung des **CAS**-Resultates folgendes klar gestellt werden, warum nicht vereinfacht wird:

Die symbolische Variable r (bzw. θ) muß keine reelle Zahl (z.B. Winkel im Bogenmaß) sein, z.B. $r = 1+i$ und $\theta = \pi/2$. Dann gilt sofort ein unerwartetes Ergebnis (Probieren Sie es aus!):

$$r^2 \cdot (\sin(\theta))^2 + r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 = 2i \quad \text{oder} \quad \operatorname{sgn}(r \cdot \sin(\pi/2)) = (1+i)/\sqrt{2}.$$

Das „Geheimnis“ mit dieser Formel wird im Kapitel 7 bzw. 9 gelüftet. Damit konnte das **CAS**-Resultat nicht anders ausfallen, wenn die symbolischen Variablen r und θ nicht spezifiziert sind! Wird der Befehl `cExpand((r e(iθ))^(1/N))` jedoch etwas „vereinfacht“ in der Form `cExpand((r^(1/N)·e(iθ))^(1/N))` eingegeben, dann erhält man im **CAS**-Menü ein von der Schule her bekanntes Resultat:

The screenshots show the following steps in the CAS menu:

- `cExpand(r^(1/N)·e(iθ))` resulting in $r^{1/N} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) + i r^{1/N} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{N}\right)$.
- `cExpand(r^(1/N)·e(iθ))` resulting in $r^{1/N} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) + i r^{1/N} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{N}\right)$.

$$w_0 = r^{1/N} \cdot (\cos(\theta/N) + i \sin(\theta/N))$$

Die N-te Wurzel (Hauptwurzel)

Wir verlassen nun das **CAS**-Menü, wechseln in das **RUN·MAT**-Menü und berechnen im Zahlenbeispiel Haupt- und Nebenwurzeln aus -64 ($N = 6$). Dazu speichern wir die Indizes $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ in der Liste **List1** ab und ergänzen die Hauptwurzel mit dem Faktor $\exp\{i \text{List1} \cdot 2\pi/N\}$, d.h. unter Beachtung des Hauptarguments θ ($-\pi < \theta = \arg(z) \leq \pi$) gilt:

$$w_k = w_0 \cdot \exp\{i \text{List1} \cdot 2\pi/N\} = r^{1/N} \cdot \exp\{i \theta/N\} \cdot \exp\{i \text{List1} \cdot 2\pi/N\}$$

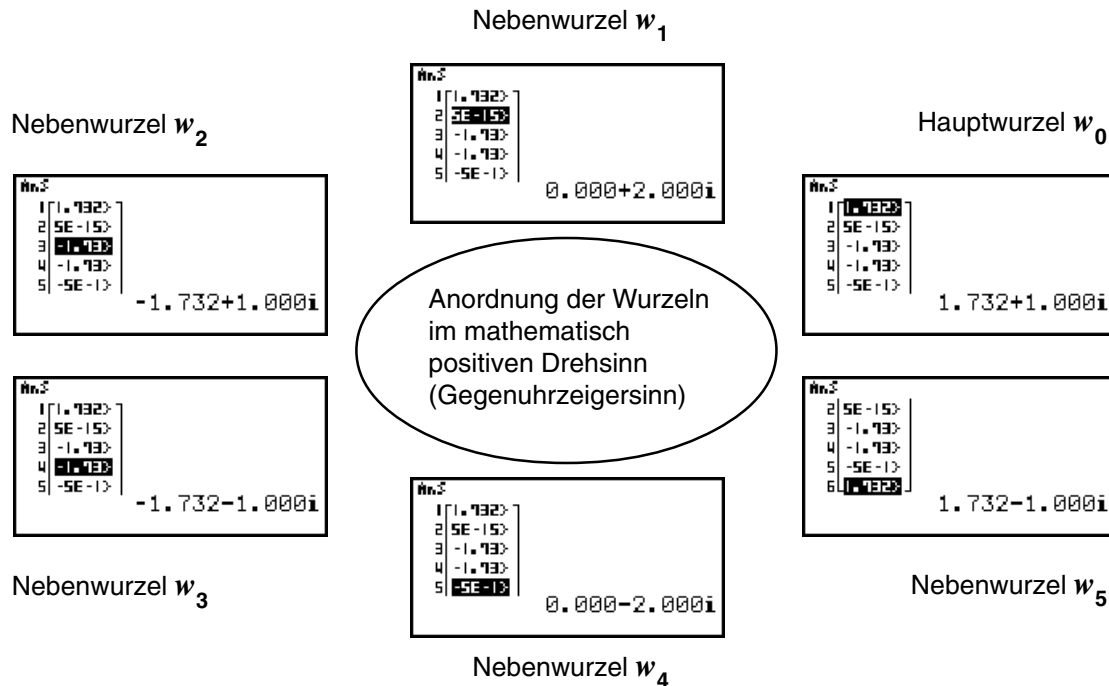
The screenshot shows the following commands in the RUN·MAT menu:

```

{0,1,2,3,4,5}→List 1
Done
6√(-64)×e(i×List 1×2π/6)→List 2
Done

```

Berechnung aller Wurzelwerte durch Betätigen der **EXE**-Taste und Anzeige der Ergebnisse über den **List-Ans**-Speicher:



Dieses Beispiel soll damit beendet werden, dass alle Wurzeln in einer Gaußschen Zahlenebene als Scatterplot dargestellt werden. Dazu werden im **RUN·MAT**-Menü die Indizes in der Liste **List1**, die Wurzeln in **List2**, deren Realteile in **List3** und schließlich deren (reelle) Imaginärteile in **List4** abgespeichert. Im **STAT**-Menü sehen wir im Listeneditor die entsprechenden Daten, z.B. ist in **List3** der Realteil der 5. Nebenwurzel markiert:



Nachdem das Betrachtungsfenster mit **[SHIFT] [V-Window]** eingestellt, der Scatterplot **StatGraph1** definiert und mit **DrawOn** eingeschaltet wurde, sehen wir im letzten Bild die sechs Wurzelwerte w_0 bis w_5 . Es gilt hierbei:

- ① Alle Wurzelwerte liegen auf einem Kreis mit dem Radius $r^{1/N}$
- ② Alle Wurzelwerte haben den gleichen Winkelabstand $2\pi/N$
- ③ Der Wurzelwert w_k liegt genau im k -ten Winkelraum D_k

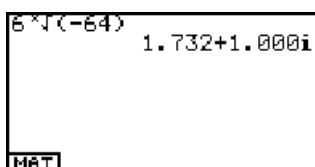


Damit kann die zu Beginn dieses Kapitels gestellte dritte Frage „**Warum** erhält man beim Wurzelziehen im Komplexen mit dem Taschenrechner stets nur Zahlen im I. oder IV. Quadranten?“ klar beantwortet werden:

Der Taschenrechner zeigt stets die (eindeutig definierte) Hauptwurzel $w_0 \in D_0$ an, die nach den oben dargelegten Formeln stets in der rechten Halbebene (I. oder IV. Quadrant) liegt.

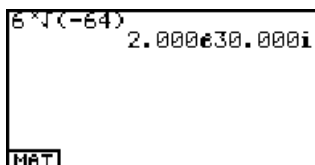
KAPITEL 5

Nunmehr werden verschiedene Varianten der Ergebnisanzeige für die Hauptwurzel vorgestellt:



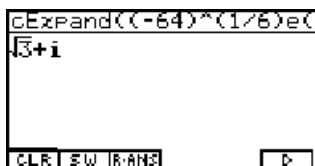
Im **RUN·MAT**-Menü:

Die 6-te Wurzel aus **-64** (komplexe Hauptwurzel)
(arithmetische Darstellung: $x=1,732$ und $y=1,000$)



Im **RUN·MAT**-Menü:

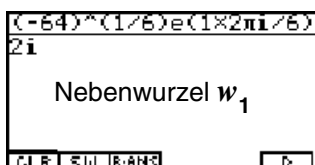
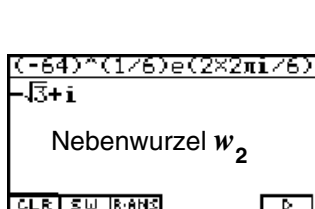
Die 6-te Wurzel aus **-64** (komplexe Hauptwurzel)
(exponentielle Darstellung: $r=2$ und $\theta=30^\circ=\pi/6$)



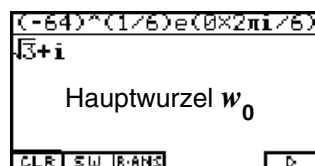
Im **CAS**-Menü:

Die 6-te Wurzel aus **-64** (komplexe Hauptwurzel)
(exakte arithmetische Darstellung)

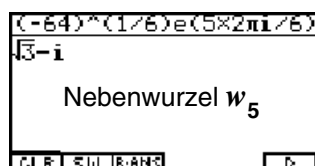
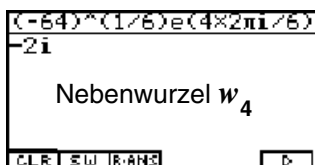
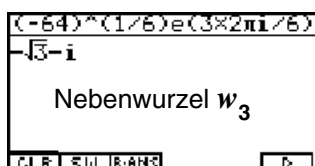
Die folgenden Bilder zeigen die Haupt- und Nebenwurzeln aus **-64** im **CAS**-Menü in exakter Darstellung:



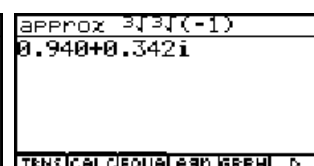
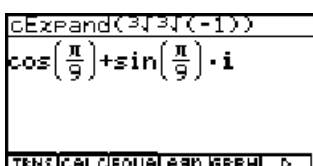
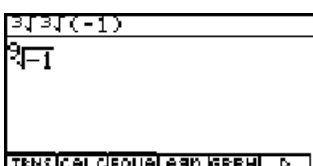
Anordnung der Wurzeln im mathematisch positiven Drehsinn (Gegenuhrzeigersinn)



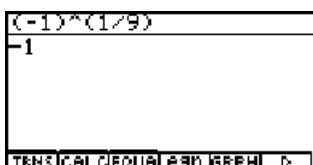
Feststellung:
übereinander-
liegende
Wurzeln sind
zueinander
konjugiert
komplexe
Zahlen!



Die weiteren Bilder zeigen die **9-te** Wurzel aus **-1** im **CAS**-Menü in unterschiedlicher Darstellung:

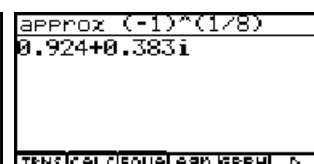
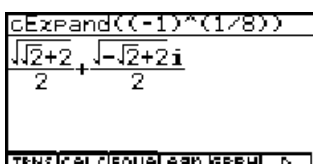
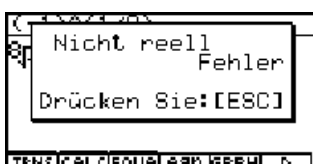
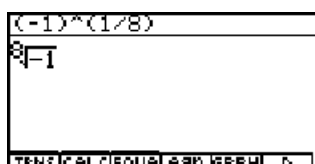


Die **9-te** Wurzel aus **-1** konnte also auch über die dritte Wurzel durch zweimalige Anwendung erhalten werden.



Das „andere“ Ergebnis, falls im **SET UP** des **CAS**-Menüs **Answer Type: Real** eingestellt wurde!

Es folgen ein paar Variationen zur **8-ten** Wurzel aus **-1**: Es gibt keine reelle (Neben-)Wurzel!



Abschließende allgemeine Bemerkung (vgl. Kapitel 3):

Betrachtet man als Ausgangspunkt des Wurzelziehens eine Zahl z in der N -blättrigen Riemannschen Fläche (Gaußsche Zahlenebene in N Exemplaren mit den Blattnummern $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$), dann sagt man: Die N -te Wurzel w_k aus $z \in \text{Blatt } k$ ist eindeutig bestimmt und liegt dann im Winkelraum D_k , d.h. $w_k \in D_k$:

$$z \in \text{Blatt } k \Leftrightarrow w_k = \sqrt[N]{z} \in D_k \quad \text{oder} \quad z \in D_k \Leftrightarrow w = z^N \in \text{Blatt } k$$

Hinweis: Oftmals werden die Wurzeln aus z einfach mit z_k statt w_k bezeichnet.

Aufgaben:

- 5.1. Berechnen Sie $\sqrt[4]{-1}$ im Komplexen und stellen Sie die Wurzeln als Scatterplot in der Gaußschen Zahlenebene dar!
Geben Sie die Hauptwurzel exakt an (arithmetisch, trigonometrisch und exponentiell!).
- 5.2. Geben Sie die Lösungen folgender Gleichungen in exakter Form an!
a) $z^6 = -1/2 + 3^{1/2}/2i$ b) $z^5 = 1 - 3^{1/2}i$ c) $z^{-3} = 2$
- 5.3. Die Funktion $w = \sqrt[3]{z}$ ist auf der dreiblättrigen Riemannschen Fläche definiert.
Ermitteln Sie w für
a) $z = 27i \in \text{Blatt } 2$ b) $z = 27i \in \text{Blatt } 0$ c) $z = -4 \cdot 2^{1/2} + 4 \cdot 2^{1/2}i \in \text{Blatt } 1$
d) $z = -4 \cdot 2^{1/2} + 4 \cdot 2^{1/2}i \in \text{Blatt } 0$ e) $z = -3 + i \in \text{Blatt } 2$
- 5.4. Berechnen Sie alle Werte von:
a) $\sqrt{-5+12i}$ b) $\sqrt[3]{12+5i}$ c) $\sqrt[3]{3-4i}$ d) $\sqrt[3]{\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ}$
e) $\sqrt[4]{\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ}$ f) $\sqrt[5]{8-6i}$ g) $\sqrt[3]{-1}$
- 5.5. Geben Sie jeweils die Hauptwurzel an:
a) $\sqrt{-49}$ b) $\sqrt{-x^2}$, x reell, c) $\sqrt{-1/9}$ d) $\sqrt{-x^2y^2}$, x, y reell, e) $\sqrt{-49a^2}$, a reell,
f) $\sqrt{-48} + \sqrt{-75} + \sqrt{-27}$ g) $\sqrt{-12} + \sqrt{-8} + \sqrt{-0,6}$
- 5.6. Vereinfachen Sie unter Beachtung der Hauptwurzeln die folgenden Terme:
a) $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3}$ b) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8}$ c) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{b}$, a, b reell, d) $a \cdot i : \sqrt{-a^3}$, a reell,
e) $\sqrt{x-y} : \sqrt{y-x}$, x, y reell, f) $\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{b-a}$, a, b reell, g) $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{12} : (i \cdot \sqrt{-a^2})$
Hinweis: Nutzen Sie eine Fallunterscheidung, falls notwendig.
- 5.7. Berechnen Sie die N -ten Einheitswurzeln $z^{1/N}$ mit $z = 1$ und $N = 2, 3, 4, 6, 8, 12$.
Stellen Sie die Wurzeln für ein festes N jeweils als Scatterplot dar und begründen Sie, warum $\sqrt{1} = -1$ möglich sein kann.
- 5.8. Geben Sie die Lösungen in Aufgabe 5.4. sowohl exakt als auch auf vier Kommastellen gerundet an (arithmetische Darstellung). Formen Sie anschließend alle Ergebnisse in die exponentielle Darstellung um und nutzen Sie dabei das Bogenmaß zur Winkelangabe.

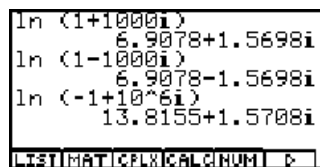
KAPITEL 6

Der komplexe Logarithmus einer komplexen Zahl z (Haupt- und Nebenwerte)



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Warum erhält man beim Logarithmieren im Komplexen mit dem Taschenrechner stets nur Zahlen in einem waagerechten Parallelstreifen um die x-Achse?

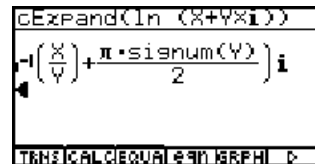
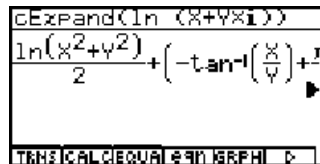
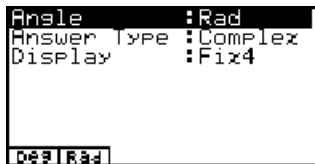


Im **RUN-MAT**-Menü:

Voreinstellung im **SET UP** auf **Complex Mode: a+bi**

Es scheint tatsächlich so zu sein, dass sich der Imaginärteil y des komplexen Logarithmus kaum von der x-Achse wegbewegt, im Beispiel bis auf **-1,5698** nach „unten“ und bis auf **1,5708** nach „oben“. Hingegen sind durchaus „große“ x -Werte möglich, im Beispiel **13,8155**.

In diesem Kapitel soll die algebraische Struktur des komplexen Logarithmus offen gelegt werden. Dazu begeben wir uns in das **CAS**-Menü und stellen dort das **SET UP** auf **Complex Mode: a+bi** (Answer Type: Complex) und Winkelmessung im **Bogenmaß** (Angle: Rad) ein:



Wir erhalten für $z = x + y \cdot i$ eine von der Schulmathematik her bekannte Formel für den Hauptwert des komplexen Logarithmus:

$$\ln(x + y \cdot i) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + (-\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(y)) \cdot i$$

kurz

$$\ln(z) = \ln|z| + \arg(z) \cdot i \quad \text{mit} \quad -\pi < \theta = \arg(z) \leq \pi \text{ (Hauptargument),}$$

wenn man $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\theta = \arg(z) = -\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(y)$ ausnutzt, vgl. hierzu wieder Kapitel 3, S. 19f. Damit erweist sich auch hier das symbolische Rechnen als ein nützlicher Ratgeber zur Formel für das Logarithmieren. Die zu Beginn dieses Kapitels gestellte Frage kann damit klar beantwortet werden: Der **CASIO**-Taschenrechner **ALGEBRA FX 2.0** berechnet für $\ln(x + y \cdot i)$ stets den DIN-gerechten Hauptwert, dessen Imaginärteil in der Tat im Intervall $(-\pi, \pi]$ liegt. Dies ist genau der Parallelstreifen D_0 , der im Kapitel 4, S. 22, beschrieben wird!

Wir berechnen nun $\ln(r \cdot e^{(\theta i)})$ im **CAS**-Menü wieder mit Hilfe des **cExpand(...** - Befehls:

<code>CExpand(ln (re(θi)))</code>	<code>CExpand(ln (re(θi)))</code>	<code>CExpand(ln (re(θi)))</code>	<code>CExpand(ln (re(θi)))</code>
$\ln(r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2) + (-\arctan(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(r \cdot \sin(\theta))) \cdot i$	$\ln(r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2) + (-\arctan(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(r \cdot \sin(\theta))) \cdot i$	$\ln(r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2) + (-\arctan(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(r \cdot \sin(\theta))) \cdot i$	$\ln(r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2) + (-\arctan(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(r \cdot \sin(\theta))) \cdot i$
<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>

$$\ln(r \cdot e^{(\theta i)}) =$$

$$\ln(r^2 \cdot (\sin(\theta))^2 + r^2 \cdot (\cos(\theta))^2) + (-\arctan(\cos(\theta)/\sin(\theta)) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(r \cdot \sin(\theta))) \cdot i$$

Diese Formel ist fast nicht mehr überschaubar, denn z.B. $(\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2 = 1$ und $-\arctan(\cos(\theta)/\sin(\theta)) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(r \cdot \sin(\theta)) = \theta$ wurden nicht vereinfacht!

Lieber Leser, an dieser Stelle muß erneut zur Ehrenrettung des **CAS**-Resultates folgendes klar gestellt werden, warum nicht vereinfacht wird:

Die symbolische Variable r (bzw. θ) muß keine reelle Zahl (z.B. Winkel im Bogenmaß) sein, z.B. $r = 1+i$ und $\theta = \pi/2$. Dann gilt sofort ein unerwartetes Ergebnis (Probieren Sie es aus!):

$$r^2 \cdot (\sin(\theta))^2 + r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 = 2i \quad \text{oder} \quad \text{sgn}(r \cdot \sin(\pi/2)) = (1+i)/\sqrt{2}.$$



Das „Geheimnis“ mit dieser Formel wird im Kapitel 7 bzw. 9 gelüftet. Damit konnte das **CAS**-Resultat nicht anders ausfallen, wenn die symbolischen Variablen r und θ nicht spezifiziert sind! Mit dem geschachtelten Befehl **simplify(cExpand(...** statt nur **cExpand(...** wird dieser lange Formelterm etwas vereinfacht: $\cos(\theta)/\sin(\theta) = 1/\tan(\theta)$:

<code>simplify(cExpand(ln (</code>	<code>simplify(cExpand(ln (</code>	<code>simplify(cExpand(ln (</code>	<code>CExpand(ln (re(θi)))</code>
$-2 \cdot \arctan(\frac{1}{\tan(\theta)}) \cdot i + \ln(r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2) + \pi \cdot \text{signum}(r \cdot \sin(\theta)) \cdot i$	$-2 \cdot \arctan(\frac{1}{\tan(\theta)}) \cdot i + \ln(r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2) + \pi \cdot \text{signum}(r \cdot \sin(\theta)) \cdot i$	$-2 \cdot \arctan(\frac{1}{\tan(\theta)}) \cdot i + \ln(r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2) + \pi \cdot \text{signum}(r \cdot \sin(\theta)) \cdot i$	$\ln(r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2) + \pi \cdot \text{signum}(r \cdot \sin(\theta)) \cdot i$
<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>

Es ergeben sich ähnliche Formelstrukturen wie im Kapitel 5, S. 25f, und alle dort getroffenen Feststellungen sind auch hier voll gültig.

Mit der wiederum „vereinfachten“ Eingabe des Befehls **cExpand(ln(r)+ln(e^(θi)))** erhält man:

<code>CExpand(ln (r)+ln (e(</code>	<code>CExpand(ln (r)+ln (e(</code>	<code>CExpand(ln (r)+ln (e(</code>	<code>ln (r)+ln (e(θi)))</code>
$\ln(\frac{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}{2}) + \ln(r) + (-\arctan(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(\sin(\theta))) \cdot i$	$\ln(\frac{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}{2}) + \ln(r) + (-\arctan(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(\sin(\theta))) \cdot i$	$\ln(\frac{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}{2}) + \ln(r) + (-\arctan(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(\sin(\theta))) \cdot i$	$\ln(r) + \ln(e^{(\theta i)})$
<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>

und schließlich mit **simplify(cExpand(ln(r)+ln(e^(θi))))**:

<code>simplify(cExpand(ln (</code>	<code>ln (r)+ln (e(θi)))</code>
$-\arctan(\frac{1}{\tan(\theta)}) \cdot i + \ln(r) + \frac{\pi \cdot \text{signum}(\sin(\theta)) \cdot i}{2}$	$\ln(r) + \ln(e^{(\theta i)})$
<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>	<small>TAN3CALCEQUA EQN B3PHI 0</small>



Wir kommen nun zu den (unendlich vielen) Werten des komplexen Logarithmus und geben zuerst die entsprechenden Formeln an:

$$w_k = \ln(z) = \ln|z| + (\arg(z) + k \cdot 2\pi) \cdot i, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

d.h. für den Hauptwert ($k = 0$)

$$w_0 = \ln(z) = \ln|z| + \arg(z) \cdot i$$

und für den k -ten Nebenwert ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

$$w_k = w_0 + k \cdot 2\pi i = \ln|z| + (\arg(z) + k \cdot 2\pi) \cdot i$$

Mit dem Index k wird hier wieder im Urbildbereich der z -Werte die Blattnummer (einer unendlich-blättrigen Riemannschen Fläche) und im Bildbereich der Logarithmenwerte w_k der Parallelstreifen D_k bezeichnet, in dem dann der entsprechende Haupt- bzw. Nebenwert liegen wird, vgl. Kapitel 4, S. 21f.

Beispiel:

Man berechne sowohl näherungsweise (**RUN·MAT**-Menü) als auch exakt (**CAS**-Menü) für $z = 1 + i$ den Haupt- und die Nebenwerte in den Parallelstreifen D_k mit $k = 0, \pm 1, \pm 2$

und stelle die Ergebnisse abschließend graphisch dar (Scatterplot im **STAT**-Menü).

```
{-2,-1,0,1,2}→List 1
Done
ln (1+i)+List 1×2πi
Done
LIST/MAT/CALC/NUMI >
```

Eingabe im **RUN·MAT**-Menü

Anordnung der Haupt- und Nebenwerte untereinander, entsprechend der Lage in den Parallelstreifen

Ans 1 0.3466 2 0.3466 3 0.3466 4 0.3466 5 0.3466 0.3466-11.7810i	
Ans 1 0.3466 2 0.3466 3 0.3466 4 0.3466 5 0.3466 0.3466-5.4978i	
Ans 1 0.3466 2 0.3466 3 0.3466 4 0.3466 5 0.3466 0.3466+0.7854i	
Ans 1 0.3466 2 0.3466 3 0.3466 4 0.3466 5 0.3466 0.3466+7.0686i	
Ans 1 0.3466 2 0.3466 3 0.3466 4 0.3466 5 0.3466 0.3466+13.3518i	

Nebenwert $w_2 = \ln(1 + i) \in D_2$

Nebenwert $w_1 = \ln(1 + i) \in D_1$

Hauptwert $w_0 = \ln(1 + i) \in D_0$

Nebenwert $w_{-1} = \ln(1 + i) \in D_{-1}$

Nebenwert $w_{-2} = \ln(1 + i) \in D_{-2}$

Anzeige der Werte aus dem **List-Ans**-Speicher

Die folgenden Bilder zeigen die Haupt- und Nebenwerte in exakter Darstellung im **CAS**-Menü:

$$\frac{\ln(1+i)}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

Hauptwert w_0

$$A = \frac{\ln(1+i) - 2 \times 2\pi i}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

A = Nebenwert w_{-2}

$$B = \frac{\ln(1+i) - 1 \times 2\pi i}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

B = Nebenwert w_{-1}

$$C = \frac{\ln(1+i) - 0 \times 2\pi i}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

C = Hauptwert w_0

$$D = \frac{\ln(1+i) + 1 \times 2\pi i}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

D = Nebenwert w_1

$$E = \frac{\ln(1+i) + 2 \times 2\pi i}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

E = Nebenwert w_2

Datenübertragung vom **List-Ans**-Speicher in Listen des **STAT**-Menüs und Einrichten des Betrachtungsfensters:

```
List Ans→List 1
Done
ReP List 1→List 2
Done
ImP List 1→List 3
Done
LIST/MAT/CALC/NUMI >
```

List 1	List 2	List 3	List 4
1 0.3466	0.3466	-11.781	
2 0.3466	0.3466	-5.4978	
3 0.3466	0.3466	0.7854	
4 0.3466	0.3466	7.0686	
5 0.3466	0.3466	13.3518	
		0.7854	

```
Betrachtungsfenster
xmin : 0
xmax : 1
scale : 0.1
dot : 7.9365E-03
ymin : -18
ymax : 18
INIT/STAT/STO/STO/DEL
```

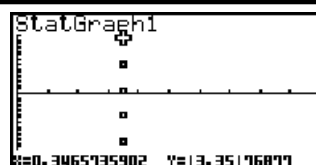
Die Abspeicherung erfolgte im **RUN·MAT**-Menü, die Listeneinsicht erfolgt bereits im **STAT**-Menü, ebenso die Fenstereinstellung.

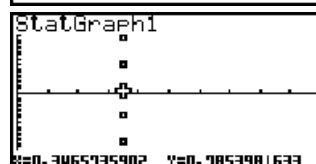
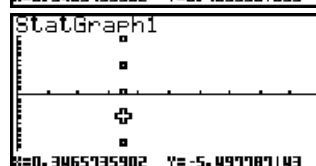
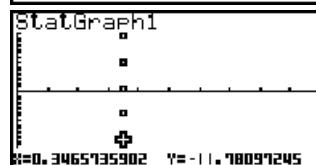
Definition des Scatterplots **StatGraph1** über den Befehl **GRPH 5:Set** :

List 1	List 2	List 3	List 4
1:0.3465	0.3465	-11.78	
5:Set	55	-5.497	
4>Select	55	0.0685	
3:8-Gph3	55	7.0685	
2:8-Gph2	55	13.351	
1:8-Gph1		0.7854	

Aktivieren des Plots **StatGraph1** über den Befehl **GRPH 4>Select**, dann **StatGraph1: DrawOn** und schließlich **DRAW** :

List 1	List 2	List 3	List 4
1:0.3465	0.3465	-11.78	
5:Set	55	-5.497	
4>Select	55	0.0685	
3:8-Gph3	55	7.0685	
2:8-Gph2	55	13.351	
1:8-Gph1		0.7854	


Wert w_2

Wert w_1

Wert w_0

Wert w_{-1}

Wert w_{-2}

Lage der Haupt- und Nebenwerte in der Gaußschen Zahlenebene senkrecht übereinander, d.h. die Realteile sind unverändert: $x = 0,34657\dots$ und die Imaginärteile haben untereinander den Abstand 2π .

Beispiel:

Anzugeben sind alle Lösungen z der Gleichung $e^z = 10 + 10i$. Wenn es eine Lösung z gibt, dann findet man dazu sofort unendlich viele andere Lösungen wegen der Periodizität der komplexen e -Funktion. Wir rechnen wie folgt: $z = \ln(10 + 10i)$ und erhalten mittels des Taschenrechners den Hauptwert für z :

$\ln(10+10i)$
2.6492+0.7854i

$\ln(10+10i)$
eAns
10.0000+10.0000i

$\ln(10+10i)$
$\frac{\pi i}{4} + \ln(10) + \frac{\ln(2)}{2}$

eAns
10+10i

Die ersten zwei Bilder zeigen den Hauptwert $z = 2,6492 + 0,7854i$ im **RUN·MAT**-Menü einschließlich der Probe $e^{\text{Ans}} = 10 + 10i$. Im **CAS**-Menü erhält man das exakte Ergebnis für den Hauptwert z . Die allgemeine Lösung lautet somit: $z = 2,6492 + 0,7854i + k \cdot 2\pi i$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Im Bereich der komplexen Zahlen wird üblicherweise nur mit der \ln -Funktion gerechnet. Andere Basen (z.B. **10**) sind hier unüblich und werden gemäß der Formel $\lg z = \ln z / \ln 10$ umgerechnet, vgl. **CAS**-Menü:

$\text{CEXPAND}(\log(X+iY))$
$\frac{\ln(x^2+y^2)}{2 \cdot \ln(10)} + \frac{(-\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(y)) \cdot i}{\ln(10)}$

$\text{CEXPAND}(\log(X+iY))$
$\frac{\ln(x^2+y^2)}{2 \cdot \ln(10)} + \frac{(-\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(y)) \cdot i}{\ln(10)}$

$$\lg(x+y \cdot i) = (\ln \sqrt{x^2+y^2} + (-\arctan(x/y) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(y)) \cdot i) / \ln 10.$$

$\log(iY)$
$\log(Y) + \frac{\pi i}{2 \cdot \ln(10)}$

Umrechnung des 10er Logarithmus einer (imaginären) Zahl iy im **CAS**-Menü:
 $\lg(iy) = \lg(y) + \lg(i) = \lg(y) + (\pi/2 \cdot i) / \ln 10$

Hinweis:

Wegen der Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus gelten die im Reellen bekannten Logarithmengesetze nicht mehr uneingeschränkt, z.B. folgt aus $\ln z_1 = \ln z_2$ nicht unmittelbar $z_1 = z_2$ sondern nur $z_1 = z_2 + k \cdot 2\pi i$ mit **einem** passenden $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Aufgaben:

- 6.1. Berechnen Sie $\ln z$ im Komplexen ($z \in$ **Blatt k** , $k = 0, \pm 1, \pm 2$) und stellen Sie die Logarithmen in den Parallelstreifen **D₂** bis **D₂** als Scatterplot in der Gaußschen Zahlenebene dar!
Geben Sie den Hauptwert exakt an (arithmetisch, trigonometrisch und exponentiell!).
a) $z = 27i$ b) $z = \cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ$ c) $z = -4 \cdot 2^{1/2} + 4 \cdot 2^{1/2}i$
- 6.2. Geben Sie die Lösungen folgender Gleichungen in exakter Form an!
a) $e^z = -1/2^{1/2} + i/2^{1/2}$ b) $e^z = -2$ c) $e^z = i$
- 6.3. Die Funktion $w = \ln z$ ist auf der unendlich-blättrigen Riemannschen Fläche definiert. Ermitteln Sie w im **RUN·MAT**-Menü für
a) $z = 1-4i \in$ **Blatt 6** b) $z = 1-4i \in$ **Blatt 0** c) $z = -i \in$ **Blatt 2** d) $z = -i \in$ **Blatt 1**
d) $z = -1 \in$ **Blatt 4** e) $z = -1 \in$ **Blatt 2**
- 6.4. Die Funktion $w = \ln z$ ist auf der unendlich-blättrigen Riemannschen Fläche definiert. Ermitteln Sie w im **CAS**-Menü für
a) $z = 1-4i \in$ **Blatt 6** b) $z = 1-4i \in$ **Blatt 0** c) $z = -i \in$ **Blatt 2** d) $z = -i \in$ **Blatt 1**
d) $z = -1 \in$ **Blatt 4** e) $z = -1 \in$ **Blatt 2**
- 6.5. Berechnen Sie alle Werte von $w = \ln z$ für :
a) $z = -5+12i$ b) $z = 12+5i$ c) $z = 3-4i$ d) $z = \cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ$
Wie lautet jeweils der Hauptwert?
- 6.6. Geben Sie die Lösungen in Aufgabe 6.3. in einer Liste auf vier Kommastellen gerundet an (arithmetische Darstellung). Formen Sie anschließend alle Ergebnisse in die exponentielle Darstellung um und nutzen Sie dabei das Bogenmaß zur Winkelangabe.
- 6.7. Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $e^z = e^{3-4i}$ an.
- 6.8. Stellen Sie die Gleichung $w = (e^z - e^{-z})/2$ im **CAS**-Menü nach z um.
Hinweis: Nutzen Sie den **Solve(...** - Befehl und interpretieren Sie die Ergebnisse.
Wie würden Sie die Gleichung „per Hand“ nach z umstellen, wenn z reell ist?
- 6.9. Stellen Sie die Gleichung $w = (e^z + e^{-z})/2$ im **CAS**-Menü nach z um.
Hinweis: Nutzen Sie den **Solve(...** - Befehl und interpretieren Sie die Ergebnisse.
Wie würden Sie die Gleichung „per Hand“ nach z umstellen, wenn z reell ist?

KAPITEL 7

Eine Bemerkung zur komplexen Signum-Funktion (Vorzeichenfunktion)



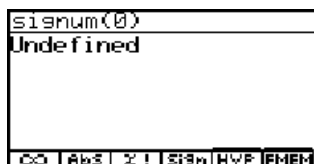
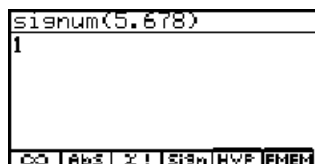
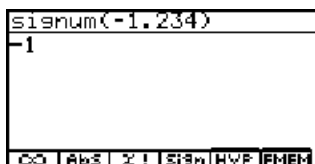
Was den Schüler hier besonders interessiert:

Wie berechnet man das „Vorzeichen“ einer komplexen Zahl z ?

Die **Signum**-Funktion (Vorzeichen-Funktion) $y = \text{sgn}(x)$ ist für $x = 0$ unstetig (und dort nicht definiert) und es gilt im Reellen:

$$y = \text{sgn}(x) = -1 \text{ für } x < 0 \quad \text{und} \quad y = \text{sgn}(x) = 1 \text{ für } x > 0 .$$

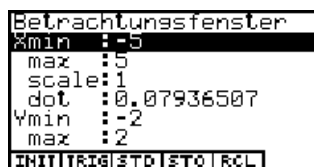
Wir sehen uns das im **CAS**-Menü an und drücken dazu die **[OPTN]**-Taste und dann **[F4]**:



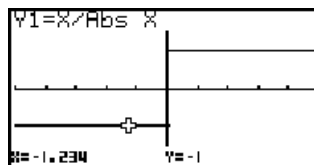
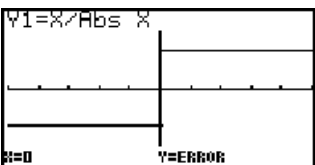
Die Vorzeichenfunktion für reelle Zahlen.

Im **GRPH·TBL**-Menü kann der graphische Verlauf der reellen Vorzeichen-Funktion dargestellt werden, jedoch steht dort der **signum(...** - Befehl nicht zur Verfügung. Mit Hilfe der Betragsfunktion **Abs** bzw. der (postiven) Wurzelfunktion $(x^2)^{1/2}$ definiert man hier:

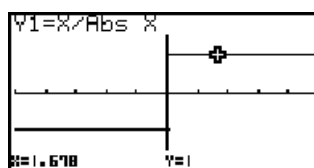
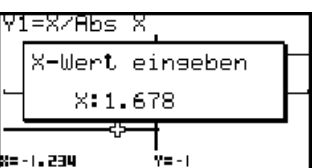
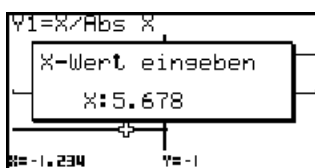
$$y = \text{sgn}(x) = x / \text{Abs } x = x / \sqrt{x^2} \text{ für } x \neq 0$$



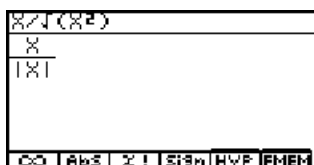
Vor dem Zeichnen (**[F5]**-Taste drücken: **DRAW**) wurde das Betrachtungsfenster eingestellt!



Mit der **[F1]**-Taste (**TRACE**) wird der Cursor aktiviert. Es können Punkte des Graphen abgetastet werden. Für $x = 0$ erscheint $y = \text{ERROR}$ (d.h. kein y -Wert definiert!). Durch Drücken der **[X,0]**-Taste öffnet sich ein Fenster zur Eingabe anderer x -Werte, z.B. $x=1,234$ (dann **[EXE]**).



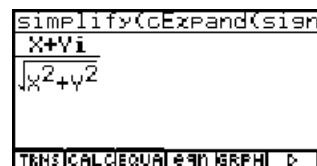
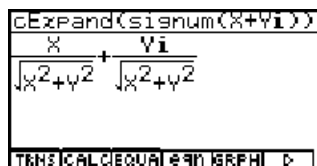
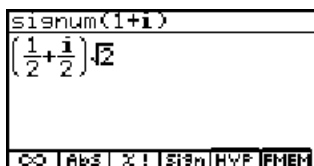
Wird ein x -Wert außerhalb des Betrachtungsfensters eingegeben, erscheint eine Fehlermeldung!



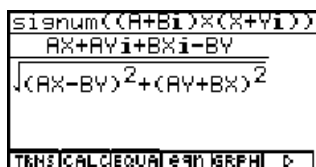
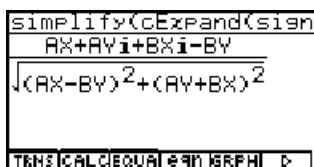
Im **CAS**-Menü kann die Gleichheit der reellen Terme $x/\sqrt{x^2}$ und $x/\text{Abs } x$ unmittelbar überprüft werden.

Wir kommen nun zur **komplexen Signum-Funktion** und stellen fest, dass hier ähnlich der Vektorrechnung der Ortsvektor (Zeiger) zur komplexen Zahl z unter Beibehalten der Richtung auf die Länge 1 normiert wird.

Im **CAS**-Menü sieht man das sowohl im Beispiel $z=1+i$ als auch beim symbolischen Rechnen mit **cExpand(signum($x+yi$))** bzw. **simplify(cExpand(signum($x+yi$)))**:

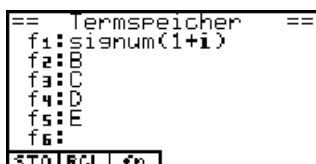
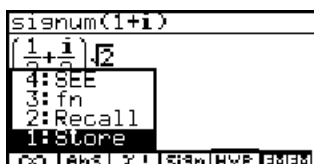


Damit kann die Eingangs gestellte Frage dahingehend beantwortet werden, dass es im Komplexen nicht um ein Vorzeichen sondern um eine auf den Betrag $\text{Abs } z^0 = 1$ („Länge“ 1) normierte komplexe Zahl $z^0 = \text{signum}(z) = e^{i \text{Arg } z}$ geht.

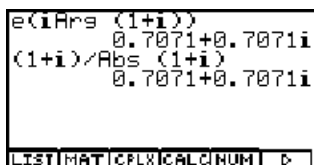


Beispiel zur Normierung eines Produktes komplexer Zahlen $(a+bi) \cdot (x+yi)$ mittels der Signum-Funktion und dem Befehl **simplify(cExpand(signum(($a+bi$)($x+yi$))))**

In der anschließenden Bildfolge wurde versucht, den Term **signum(1+i)** über den Term-Speicher (**FMEM**) f_1 vom **CAS**-Menü in des **RUN·MAT**-Menü zu übernehmen:



Nach dem Wechsel über das Hauptmenü in das **RUN·MAT**-Menü gelingt der Aufruf aus dem Termspeicher, jedoch scheitert die Ausführung der Berechnung von **signum(1+i)**, da dieser Berechnungsbefehl im **RUN·MAT**-Menü nicht vorgesehen ist.



Berechnungsmöglichkeiten von **signum(1+i)** im **RUN·MAT**-Menü

Berechnung von **signum(-1+2i)** im **RUN·MAT**-Menü mittels der im Komplexen ungültigen Formel $\text{sgn}(z) = z/\text{Abs } z \neq z/\sqrt{z^2}$.

Aufgabe: Warum ist die Formel ungültig? Wo steckt der Fehler?

KAPITEL 8

Die allgemeine Potenz $z_1^{z_2}$ (Haupt- und Nebenwerte)



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Warum ist die allgemeine Potenz $z_1^{z_2}$ unendlich vieldeutig?

Schreibt man die komplexe Basis z_1 z.B. in exponentieller Form und beachtet dabei die Periodizität der komplexen e -Funktion, etwa $z_1 = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 i = e^{i\pi/4} = e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, dann ergeben sich für die allgemeine Potenz die Werte

$$z_1^{z_2} = \left(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 i \right)^{z_2} = e^{i(\pi/4 + 2k\pi)z_2}$$

Damit ergibt sich z.B. für $k = 0$ der Hauptwert der Potenz zu $e^{i(\pi/4)z_2}$, der 1. Nebenwert ist dann $e^{i(9\pi/4)z_2}$, der -1. Nebenwert der Potenz ist hier $e^{i(-7\pi/4)z_2}$ usw.

Die allgemeine Formel lautet:

$$w = z_1^{z_2} = e^{(\ln(|z_1|) + i \arg(z_1) + k \cdot 2\pi i) \cdot z_2} \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Den Hauptwert der allgemeinen Potenz erhält man wieder im Fall $k = 0$, wenn für $\arg(z_1)$ das DIN-gerechte Hauptargument $-\pi < \theta = \arg(z_1) \leq \pi$ eingesetzt wird. Der Index k wird wieder als Blattnummer interpretiert und man sagt, der k -te Nebenwert der allgemeinen Potenz liegt im **Blatt k** einer unendlich-blättrigen Riemannschen Fläche.

Beispiel:

Man berechne den Hauptwert und die k -ten Nebenwerte für $w = (1-i)^{(1+i)}$ und $k = 0, \pm 1, \pm 2$.

Wie lösen die Aufgabe im **RUN·MAT**-Menü:

```
(1-i)^(1+i)
2.8079-1.3179i
e((ln(1-i))(1+i))
2.8079-1.3179i
```

Überprüfung des Hauptwertes im **RUN·MAT**-Menü:

$$w_0 = (1-i)^{(1+i)} = e^{(\ln(1-i))(1+i)} = 2,8079 - 1,3179i$$

Wegen der zu erwartenden Größenordnung der Ergebnisse wird das Anzeigeformat auf **Display: Sci3** eingestellt. Die Blattnummern $k = 0, \pm 1, \pm 2$ werden in der Liste **List 1** abgespeichert. Die Haupt- und Nebenwerte werden nun sofort komplett erhalten, indem statt k der Listename in den Exponenten geschrieben wird:

```
Anale :Rad
Complex Mode: a+bi
Coord :On
Grid :Off
Axes :On
Label :Off
Display :Sci3
F12 [Sci Norm] Fns
```

```
{-2,-1,0,1,2}>List 1
Done
e((ln(1-i)+2πiList 1)
(1+i))
```

Das Ergebnis wird im **List·Ans**-Speicher abgelegt und angezeigt:

KAPITEL 8 Die N-te Wurzel einer komplexen Zahl z

```
Ans
1 [80516]
2 [1503.]
3 [2.807]
4 [5.2E+]
5 [9.7E+]
8.05E+05-3.78E+05i
```

```
e((ln(1-i)-4pi)(1+i))
(1+i)^((-17pi/4+ln(2)/2))
e
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

Anzeige der Werte im **RUN·MAT**-Menü bzw. zum Vergleich im **CAS**-Menü in exakter Form:

$$w_{-2} = (1-i)^{(1+i)} = e^{(\ln(1-i)-4\pi i)(1+i)} = 8,1 \cdot 10^5 - 3,8 \cdot 10^5 i$$

```
Ans
1 [80516]
2 [1503.]
3 [2.807]
4 [5.2E+]
5 [9.7E+]
1.50E+03-7.06E+02i
```

```
e((ln(1-i)-2pi)(1+i))
(1+i)^((-9pi/4+ln(2)/2))
e
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

$$w_{-1} = (1-i)^{(1+i)} = e^{(\ln(1-i)-2\pi i)(1+i)} = 1,5 \cdot 10^3 - 7,1 \cdot 10^2 i$$

```
Ans
1 [80516]
2 [1503.]
3 [2.807]
4 [5.2E+]
5 [9.7E+]
2.81E+00-1.32E+00i
```

```
e((ln(1-i)+0pi)(1+i))
(1+i)^((-pi/4+ln(2)/2))
e
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

Hauptwert:

$$w_0 = (1-i)^{(1+i)} = e^{(\ln(1-i)-0\pi i)(1+i)} = 2,8 \cdot 10^0 - 1,3 \cdot 10^0 i$$

```
Ans
1 [80516]
2 [1503.]
3 [2.807]
4 [5.2E+]
5 [9.7E+]
5.24E-03-2.46E-03i
```

```
e((ln(1-i)+2pi)(1+i))
(1+i)^((7pi/4+ln(2)/2))
e
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

$$w_1 = (1-i)^{(1+i)} = e^{(\ln(1-i)+2\pi i)(1+i)} = 5,2 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^{-3} i$$

```
Ans
1 [80516]
2 [1503.]
3 [2.807]
4 [5.2E+]
5 [9.7E+]
9.79E-06-4.60E-06i
```

```
e((ln(1-i)+4pi)(1+i))
(1+i)^((15pi/4+ln(2)/2))
e
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

$$w_2 = (1-i)^{(1+i)} = e^{(\ln(1-i)+4\pi i)(1+i)} = 9,8 \cdot 10^{-6} - 4,6 \cdot 10^{-6} i$$

Wir überzeugen uns noch einmal davon, dass $e^{(\ln(1-i)+2\pi i \text{List1})}$ tatsächlich $1-i$ ist:

```
e(ln(1-i)+2piList1)
TMS/MAT/CPX/CALC/HUM/▶
```

```
Ans
1 [1-0.9]
2 [1-i]
3 [1-i]
4 [1-i]
5 [0.999]
1.00E+00-1.00E+00i
```

```
Ans
1 [1-0.9]
2 [1-i]
3 [1-i]
4 [1-i]
5 [0.999]
1.00E+00-1.00E+00i
```

Anzeige des **List-Ans**-Speichers

Nach diesem Beispiel betrachten wir nun wieder die algebraische (symbolische) Struktur der Berechnungsformeln für den Hauptwert von $z_1^{z_2} = (a+bi)^{(x+yi)}$ im **CAS**-Menü:

$$e^{(\arctan(a/b)-\pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot y} \cdot \cos\left(\ln(a^2+b^2)y/2 + (-\arctan(a/b)+\pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot x\right) \cdot \sqrt{(a^2+b^2)^x} +$$

$$e^{(\arctan(a/b)-\pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot y} \cdot \sin\left(\ln(a^2+b^2)y/2 + (-\arctan(a/b)+\pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot x\right) i \cdot \sqrt{(a^2+b^2)^x}$$

Diese umfangreiche Formel erhält man mit dem **cExpand(...)** - Befehl:

```
cExpand((A+Bi)^(X+Yi))
e^((tan^-1(A/B)-pi*signum(B)/2)*Y)
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

```
cExpand((A+Bi)^(X+Yi))
pi*signum(B)/2)*Y)
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

```
cExpand((A+Bi)^(X+Yi))
cos(ln(A^2+B^2)*Y/2+(-tan^-1(A/B)+pi*signum(B)/2)*X)
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

```
cExpand((A+Bi)^(X+Yi))
tan^-1(A/B)+pi*signum(B)/2)*X)
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

```
cExpand((A+Bi)^(X+Yi))
sqrt(A^2+B^2)^X+e^((tan^-1(A/B)-pi*signum(B)/2)*Y)
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

```
cExpand((A+Bi)^(X+Yi))
tan^-1(A/B)-pi*signum(B)/2)*Y)
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

```
cExpand((A+Bi)^(X+Yi))
signum(B)/2)*Y)
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

```
cExpand((A+Bi)^(X+Yi))
sin(ln(A^2+B^2)*Y/2+(-tan^-1(A/B)+pi*signum(B)/2)*X)
TMS/CALC/EQUAL/99M/GRAPH/▶
```

$e^{-\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{\pi \cdot \text{signum}(B)}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\ln(A^2+B^2)}{2}\right) \cdot y + (-\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot x \right) +$	$\left(\cos\left(\frac{\ln(A^2+B^2)}{2}\right) \cdot y + (-\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot x \right) \cdot \sqrt{(A^2+B^2)^x} \cdot i$
--	---

Mit dem **simplify(cExpand(...** - Befehl werden gemeinsame Faktoren ausgeklammert:

$$e^{(\arctan(a/b) - \pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot y} \cdot \left(\cos\left(\frac{\ln(a^2+b^2)}{2}\right) \cdot y + (-\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot x \right) + \sin\left(\frac{\ln(a^2+b^2)}{2}\right) \cdot y + (-\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot x \cdot \sqrt{(a^2+b^2)^x} \cdot i$$

$e^{\left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) - \frac{\pi \cdot \text{signum}(B)}{2}\right) \cdot y} \cdot \left(\cos\left(\frac{\ln(A^2+B^2)}{2}\right) \cdot y + (-\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot x \right) +$	$\left(\cos\left(\frac{\ln(A^2+B^2)}{2}\right) \cdot y + (-\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(b)) \cdot x \right) \cdot \sqrt{(A^2+B^2)^x} \cdot i$
--	---

Diese für den Taschenrechner aufwendigen Umformungen erfordern viel Speicherplatz, so dass bei der Fehlermeldung „**Speicherfehler**“ zunächst frühere Umformungen gelöscht werden sollten.

Ebenso wird daran erinnert, dass im **SET UP** des **CAS-Menüs** der **Complex Mode** eingestellt ist.

<p>Speicherfehler Drücken Sie: [ESC]</p>	<p>Angle : Rad Answer type : Complex Display : Norm1</p>
--	--

Der zuletzt erhaltene Formelterm kann gemäß der Eulerschen Formel und unter Beachtung der Blattnummer k weiter zusammengefaßt und mit der ursprünglichen Definition der allgemeinen Potenz $z_1^{z_2}$ verglichen werden:

$$\begin{aligned} w_k &= z_1^{z_2} = e^{(\ln(|a+bi|) + i \arg(a+bi) + k \cdot 2\pi i) \cdot (x+yi)} \\ &= e^{(x \cdot \ln(|a+bi|) - y \cdot (\arg(a+bi) + k \cdot 2\pi))} \cdot e^{i(y \cdot \ln(|a+bi|) + x \cdot (\arg(a+bi) + k \cdot 2\pi))} \\ &= r_k \cdot e^{i\theta_k} \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für den von k abhängigen Betrag $r_k = |w_k|$ und Winkel $\theta_k = \arg(w_k)$:

$$\begin{aligned} r_k &= e^{(x \cdot \ln(|a+bi|) - y \cdot (\arg(a+bi) + k \cdot 2\pi))} = \sqrt{(a^2+b^2)^x} \cdot e^{-(\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(b) + k \cdot 2\pi) \cdot y} \\ \theta_k &= y \cdot \ln(|a+bi|) + x \cdot (\arg(a+bi) + k \cdot 2\pi) = y \cdot \ln(\sqrt{a^2+b^2}) + (-\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(b) + k \cdot 2\pi) \cdot x \end{aligned}$$

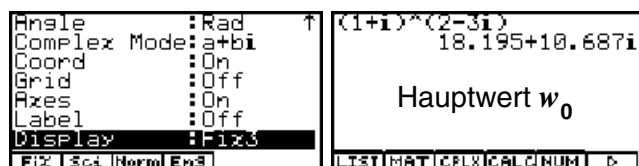
In den zuletzt angeführten Formeln wurde das Hauptargument $\arg(a+bi)$ wieder in der im **CAS**-Menü üblichen Form dargestellt, vgl. Kapitel 5 S. 25f :

$$\arg(a+bi) = -\arctan(a/b) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(b)$$

Beispiel:

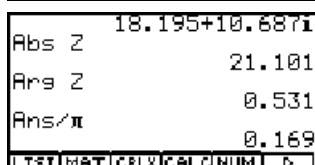
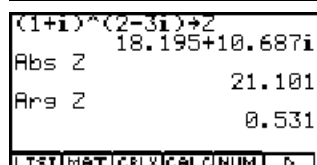
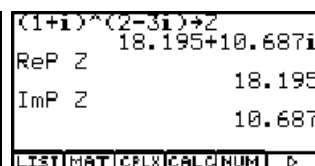
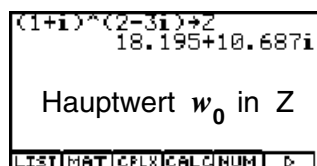
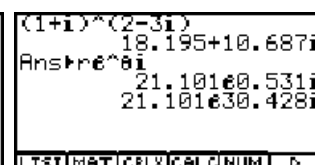
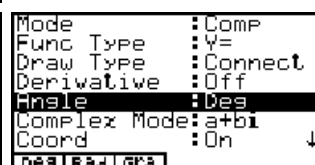
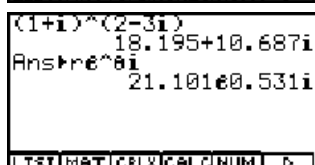
Man berechne den Hauptwert und den k -ten Nebenwert für $w = (1+i)^{(2-3i)}$. Weiterhin sind folgende Größen anzugeben: $\operatorname{Re}(w)$, $\operatorname{Im}(w)$, $|w|$ und $\arg(w)$ sowie das m -te Nebenargument von w_k . Wie lösen die Aufgabe im **RUN·MAT**-Menü bzw. **CAS**-Menü und ergänzen dort den Formelanteil für den k -ten Nebenwert sowie das m -te Nebenargument per Hand.

Zunächst werden Überlegungen zum Hauptwert w_0 angestellt:



Der Hauptwert in unterschiedlichen Darstellungen:

$$\begin{aligned} w_0 &= 18,195 + 10,687i = 21,101 \cdot e^{0,531i} \\ &= 21,101 \cdot e^{0,169\pi i} = 21,101 \cdot e^{30,428^\circ i} \end{aligned}$$



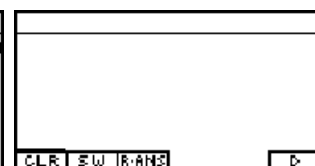
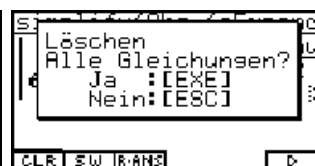
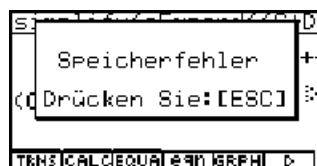
Der Hauptwert, zerlegt in seine Bestandteile:

$$\operatorname{Re}(w_0) = 18,195, \operatorname{Im}(w_0) = 10,687$$

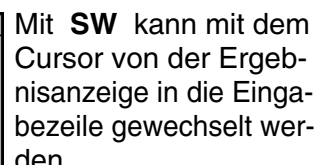
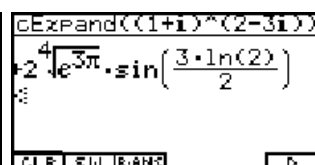
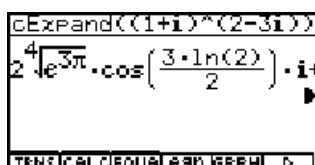
$$\operatorname{abs}(w_0) = 21,101, \arg(w_0) = 30,428^\circ \text{ bzw.}$$

$$\arg(w_0) = 0,169\pi = 0,531$$

Falls es mit dem Speicherplatz zu knapp wird: Löschen von Speicherplatz im **CAS**-Menü z.B. mit: **CLR 3: ALLEQU**



Exakte Darstellung der Potenz (Hauptwert) im **CAS**-Menü:



Im **CAS**-Menü wurde folgendes Ergebnis angezeigt:

$$w_0 = 2 \cdot \sqrt[4]{e^{3\pi}} \cdot (\sin(3/2 \cdot \ln(2)) + i \cdot \cos(3/2 \cdot \ln(2)))$$

Gemäß der trigonometrischen Darstellung (Normalform) erwartet man jedoch ein Ergebnis der Form:

$$w_0 = r_0 \cdot (\cos(\theta_0) + i \cdot \sin(\theta_0)) ,$$

d.h. die **cos**- und die **sin**-Funktion erscheinen „vertauscht“ im Grafikdisplay. Wie ist das zu erklären?
Nach dem korrekten Ergebnis im **RUN·MAT**-Menü gilt

$$w_0 = 21,101 \cdot (\cos(0,169\pi) + i \cdot \sin(0,169\pi))$$

mit $r_0 = 21,101 = \sqrt[4]{e^{3\pi}}$ und $\theta_0 = 0,169\pi = 0,531 \neq 3/2 \cdot \ln(2) = 1,04$, d.h. $3/2 \cdot \ln(2)$

ist nicht das Hauptargument (im Bogenmaß)

- und auch kein Nebenargument - der Zahl w_0 .

$3/2 \times \ln(2)$	1.0397
$2 \times 4 \times \sqrt[4]{e(3\pi)}$	21.1014

Damit wird deutlich:

Die Normalform der trigonometrischen Darstellung $w_0 = r_0 \cdot (\cos(\theta_0) + i \cdot \sin(\theta_0))$

wurde im **CAS**-Menü hier für dieses Beispiel nicht angezeigt. Es kam hier die „vereinfachte“ Darstellung

$$w_0 = r_0 \cdot (\sin(\pi/2 - \theta_0) + i \cdot \cos(\pi/2 - \theta_0)) = r_0 \cdot (\sin(3/2 \cdot \ln(2)) + i \cdot \cos(3/2 \cdot \ln(2)))$$

zur Anzeige im Taschenrechnerdisplay.

Damit wurde im **CAS**-Menü das Hauptargument $\theta_0 = \pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2) = 0,169\pi = 0,531$

zu Gunsten einer „vereinfachten“ Darstellung in $\pi/2 - \theta_0 = 3/2 \cdot \ln(2) = 1,04$ umgeformt - unter Anwendung der trigonometrischen Beziehungen

$$\cos(\pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2)) = \sin(3/2 \cdot \ln(2)) \quad \text{und} \quad \sin(\pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2)) = \cos(3/2 \cdot \ln(2)).$$

Anmerkung:

Die angezeigte „Variante“ von w_0 ist korrekt, jedoch ist dabei $3/2 \cdot \ln(2)$ weder das Haupt- noch irgendein Nebenargument von w_0 !

Bevor wir zu den Nebenwerten der allgemeinen Potenz kommen, eine Bemerkung zur Berechnung des Betrages im **CAS**-Menü. Trotz des Befehls **simplify(...)** wird der Term

$$(\sin(3/2 \cdot \ln(2)))^2 + (\cos(3/2 \cdot \ln(2)))^2 = 1$$

nicht vereinfacht. Eine Vereinfachung zur Dezimalzahlendarstellung (gerundet) ist im **CAS**-Menü mit **approx Ans** jederzeit möglich. Oder:

```
Simplify(Abs(CExpand
4*sqrt(3*pi)*4*(cos(3*ln(2)/2))
```

```
CExpand((1+i)^(2-3i))
2+4*(sin(3*ln(2)/2))^2
```

Berechnung des Betrages (**Abs**) und Übergabe der exakten Darstellung mittels des Term-speichers z.B. in das **RUN·MAT**-Menü zur weiteren numerischen Auswertung.

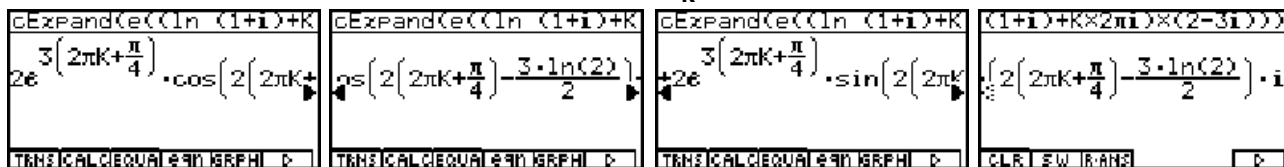
```
== Termspeicher ==
f1:e(3*pi/4)*4*(cos
f2:
f3:
f4:
f5:
f6:
STOIRCL f1
```

```
Aufrufen aus
Termspeicher
f[1~20]: 1
```

```
e(3*pi/4)*4*(cos(3*ln(2)/2))^2+4*(sin(3*ln(2)/2))^2^(1/2)
21.101
```

Wir kommen nun zur allgemeinen Darstellung des k -ten Nebenwertes im **CAS**-Menü mit der symbolischen Variablen k .

Hier erweist sich das **CAS**-Menü als leistungsstark im symbolischen Rechnen, da sofort die gewünschte Normalform für das Ergebnis w_k angezeigt wird!



Wir lesen das korrekte Ergebnis wie folgt ab:

$$w_k = e^{(\ln(1+i) + k \cdot 2\pi i)(2-3i)}$$

$$= 2 \cdot e^{3\pi/4 + k \cdot 6\pi i} \cdot \left(\cos(\pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2) + k \cdot 4\pi) + i \cdot \sin(\pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2) + k \cdot 4\pi) \right)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(w_k) &= r_k \cdot \cos(\theta_k) = 2 \cdot e^{3\pi/4 + k \cdot 6\pi i} \cdot \cos(\pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2) + k \cdot 4\pi), \\ \operatorname{Im}(w_k) &= r_k \cdot \sin(\theta_k) = 2 \cdot e^{3\pi/4 + k \cdot 6\pi i} \cdot \sin(\pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2) + k \cdot 4\pi), \\ \operatorname{abs}(w_k) &= r_k = 2 \cdot e^{3\pi/4 + k \cdot 6\pi i}, \\ \operatorname{arg}(w_k) &= \theta_k = \pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2) + k \cdot 4\pi, \end{aligned}$$

d.h. $\theta_k = \pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2)$ ist hier das (k -unabhängige) Hauptargument des k -ten Nebenwertes w_k . Damit hat das m -te Nebenargument im Blatt k den Wert

$$\theta_k = \operatorname{arg}(w_k) + m \cdot 2\pi = \pi/2 - 3/2 \cdot \ln(2) + m \cdot 2\pi.$$

Hiermit ist das umfangreiche Beispiel vollständig bearbeitet und alle Lösungen sind angegeben. Die für den Hauptwert zutreffenden Größen erhält man hier sofort, indem man $k = 0$ setzt, d.h. es wäre in diesem Beispiel vorteilhafter gewesen, sofort den k -ten Nebenwert zu berechnen und gar nicht anfangs extra auf den Hauptwert einzugehen. Dann wäre auch das oben diskutierte Winkelproblem nicht aufgetreten.

Aufgaben:

8.1. Berechnen Sie die allgemeinen Potenzen mit Haupt- und Nebenwerten:

a) $w = (1-i)^{(1+i)}$ b) $w = 1^i$ c) $w = a^z$ mit $a = i$ und $z = 1-4i$.

8.2. Bestimmen Sie in der Aufgabe 8.1. für den Wert w_k im k -ten Blatt jeweils das Hauptargument und den Betrag.

8.3. Bestimmen Sie in der Aufgabe 8.1. für den Wert w_k im k -ten Blatt jeweils den Real- und den Imaginärteil.

8.4. Berechnen Sie die allgemeine Potenz $w = (1+i)^{1/(A+i)}$ bzw. $w = (1+i)^{1/(1+Bi)}$ symbolisch mit Haupt- und Nebenwerten!

KAPITEL 9

Die komplexen trigonometrischen Funktionen $w = \sin(z)$ und $w = \cos(z)$



Was den Schüler hier besonders interessiert:

Warum sind die trigonometrischen Funktionen $w = \sin(z)$ und $w = \cos(z)$ unbeschränkt?

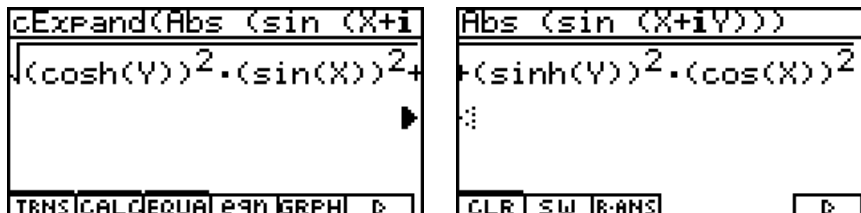
Wir sehen uns den Betrag von $\sin(z) = \sin(x+yi)$ im **CAS**-Menü etwas genauer an und erhalten zunächst mit **cExpand(...)**:



d.h.

$$\sin(x+yi) = \cosh(y) \cdot \sin(x) + i \cdot \sinh(y) \cdot \cos(x)$$

und mit **cExpand(Abs(...))** schließlich



$$|\sin(x+yi)| = \sqrt{\cosh^2(y) \cdot \sin^2(x) + \sinh^2(y) \cdot \cos^2(x)}$$

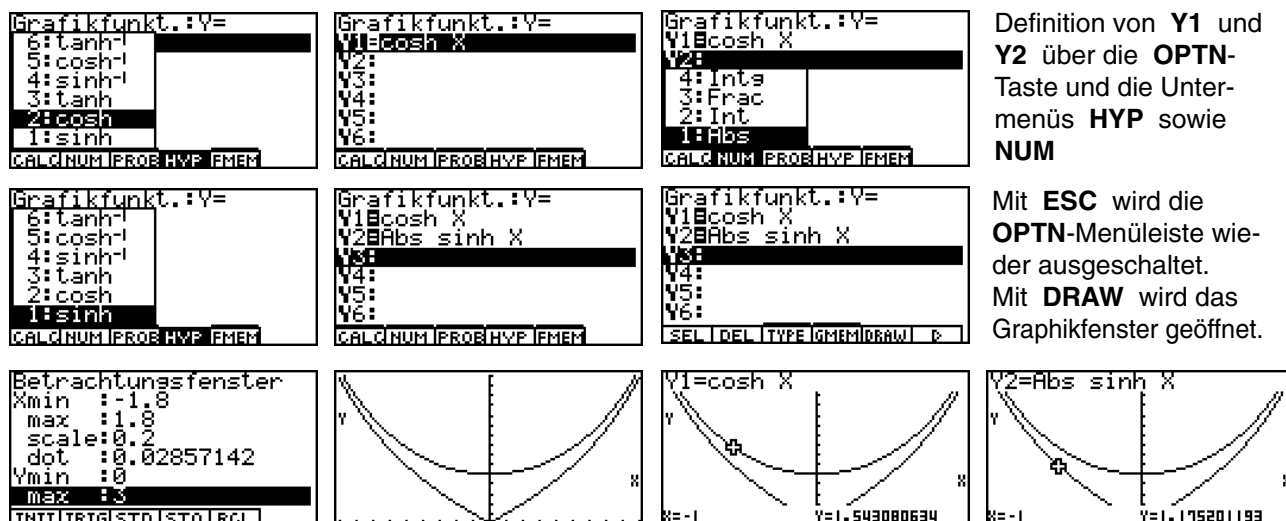
$$\geq \sqrt{\sinh^2(y) \cdot (\sin^2(x) + \cos^2(x))} = |\sinh(y)|$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus der Abschätzung $\cosh(y) > |\sinh(y)|$, wie man graphisch leicht im **GRPH·TBL**-Menü sieht oder aus der Definition der hyperbolischen Funktionen im **CAS**-Menü erkennt:



$$\cosh(y) = (e^y + e^{-y})/2 > \max\{(e^y - e^{-y})/2, (e^{-y} - e^y)/2\} = |\sinh(y)|$$

Wir sehen uns die Lage der **cosh**-Funktion und des Betrages der **sinh**-Funktion zur anschaulichen Interpretation der Ungleichung im **GRPH·TBL**-Menü an:



Die eingangs gestellte Frage kann nunmehr klar beantwortet werden:

Der Betrag der komplexen **sin**-Funktion $w = \sin(x+yi)$ ist mindestens so groß wie der Betrag der (reellen) **sinh**-Funktion $w = \sinh(y)$ und diese kann wegen der Definition über **e**-Funktionen über alle Grenzen hinaus anwachsen.

Damit ist die komplexe **sin**-Funktion unbeschränkt, wenn der **Imaginärteil** y in $\sin(x+yi)$ über alle Grenzen anwächst.



Für die **cos**-Funktion $w = \cos(x+yi)$ erhalten wir entsprechend



d.h.

$$\cos(x+yi) = \cosh(y) \cdot \cos(x) - i \cdot \sinh(y) \cdot \sin(x)$$

und

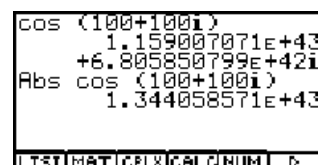
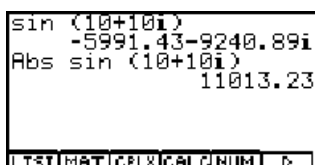
$$|\cos(x+yi)| = \sqrt{\cosh^2(y) \cdot \cos^2(x) + \sinh^2(y) \cdot \sin^2(x)}$$

$$\geq \sqrt{\sinh^2(y) \cdot (\cos^2(x) + \sin^2(x))} = |\sinh(y)|$$

Damit ergibt sich für die komplexe **cos**-Funktion die gleiche Argumentation hinsichtlich der Unbeschränktheit.

Beispiele im

RUN·MAT-Menü:



Die nächste interessante Frage ist die Gültigkeit des „trigonometrischen Pythagoras“, der im Reellen unabhängig vom Winkel θ (im Bogenmaß) wie folgt lautet: $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Im Komplexen erhalten wir hier im **CAS**-Menü für jede Zahl $z = x + yi$ das gleiche Ergebnis:

$$\sin^2(x+yi) + \cos^2(x+yi) = \cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$$

Damit hat die Unbeschränktheit der komplexen trigonometrischen Funktionen keinen Einfluß auf den „trigonometrischen Pythagoras“.

Die erhaltene Darstellung $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ heißt auch „hyperbolischer Pythagoras“:

<code>Simplify(CEXPAND((sin(cosh(Y))²-(sinh(Y))²</code>	<code>sin(X+YI))²+(cos(X+YI))²</code>	<code>1))²+(cos(X+YI))²</code>
<code>(cosh(Y))²-(sinh(Y))²</code>	<code>(cosh(Y))²-(sinh(Y))²</code>	<code>(cosh(Y))²-(sinh(Y))²</code>
<code>1</code>	<code>1</code>	<code>1</code>

Während der „trigonometrische Pythagoras“ $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ im **CAS**-Menü erkannt und mit **simplify(...** zu **1** umgeformt werden kann:

<code>(sin(θ))²+(cos(θ))²</code>	<code>Simplify((sin(θ))²+(cos(θ))²</code>	<code>(sin(θ))²+(cos(θ))²</code>
<code>(cos(θ))²+(sin(θ))²</code>	<code>1</code>	<code>1</code>
<code>1</code>	<code>1</code>	<code>1</code>

erkennt das **CAS**-Menü den „hyperbolischen Pythagoras“ im symbolischen Rechnen nicht mehr und man erhält z.B. nur die Umformung $\sin^2(\theta i) + \cos^2(\theta i) = \cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta)$:

<code>Simplify((sin(θi))²+(cos(θi))²</code>	<code>(θi))²+(cos(θi))²</code>
<code>(cosh(θ))²-(sinh(θ))²</code>	<code>(cosh(θ))²-(sinh(θ))²</code>
<code>1</code>	<code>1</code>

Obwohl das **CAS**-Menü den „hyperbolischen Pythagoras“ offenbar nicht kennt, kann die Ausgangsaufgabe durch unmittelbare Umformung in **e**-Funktionen doch noch korrekt vereinfacht werden, indem man den Zwischenschritt über die hyperbolischen Funktionen unterbindet. Es gelten bekanntlich für jedes $z = x + yi$ die Definitionen

$$\sin(z) = 1/i \cdot \sinh(iz) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i) \quad \text{und} \quad \cos(z) = \cosh(iz) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$$

Mit dem Befehl **trigToExp** kann der Zwischenschritt über die hyperbolischen Funktionen unterbunden und sofort in die exponentielle Darstellung umgeformt werden. Diese liefert dann mit **simplify(...** das gewünschte symbolische und absolut korrekte Ergebnis **1**:

<code>Angle :Rad</code>	<code>trigToExp((sin(X+YI))²+(cos(X+YI))²</code>	<code>(e^{Xi-Y}+e^{-Xi+Y})²-(e^{Xi-Y}-e^{-Xi+Y})²</code>	<code>Simplify(trigToExp((sin(X+YI))²+(cos(X+YI))²</code>
<code>Answer Type :Complex</code>	<code>(e^{Xi-Y}+e^{-Xi+Y})²-(e^{Xi-Y}-e^{-Xi+Y})²</code>	<code>(e^{Xi-Y}+e^{-Xi+Y})²-(e^{Xi-Y}-e^{-Xi+Y})²</code>	<code>1</code>
<code>Display :Norm2</code>	<code>1</code>	<code>1</code>	<code>1</code>

Nachweis des „hyperbolischen Pythagoras“ über den Befehl **trigToExp**:

<code>(trigToExp(cosh(Y))²-(sinh(Y))²</code>	<code>-(trigToExp(sinh(Y))²-(cosh(Y))²</code>	<code>Simplify(Ans)</code>
<code>(e^Y+e^{-Y})²-(e^Y-e^{-Y})²</code>	<code>(e^Y+e^{-Y})²-(e^Y-e^{-Y})²</code>	<code>1</code>
<code>1</code>	<code>1</code>	<code>1</code>

Weitere Beispiele zum symbolischen Rechnen mit dem **trigToExp** - Befehl:

		Umformung von $\sin^2(\theta i) + \cos^2(\theta i)$ in die exponentielle Darstellung mit trigToExp
		Vollständige Vereinfachung mit den Befehlen simplify und trigToExp
		Vollständige Vereinfachung von $\sin^2(z) + \cos^2(z)$ mit $z = 10 + 10i$

Eine kleine Geschichte über numerische Beispiele im **CAS**-Menü mit **approx** bzw. im **RUN·MAT**-Menü mit einer Aufgabe und den etwa drei gleichen Antworten:

Wir untersuchen den „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ für $\theta = 10 + 10i$ und betrachten dazu folgende Bildergeschichte. Zuerst werden im **CAS**-Menü alle Speicher gelöscht und die Anzeige im **SET UP** voreingestellt:

			$\begin{aligned} &\text{approx}((\sin(10+10i))^2 \\ &\quad + (\cos(10+10i))^2) \\ &= 0,9999994 \approx 1 \end{aligned}$	
			bzw. $\text{approx(Ans)} = 1,0000011 - 0,000003i \approx 1$	

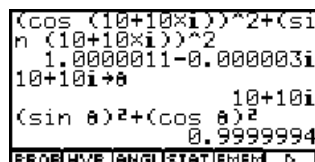
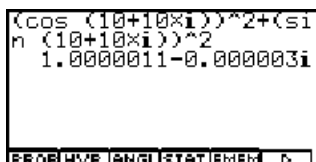
Schließlich wird die Zahl $10+10i$ zunächst in der Variablen θ zwischengespeichert, dann zur Kontrolle der Term $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$ aufgerufen und nun $\text{approx}(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))$ gerechnet. Erst hier ergibt sich im numerischen Rechnen das absolut korrekte Ergebnis:

			Numerische Berechnung von $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$ im CAS -Menü mittels dem approx -Befehl

Unsere kleine Geschichte endet damit, dass der Term $\sin^2(10+10i) + \cos^2(10+10i)$ über den Termspeicher in das **RUN·MAT**-Menü übertragen und dort erneut ausgewertet wird:



Termabspeicherung im
CAS-Menü und späterer
Aufruf im **RUN·MAT**-Menü



Was lehrt uns diese Geschichte?

Während das symbolische Rechnen absolut exakte Termumformungen anbietet (im Rahmen der Leistungsfähigkeit des **CAS**-Menüs) sind numerische Darstellungen im Rahmen der Rechengenauigkeit stets als mehr oder weniger korrekte Näherungswerte für einen gesuchten Zahlenwert zu betrachten.

Damit wird verdeutlicht, dass jedes elektronische Rechenhilfsmittel - vom Taschenrechner bis hin zum PC - stets verantwortungsvoll gehandhabt werden muß und **die Verantwortung für die Korrektheit des Ergebnisses** stets beim Nutzer liegt und nicht auf das Rechenhilfsmittel abgeschoben werden kann!

Für den Schüler bedeutet das, stets zu überlegen, ob das im Display angezeigte Ergebnis tatsächlich dem erwarteten Ergebnis für die betrachtete Aufgabenstellung entspricht. Hierbei sind zusätzlich noch die richtigen Voreinstellungen im menübezogenen **SET UP** zu beachten und **Eingabefehler** zu vermeiden, die ein erwartetes Ergebnis noch zusätzlich verfälschen können!

Aufgaben:

9.1. Untersuchen Sie im **CAS**-Menü symbolisch folgenden Term:

- $\sin(re^{\theta i})$ (mit **cExpand(...)** untersuchen)
- $\sin(re^{\theta i})$ (mit **trigToExp(...)** untersuchen)
- $\sin(re^{\theta i})$ (mit **expToTrig(...)** untersuchen)

9.2. Berechnen Sie $\sin^2(100+100i) + \cos^2(100+100i)$ sowohl exakt im **CAS**-Menü als auch näherungsweise im **RUN·MAT**-Menü und vergleichen Sie die Ergebnisse!

9.3. Berechnen Sie folgende Werte möglichst exakt:

- $\sin(\pi/2 + i)$
- $\cos(\pi/2 + i)$
- $\sin(\pi/2 + i \ln 3)$
- $\cos(\pi/2 + i \ln 3)$

9.4. Überprüfen Sie folgende Formeln im **CAS**-Menü:

- $\sin(z) = 1/i \cdot \sinh(iz)$
- $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz}) / (2i)$
- $\cos(z) = \cosh(iz)$
- $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz}) / 2$

9.5. Berechnen Sie $\sin(100+100i) \cdot \cos(100+100i)$ möglichst effektiv!

9.6. Zerlegen Sie im **CAS**-Menü $\tan(x+yi)$ in seinen Real- und Imaginärteil.

KAPITEL 10

Bemerkungen zu den komplexen Arcusfunktionen



Was den Schüler hier besonders interessiert:

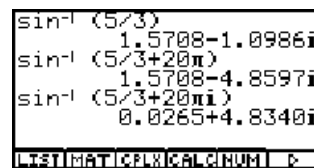
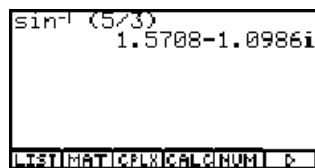
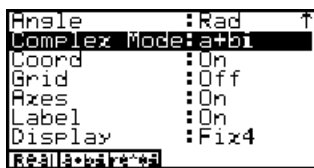
Wie ist die Umkehrabbildung der nicht eindeutigen **sin**-Funktion definiert?

Auf der Tastatur findet man als **Zweitfunktion** über den **sin**-, **cos**- und **tan**-Tasten die Umkehrabbildungen **arcsin(z)**, **arccos(z)** und **arctan(z)**, die hier symbolisch mit **sin⁻¹(z)**, **cos⁻¹(z)** und **tan⁻¹(z)** bezeichnet sind: **SHIFT sin**, **SHIFT cos**, **SHIFT tan** und nicht mit der Kehrwertbildung **1/sin(z)**, **1/cos(z)** und **1/tan(z)** verwechselt werden dürfen!

Wir probieren die Umkehrabbildung **arcsin(z)** einfach einmal im **RUN·MAT**-Menü aus, nachdem im dortigen **SET UP** wieder **Complex Mode: a+bi** und Bogenmaß (**Rad**) eingestellt sind:



Klar, im Reellen gibt es zu $5/3$ keinen Winkel $\theta = \arcsin(5/3)$ mit $\sin(\theta) = 5/3$.



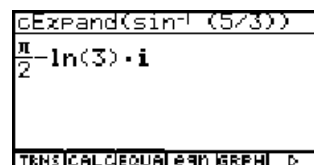
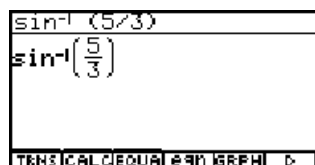
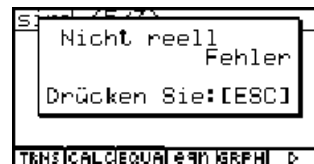
Jedoch im Komplexen gibt es zu $5/3$ einen Winkel $\theta = \arcsin(5/3)$ mit $\sin(\theta) = 5/3$.

z.B. erkennt man im **RUN·MAT**-Menü die Ergebnisse:

$$\arcsin(5/3) = 1,5708 - 1,0986i, \quad \arcsin(5/3 + 20\pi) = 1,5708 - 4,859i$$

usw.

Wir sehen uns die Formelstruktur im **CAS**-Menü an, zunächst die Fehlermeldung bei unkorrekter Voreinstellung:



Im letzten Bild ist das exakte Ergebnis erkennbar:

Für den komplexen Winkel $\theta = \pi/2 - i \cdot \ln 3$ gilt $\sin(\theta) = 5/3$, umgekehrt erhält man

$$\arcsin(5/3) = \pi/2 - i \cdot \ln 3 = 1,5708 - 1,0986i$$

Auf Grund der Periodizität der **sin**-Funktion kann das zuletzt erhaltene Ergebnis im Realteil mit $k \cdot 2\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, periodisch fortgesetzt werden:

$$\arcsin(5/3) + k \cdot 2\pi = \pi/2 - i \cdot \ln 3 + k \cdot 2\pi = 1,5708 - 1,0986i + k \cdot 2\pi$$

und man erhält weitere
Lösungen der Gleichung
 $\sin(\theta) = 5/3 = 1,6667$:

sin (π/2-i ln 3)	1.6667
sin (π/2+4π-i ln 3)	1.6667
sin (π/2-20π-i ln 3)	1.6667

LASTIMAT/CPX/CALC/NUMI >

Genau gilt hier folgende Festlegung:

Die **arcsin**-Funktion $\theta = \arcsin(z)$ berechnet den Hauptwert für einen möglichen Winkel θ mit der Eigenschaft $\sin(\theta) = z$, wobei gilt: $-\pi/2 \leq \operatorname{Re}(\theta) \leq \pi/2$.

Damit kann die eingangs gestellte Frage beantwortet werden:

Genau wie im Reellen, wenn man den Imaginärteil außer acht läßt, liegt auch im Komplexen der (Haupt-)Wertebereich der **arcsin**-Funktion in einem (senkrechten) **Parallelstreifen** mit der Eigenschaft:

$$-\pi/2 \leq \operatorname{Re}(\theta) \leq \pi/2 \quad \text{und} \quad -\infty \leq \operatorname{Im}(\theta) \leq \infty$$

Die entsprechende Aussage gilt für die **arccos**-Funktion mit dem (Haupt-)Wertebereich:

$$0 \leq \operatorname{Re}(\theta) \leq \pi \quad \text{und} \quad -\infty \leq \operatorname{Im}(\theta) \leq \infty$$

Man erkennt spätestens an dieser Stelle, dass es sinnvoll ist, im Bogenmaß zu rechnen, da eine Altgradeinstellung im **SET UP** zu nichtinterpretierbaren komplexen Zahlenwerten führt!

Die anschließende Bilderserie zeigt die komplizierte Berechnungsvorschrift für den Term **arcsin(x+yi)** :

The image displays a sequence of 12 calculator screens showing the derivation of the formula for $\arcsin(x+yi)$. The formulas are complex, involving square roots and logarithms. The final formula is shown in the bottom row, with a smiley face icon to its right.

Im mittleren Teil des Formelterms (**arctan**-Funktion eines Doppelbruches) wurde das Taschenrechnerbild auch nach unten gerollt, um in die Formelstruktur vollen Einblick zu erhalten.

Wir erkennen folgende interessante Formelstruktur:

$$\arcsin(x + yi) = -i/2 \cdot \ln(B^2 + A^2) - \arctan(A/B) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(B)$$

mit

$$B = x - \sqrt{2(x^2 - y^2 + \sqrt{4x^2y^2 + (-x^2 + y^2 + 1)^2} - 1)} \cdot \operatorname{sgn}(x \cdot y)/2$$

und

$$A = -y + \sqrt{2(-x^2 + y^2 + \sqrt{4x^2y^2 + (-x^2 + y^2 + 1)^2} + 1)}/2$$

Hintergrund zu dieser Formel ist der bekannte Zusammenhang der **arcsin**-Funktion zur **ln**-Funktion:

$$\arcsin(x + yi) = -i \ln \left(i(x + yi) + \sqrt{1 - (x + yi)^2} \right)$$



Man berechnet im **CAS**-Menü unschwer die Hauptwurzel

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (x + yi)^2} &= -i \sqrt{2(x^2 - y^2 + \sqrt{4x^2y^2 + (-x^2 + y^2 + 1)^2} - 1)} \cdot \operatorname{sgn}(x \cdot y)/2 \\ &+ \sqrt{2(-x^2 + y^2 + \sqrt{4x^2y^2 + (-x^2 + y^2 + 1)^2} + 1)}/2 \end{aligned}$$

d.h.

$$A = \operatorname{Re} \left(i(x + yi) + \sqrt{1 - (x + yi)^2} \right)$$

und

$$B = \operatorname{Im} \left(i(x + yi) + \sqrt{1 - (x + yi)^2} \right)$$

Schließlich gilt

$$-i \cdot \ln(A + Bi) = -i \cdot (\ln \sqrt{A^2 + B^2} + i \arg(A + Bi))$$

mit

$$\arg(A + Bi) = -\arctan(A/B) + \pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(B)$$

Damit ist das Geheimnis zur Berechnung der Zahl **arcsin(x + yi)** gelüftet und bereits früher dargestellte Formelstrukturen sind in Einzeltermen wieder zu erkennen!

Speziell ergibt sich mit $x = 0$:

$$\arcsin(yi) = i \cdot \operatorname{arsinh}(y)$$

Aufgaben:

10.1. Überprüfen Sie die auf dieser Seite dargestellten Formelterme im **CAS**-Menü!

10.2. Lösen Sie folgende Gleichungen: a) $\cos(z) = 5/3$ b) $\sin(z) = -5/3$.

10.3. Berechnen Sie für $z = -2 + \sqrt{2}i$ die Werte a) $\arccos(z)$ b) $\arcsin(z)$.

und schließlich:

$\frac{\cosh(1+i)}{\sinh(1) \cdot \cosh(1)}$ $\frac{(\sinh(1))^2 + (\cosh(1))^2}{\sinh(1) \cdot \cosh(1)}$	$\frac{\cosh(1+i)}{\sin(1) \cdot \cos(1) \cdot i}$ $\frac{(\sinh(1))^2 + (\cosh(1))^2}{\sin(1) \cdot \cos(1) \cdot i}$
--	--

$$\tanh(1+i) = 1,0839 + 0,2718i = \frac{(\sinh(1)\cosh(1) + \sin(1)\cos(1)i)}{(\sinh^2(1) + \cosh^2(1))}$$

Nun folgen konkrete Beispiele in Dezimalzahlendarstellung (gerundeter Zahlenwert) im **RUN · MAT**-Menü bzw. in exakter Darstellung im **CAS**-Menü für die Umkehrfunktionen:

$\cosh^{-1}(1+i)$ $\sinh^{-1}(1+i)$ $\tanh^{-1}(1+i)$	$\frac{(\tan^{-1}(\frac{1}{2}) + \frac{\pi}{2})i}{2} + \frac{\ln(5)}{4}$
---	--

Die exakte Darstellung für **artanh(1+i)** paßt hier in ein einziges Taschenrechner-Display!

$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{45+8} + \sqrt{45-8}}{4} + 1\right)^2 + 1\right)$	$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{45+8} - \sqrt{45-8}}{4} + 1\right)^2 + 1\right)$
--	--

Die exakte Darstellung für **arcosh(1+i)** wurde neben **cExpand(...** mit dem Befehl **simplify(...** vereinfacht.

$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{45+8} + \sqrt{45-8}}{4} + 1\right)^2 + 1\right)$	$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{45+8} - \sqrt{45-8}}{4} + 1\right)^2 + 1\right)$
--	--

$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{25+2} + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{25-2}}{2}\right)^2 + 1\right)$	$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{25-2} + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{25+2}}{2}\right)^2 + 1\right)$
---	---

Die exakte Darstellung für **arsinh(1+i)** wurde neben **cExpand(...** ebenfalls mit dem Befehl **simplify(...** vereinfacht.

$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{25+2} + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{25-2}}{2}\right)^2 + 1\right)$	$\ln\left(\left(\frac{\sqrt{25-2} + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{25+2}}{2}\right)^2 + 1\right)$
---	---

Auf die formelmäßige Niederschrift der jeweiligen exakten Darstellungen wurde an dieser Stelle verzichtet. Es bleibt dem Leser überlassen, dies in ausgewählten Beispielen vom Taschenrechner-Display abzuschreiben, sofern dies von Interesse sein sollte.

Abschließend erinnern wir an die nicht vorhandene Eineindeutigkeit der **cosh**-Funktion. Die **cosh**-Funktion ist bekanntlich eine gerade Funktion, d.h. **cosh(z)=cosh(-z)** für alle z . Deshalb hatte die oben betrachtete Gleichung $w = \cosh(z)$ auch zwei Lösungen und es wurde bei der Umkehrfunktion zwischen Haupt- und Nebenwerten unterschieden. Dies alles gilt nicht nur im Reellen sondern auch im Komplexen unverändert!

$\cosh(1+i)$ $\cosh(-1-i)$

$\cosh(1-i)$ $\cosh(-1+i)$

$\frac{\cosh(1+i)}{\cosh(-1-i)}$

$\frac{\cosh(1+i)}{\cosh(-1-i)}$

$\frac{\cosh(1-i)}{\cosh(-1+i)}$

$\frac{\cosh(1-i)}{\cosh(-1+i)}$

KAPITEL 12

Komplexe Polynome, deren Nullstellen und Faktorisierung in Linearfaktoren

Wir erinnern uns zunächst an den **Fundamentalsatz der Algebra**, der aussagt, dass ein Polynom n -ten Grades genau n Nullstellen besitzt, wenn man die möglichen Vielfachheiten der Nullstellen beachtet. Über jede dieser Nullstellen des Polynoms ist dann ein Linearfaktor festgelegt und es gilt insbesondere:

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$$

Sind darüber hinaus alle Koeffizienten reell, treten komplexe Nullstellen nur paarweise als komplexe und konjugiert komplexe Zahlen z_k und \bar{z}_k auf und es gilt: $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$ ist ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten.

Beispiel:

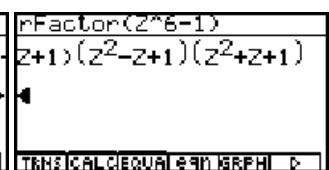
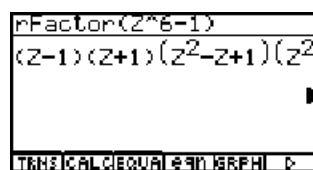
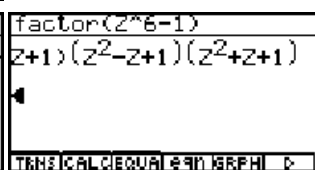
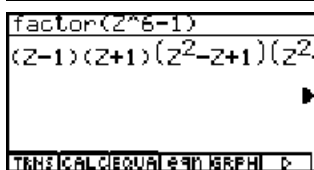
Das Polynom $p_6(z) = z^6 - 1$ mit reellen Koeffizienten ist in seine Linearfaktoren zu zerlegen. Anschließend ist eine Faktorisierung mit Linearfaktoren und quadratischen Faktoren anzugeben, die ausschließlich reelle Koeffizienten enthalten.

Lösung:

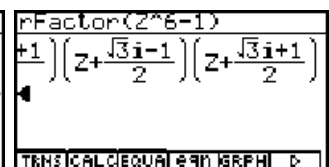
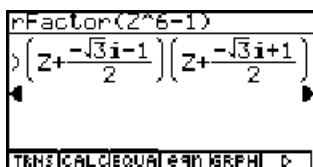
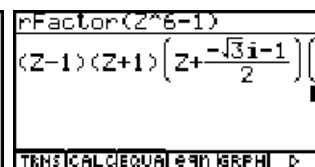
Im **SET UP** des **CAS**-Menüs sei zunächst der **Answer Type: Real** voreingestellt. Dann erhalten wir sowohl mit dem **factor(...** - Befehl als auch mit dem **rFactor(...** - Befehl das gleiche reelle Ergebnis:



$$p_6(z) = z^6 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)$$



Mit der Voreinstellung **Answer Type: Complex** zerlegt der **Root-Factor-Befehl** unter Ausnutzung aller komplexen Haupt- und Nebenwurzeln das Polynom in seine Linearfaktoren:



$$p_6(z) = z^6 - 1 = (z - 1)(z - (-1))(z - (1 + \sqrt{3})/2)(z - (-1 + \sqrt{3})/2)(z - (1 - \sqrt{3})/2)(z - (-1 - \sqrt{3})/2) \\ = (z - z_0)(z - z_3)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_5)(z - z_4)$$

d.h.

$$z_0 = 1, z_1 = (1 + \sqrt{3})/2, z_2 = (-1 + \sqrt{3})/2, z_3 = -1, z_4 = (-1 - \sqrt{3})/2 = \bar{z}_2, z_5 = (1 - \sqrt{3})/2 = \bar{z}_1.$$

Die Indizierung der z_k entspricht hierbei dem Index des Winkelraumes D_k , in dem z_k liegt.

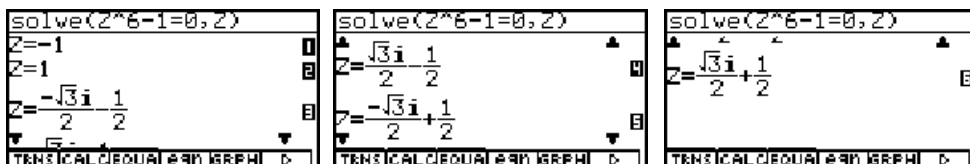
Das gerade betrachtete Beispiel verdeutlicht zwei Effekte der Displayanzeige:

1. Jeder Linearfaktor $(z - z_k)$ wird in der Form $(z + (-z_k))$ angezeigt, so dass beim Able-
sen der Nullstelle das **Vorzeichen geändert** werden muß.
2. Die **Reihenfolge der Faktoren** entspricht nicht unbedingt der im Kapitel 5 eingeführten
Indizierung der Haupt- und Nebenwurzeln.

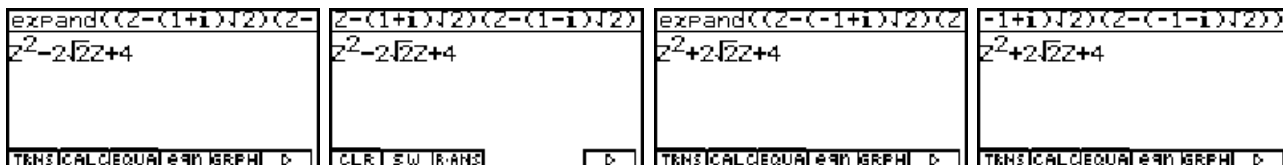
Schließlich darf nicht unerwähnt bleiben:

3. Nicht jede Faktorisierung gelingt im **CAS**-Menü, wenn die Nullstellen z.B. nicht exakt
darstellbar sind oder die Hintergrundprogrammierung des Taschenrechners überfordert
wird (z.B. Faktorisierung von $p^3(z) = z^3 - 3z^2 + 7$). In diesem Falle können die (komple-
xen) Nullstellen unkompliziert im **EQUA**-Menü aus der **Nullstellengleichung** des Poly-
noms ermittelt werden.

Wir bleiben beim eingangs betrachteten Beispiel und lösen die Nullstellengleichung des
Polynoms mit dem **solve(...** - Befehl exakt im **CAS**-Menü und erhalten die bereits oben
angegebenen Nullstellen in der Reihenfolge $z_3, z_0, z_4 = \bar{z}_2, z_2, z_5 = \bar{z}_1$ und z_1 :



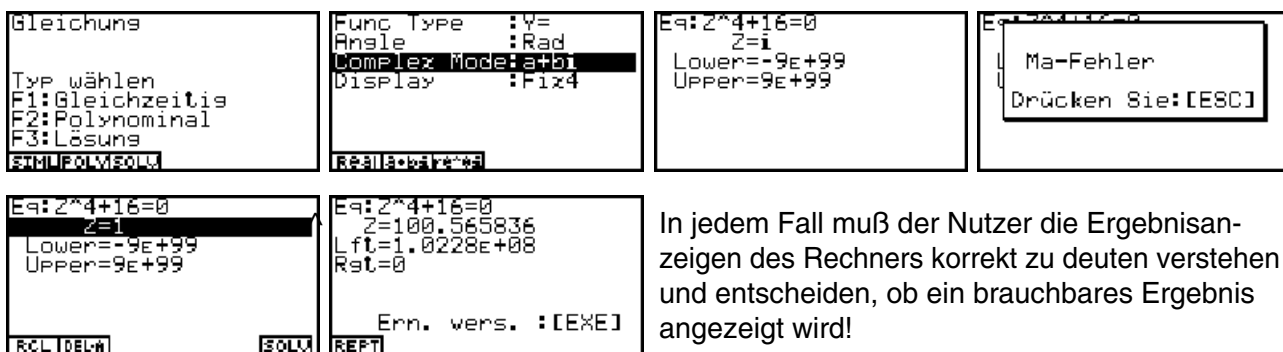
Mit dem **expand(...** -Befehl wird kontrolliert, dass die Linearfaktoren $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$ in der
Tat ein reelles quadratisches Polynom ergeben:



Wir begeben uns jetzt in das **EQUA**-Menü, um im hier betrachteten Beispiel die Nullstellen-
gleichung des betrachteten Polynoms zu lösen. Wir haben dort im **SET UP** verschiedene
Möglichkeiten der komplexen Zahlendarstellung der gefundenen Nullstellen. Im Eingangs-
fenster des **EQUA**-Menüs bedeuten:

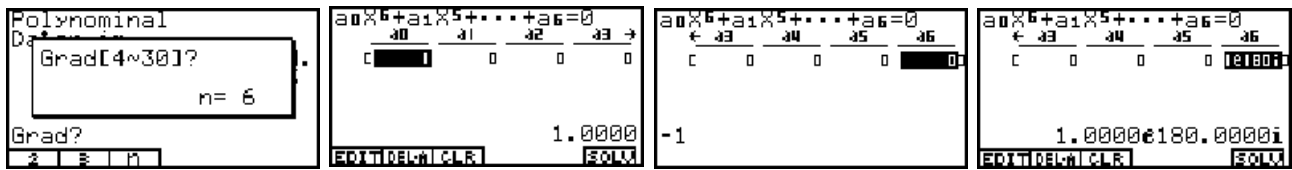
- F1:** (eindeutig lösbares) lineares Gleichungssystem (mehrere Gleichungen „gleichzeitig“)
F2: Nullstellengleichung zu einem (komplexen) Polynom (Gleichungstyp „polynomial“)
F3: (reelle) Lösung sonstiger nichtlinearer Einzelgleichungen

Vorab ein provozierter Fehlversuch, über die **F3**-Auswahl eine nichtreell lösbare Gleichung zu lösen.
Bei vorgegebenem komplexen Startwert singnalsiert der Recher einen Mathe-Fehler (hier bedeutet
dies: kein zulässiger Startwert), dann scheitert der Rechner bei der Suche nach einer (reellen) Lösung.

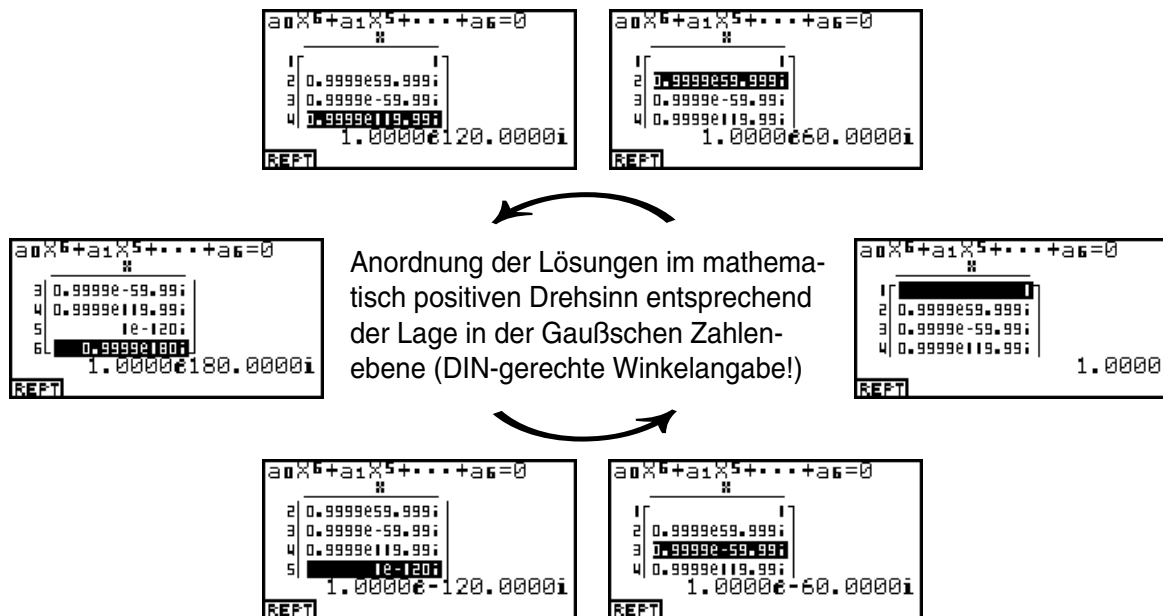


In jedem Fall muß der Nutzer die Ergebnisan-
zeigen des Rechners korrekt zu deuten verstehen
und entscheiden, ob ein brauchbares Ergebnis
angezeigt wird!

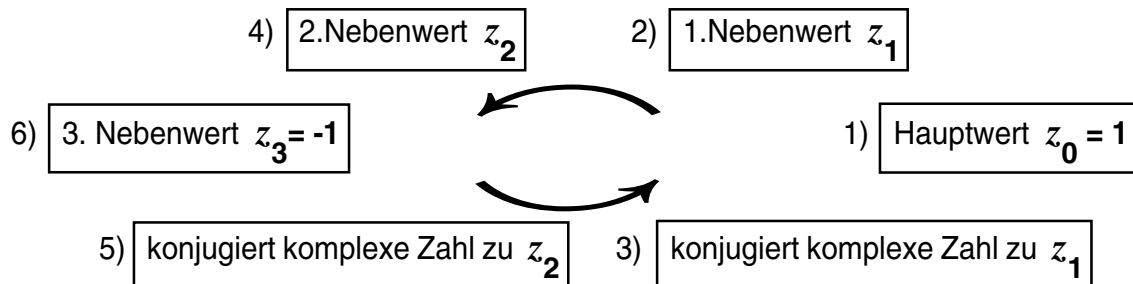
Lösung der Nullstellengleichung des oben betrachteten Polynoms 6. Grades $z^6 - 1 = 0$:



Man beachte in der Displayanzeige die umgekehrte Indizierung der Koeffizienten, z.B. a_0 als Koeffizient für x^n . Ergebnisanzeige in exponentieller Darstellung und Winkelmodus Altgrad (SET UP):



Anhand der Ergebnisanzeige stellt man wieder eine etwas andere Reihenfolge fest:

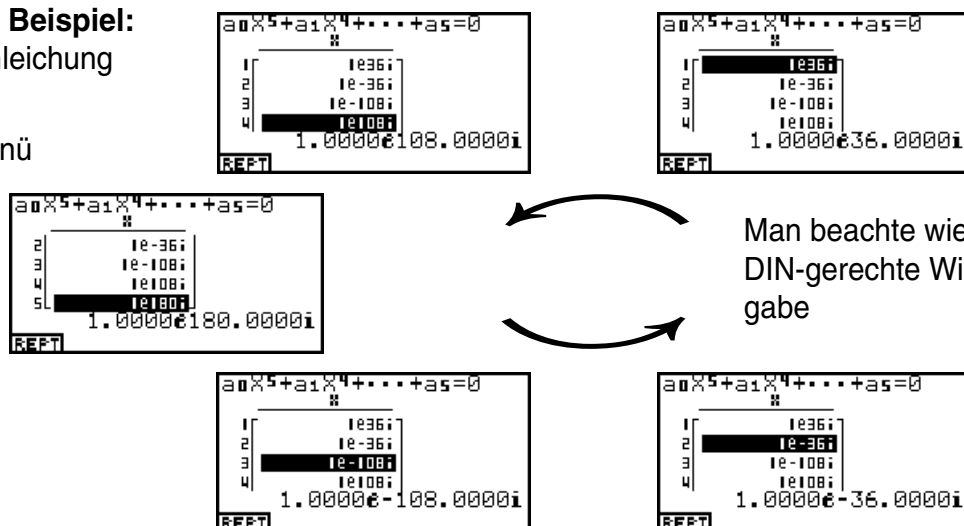


Ein weiteres Beispiel:

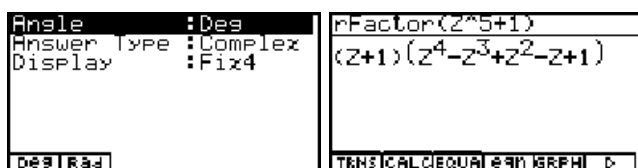
Lösung der Gleichung

$$z^5 + 1 = 0$$

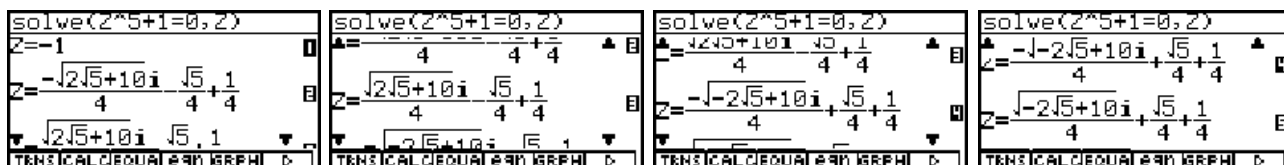
im EQUA-Menü



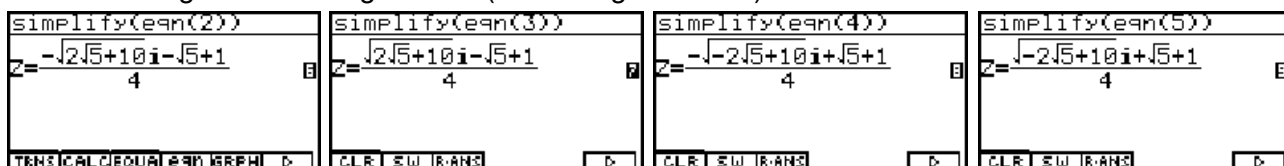
Für das zuletzt betrachtete Polynom 5. Grades gelingt die vollständige Faktorisierung im **CAS-Menü** nicht:



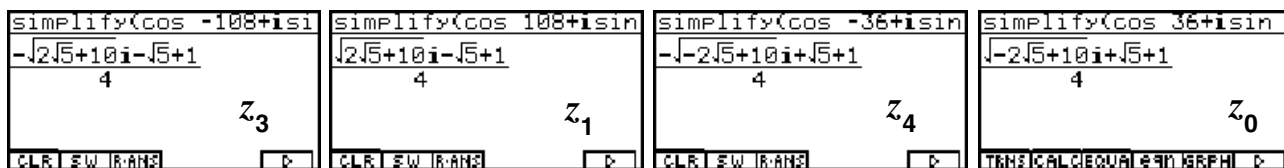
Jedoch gelingt es hier wieder, mit dem **solve(...)**-Befehl die exakte arithmetische Darstellung der Wurzelwerte in der Reihenfolge $z_2 = -1, z_3, z_1, z_4, z_0$ anzugeben:



Vereinfachung der Einzelergebnisse (Gleichungen 2 bis 5):

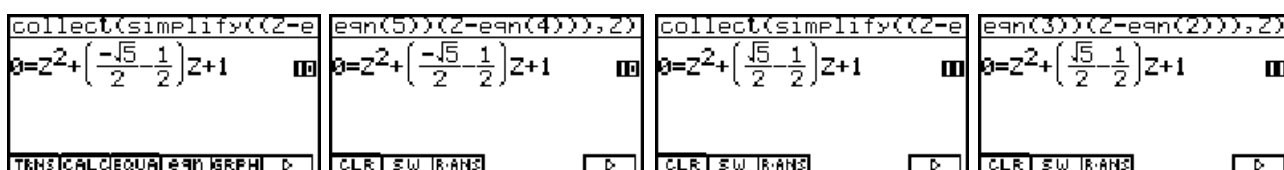


Vergleich mit der trigonometrischen Darstellung (Winkelmodus auf Altgrad eingestellt!):



Mittels dieser Wurzelwerte (komplexer und konjugiert komplexer Wurzelwert) können dann die entsprechenden Linearfaktoren $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$ zu den gesuchten quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten ausmultipliziert werden, indem folgende kombinierte Befehle angewendet werden:

collect(simplify((Z-eqn(5))(Z-eqn(4))),Z) bzw. **collect(simplify((Z-eqn(3))(Z-eqn(2))),Z)**



Damit lautet die reelle Faktorisierung $z^5 + 1 = (z+1)(z^2 - (\sqrt{5}+1)/2z + 1)(z^2 + (\sqrt{5}-1)/2z + 1)$.

Hinweis: Anwendung der Faktorisierung bei der Partialbruchzerlegung (Integration) gebrochen rationaler Funktionen.

Aufgaben:

12.1. Untersuchen Sie die Nullstellen des Polynoms $p_3(z) = z^3 - 3z^2 - 7$ und geben Sie eine möglichst genaue Zerlegung in Linearfaktoren an.

12.2. Zerlegen Sie das Polynom $p_4(z) = z^4 + 16$ in komplexe Linearfaktoren und geben Sie anschließend eine reelle Faktorisierung an!

12.3. Faktorisieren Sie das Polynom $p_7(z) = z^7 + 3z^6 + 5z^5 + 3z^4 - z^3 - 5z^2 - 4z - 2$.

12.4. Welches reelle Polynom $p_6(z)$ mit besitzt die Nullstellen $2e^{i36^\circ}$, $3e^{i45^\circ}$ und $0,5e^{i60^\circ}$?

KAPITEL 13

Komplexe Fourierreihen und Integration (Parameterintegrale)

Eine wichtige Anwendung der Integration im **CAS**-Menü besteht in der exakten Berechnung von komplexen Fourierkoeffizienten, das hier am Beispiel erläutert werden soll.

Beispiel:

Die Einweggleichrichtung sei durch die Funktion $y=f(x)=h \cdot (\cos x + |\cos x|)/2$ gegeben. Die Periodenlänge T beträgt $T=2\pi$. Die Amplitude $h > 0$ sei fest vorgegeben. Wir sehen uns zuerst eine Graphik im **GRPH·TBL**-Menü an, nachdem das **SET UP** entsprechend eingestellt (Bogenmaß!) und das **Betrachtungsfenster** eingerichtet sind:

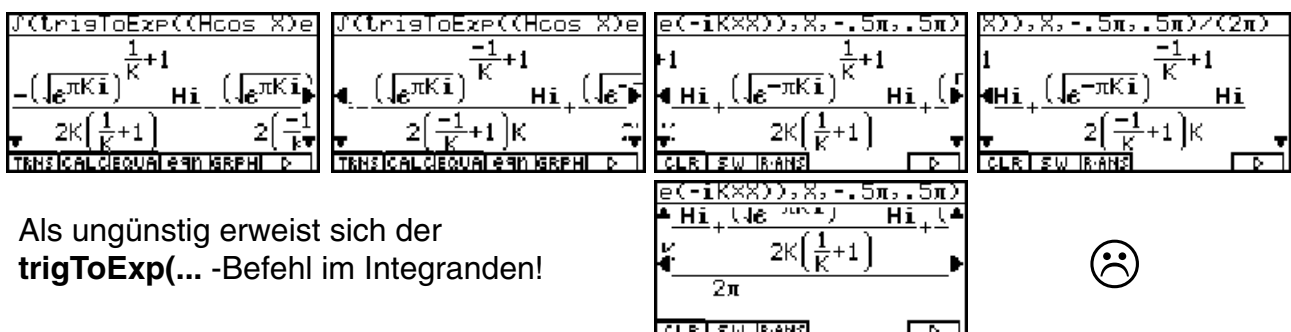
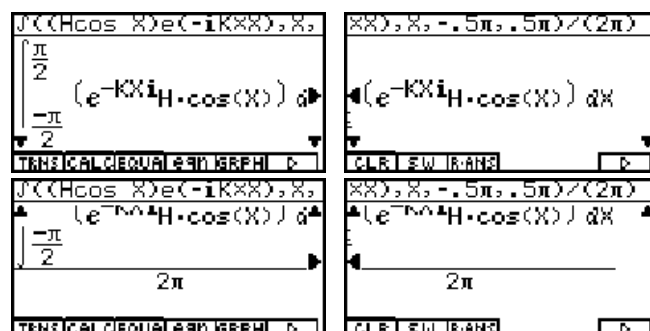


Die komplexe Fourierreihe lautet $f(x) = s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx\omega}$ mit $\omega = 2\pi/T = 1$,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ikx\omega} dx = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h \cdot \cos x \cdot e^{-ikx} dx$$

Die Berechnung von c_k
kann im **CAS**-Menü erfolgen:

(Ohne zusätzliche Hilfestellung wird die Integration nicht ausgeführt.)



Als ungünstig erweist sich der **trigToExp(...** -Befehl im Integranden!

Mit dem **expToTrig(...** -Befehl im Integranden erhält man ein unerwartet einfaches Ergebnis, das mit **simplify(Ans)** noch zusammengefaßt werden kann:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi K}{2}\right) \cdot H}{K+1} + \frac{\cos\left(\frac{\pi K}{2}\right) \cdot H}{-K+1}$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi K}{2}\right) \cdot H}{K+1} + \frac{\cos\left(\frac{\pi K}{2}\right) \cdot H}{-K+1}$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi K}{2}\right) \cdot H}{\pi(-K^2+1)}$$



Damit sind die Fourierkoeffizienten c_k berechnet für alle k mit $k^2 \neq 1$, z.B. $c_0 = h/\pi$.

Im Fall $k^2 = 1$ werden c_1 und c_{-1} gesondert berechnet, indem zuvor der Parameter k mit 1 bzw. -1 belegt wird. Wir erhalten $c_1 = c_{-1} = h/4$.

$$1 \rightarrow K$$

$$H/4$$

$$-1 \rightarrow K$$

$$H/4$$

Schließlich gilt, falls k eine ungerade Zahl ($k \neq \pm 1$) ist: $c_k = 0$.

Für $k = 2m$ (gerade Zahl) gilt $\cos(k\pi/2) = \cos(m\pi) = (-1)^m$.

Damit lautet das Ergebnis wie folgt

$$f(x) = s(x) = \frac{h}{\pi} + h \cdot (e^{ix} + e^{-ix})/4 + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{m=\infty} (-1)^m / (1 - 4m^2) \cdot e^{i2mx}$$

$$= \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2} \cdot \cos(x) + \frac{2h}{\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m / (1 - 4m^2) \cdot \cos(2mx),$$

wobei es sich bei der zuletzt angegebenen Fourierreihe um die reelle Darstellung handelt.

Was lehrt uns dieses Beispiel hinsichtlich der Berechnung der c_k ?

Eine ungeschickte Wahl der **CAS**-Menü-Befehle kann die Aufgabe fast unlösbar erscheinen lassen, hingegen kann eine geschickte Nutzung der **CAS**-Befehle zu schnellen Ergebnissen führen. Hier mußte man einfach ausprobieren, ob der **trigToExp(...** -Befehl bzw. der **expToTrig(...** -Befehl für den weiteren Verlauf der Rechnung günstiger ist. Eine generelle Empfehlung dazu gibt es nicht.

Somit wird erneut deutlich:

Der Taschenrechner ist ein Hilfsmittel und es liegt in der Verantwortung des Nutzers, dieses Hilfsmittel vorteilhaft einzusetzen. Manchmal ist es hilfreich, die Aufgabenstellung in kleinere Teilschritte zu zerlegen und dafür dann den Taschenrechner vorteilhaft einzusetzen. Bei zu großen Formeltermen kann es leicht passieren, dass beim symbolischen Rechnen der verfügbare Speicherplatz nicht ausreicht und der Rechner „hängen“ bleibt.

Wir betrachten abschließend die ersten Partialsummen im **GRPH-TBL**-Menü und müssen dazu eine passende **Betrachtungsfenster**-Einstellung finden, indem verschiedene Einstellungen ausprobiert werden. Das kann uns der Taschenrechner nicht abnehmen.

$$Y1 = 1/\pi + \cos(x)/2$$

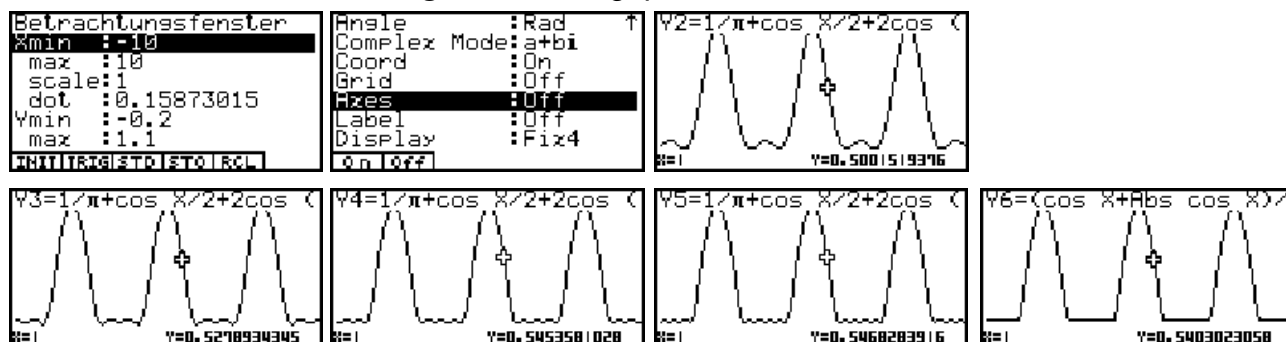
$$Y1 = 1/\pi + \cos(x)/2$$

$$Y1 = 1/\pi + \cos(x)/2$$

$$Y1 = 1/\pi + \cos(x)/2$$



Das erste Bild zeigt das **SET UP**. In den folgenden Bildern werden die **Achsen** ausgeschaltet und das **Betrachtungsfenster** angepaßt:



Das letzte Bild zeigt noch einmal die Ausgangsfunktion für die betrachtete Einweggleichrichtung.

Aufgaben:

- 13.1. Entwickeln Sie die Rechteckkurve $f(x) = \sin(\pi x) / |\sin(\pi x)|$ mit $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, in eine komplexe Fourierreihe! Geben Sie anschließend die zugehörige reelle Fourierreihe an.



Beschreiben Sie $f(x)$ mit einer vereinfachten Formel!

- 13.2. Entwickeln Sie $f(x) = (\text{Int}x - \text{Int}g x) \text{Frac} x - (1 + \text{Int}g x - \text{Int}x)(1 - \text{Frac} x) + 1/2$ (Sägezahnkurve) in eine komplexe Fourierreihe! Geben Sie anschließend die zugehörige reelle Fourierreihe an. Beschreiben Sie $f(x)$ mit einer vereinfachten Formel! Charakterisieren Sie die Art der Unstetigkeit (einseitige Stetigkeit?).



Stellen Sie die ersten vier Partialsummen der Fourierreihe graphisch dar!

KAPITEL 14

Analytische Funktionen und partielle Ableitungen

In der Funktionentheorie werden komplexe Funktionen $w = f(z)$ mit $z = x + yi$ dahingehend untersucht, ob diese **komplex differenzierbar** (regulär, analytisch, holomorph) sind. Dazu sind partielle Ableitungen zu bilden und die sogenannten **Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen** zu überprüfen. Im Reellen lauten diese wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}(f(z)) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}(f(z)) = -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im}(f(z))$$

Dies bedeutet im Komplexen:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = -i \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(z) \quad \text{und es gilt} \quad f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = -i \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(z).$$

Wir speichern im **CAS**-Menü zunächst einige symbolische Variable und Formelterme ab:

$x+yi \rightarrow Z$	$(\operatorname{Abs}(Z))^2 / Z \rightarrow W$	$\operatorname{CExpand}(W)$	$w = \bar{z}$ (konjugiert komplexe Zahl)
$x+yi$	$\frac{(ix+yi)^2}{x+yi}$	$x-yi$	
$(Z+W)/Z \rightarrow A$	$\operatorname{CExpand}(A)$	$(Z-W)/(2i) \rightarrow B$	$A = \operatorname{Re}(z)$ (Realteil einer Zahl) $B = \operatorname{Im}(z)$ (Imaginärteil einer Zahl) $C = \operatorname{Abs}(z)$ (Betrag einer Zahl)
$\frac{(ix+yi)^2}{x+yi} + x+yi$	x	$-\left(\frac{-(ix+yi)^2}{x+yi} + x+yi\right)i$	
$\sqrt{(Z+W)^2}$	$\operatorname{CExpand}(C)$	$\operatorname{CExpand}(B)$	
$\sqrt{(ix+yi)^2}$	$\sqrt{x^2+y^2}$	y	

Beispiele für komplex differenzierbare Funktionen:

$\operatorname{diff}(\sin Z, X)$	$\operatorname{Simplify}(-i \times \operatorname{diff}(\sin Z, Y))$	$-i \times \operatorname{diff}(\sin Z, Y)$	$f(z) = \sin(z)$ $f'(z) = \cos(z)$
$\cos(x+yi)$	$\cos(x+yi)$	$\cos(x+yi)$	
$\operatorname{diff}(\ln Z, X)$	$\operatorname{Simplify}(-i \times \operatorname{diff}(\ln Z, Y))$	$-i \times \operatorname{diff}(\ln Z, Y)$	$f(z) = \ln(z)$ $f'(z) = 1/z$ 😊
$\frac{1}{x+yi}$	$\frac{1}{x+yi}$	$\frac{1}{x+yi}$	

$$f(z) = z^3 - 3z^2 + e^z, \quad f'(z) = 3z^2 - 6z + e^z:$$

$\operatorname{diff}(Z^3-3Z^2+eZ, X)$	$\operatorname{diff}(Z^3-3Z^2+eZ, X)$	$\operatorname{Simplify}(-i \times \operatorname{diff}(Z^3-3Z^2+eZ, Y))$	$\operatorname{diff}(Z^3-3Z^2+eZ, Y)$
$3(x+yi)^2 - 6(x+yi) + e^{x+yi}$	$3(x+yi)^2 - 6(x+yi) + e^{x+yi}$	$3(x+yi)^2 - 6x - 6yi + e^{x+yi}$	$3(x+yi)^2 - 6x - 6yi + e^{x+yi}$

Diese Beispiele zeigen, dass einerseits die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt und andererseits die vom Reellen her bekannten Ableitungsregeln gelten. Beim symbolischen Differenzieren wurde ausgenutzt, dass die Variable z den Term $x+yi$ enthält.

Beispiele für nicht komplex differenzierbare Funktionen:

Wir betrachten die Funktion $f(z) = (\text{abs}(z))^2/z = \bar{z}$ und stellen fest, dass für die partiellen Ableitungen $\partial/\partial_x f(z) = 1 \neq -i \cdot \partial/\partial_y f(z) = -1$ gilt. Damit ist $f(z) = \bar{z}$ nicht differenzierbar:

<code>diff(CExpand((Abs Z)^2</code>	<code>(Abs Z)^2/Z),X)</code>	<code>Simplify(-i*diff(CExp</code>	<code>CExpand((Abs Z)^2/Z),Y</code>
<code>1</code>	<code>1</code>	<code>-1</code>	<code>-1</code>
TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	CLR SW TRANS >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >

Ebenfalls nicht komplex differenzierbar ist die Funktion $f(z) = \text{abs}(z) = |z|$. Für die partiellen Ableitungen gilt: $\partial/\partial_x f(z) = x/|z| \neq -i \cdot \partial/\partial_y f(z) = -iy/|z|$

<code>CExpand(Abs Z)</code>	<code>diff(CExpand(Abs Z),X)</code>	<code>Simplify(-i*diff(CExp</code>	<code>CExpand(Abs Z),Y)</code>
$\sqrt{x^2+y^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$-\frac{yi}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$-\frac{yi}{\sqrt{x^2+y^2}}$
TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	CLR SW TRANS >

Wir sehen uns dazu weitere Bilder im **CAS**-Menü an:


<code>Abs Z</code>	<code>CExpand(Abs Z)</code>	<code>diff((X^2+Y^2),X)</code>	<code>Simplify(-i*diff((X^2</code>
$ X+Yi $	$\sqrt{x^2+y^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$-\frac{yi}{\sqrt{x^2+y^2}}$
CO TABS Z1 SRM HVP FMEV	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >

Die folgenden Bilder sind in diesem Zusammenhang nicht erfreulich, da es den Anschein erweckt, dass die (reelle) Funktion $f(z) = \text{abs}(z) = |z|$ (komplex) differenzierbar sei:

<code>diff(Abs Z,X)</code>	<code>Simplify(-i*diff(Abs</code>	<code>-i*diff(Abs Z,Y))</code>	<code>diff(Abs Z,Z)</code>
<code>signum(X+Yi)</code>	<code>signum(X+Yi)</code>	<code>signum(X+Yi)</code>	<code>signum(X+Yi)</code>
CO TABS Z1 SRM HVP FMEV	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >

Wir überlassen an dieser Stelle dem Leser die Untersuchung der Funktionen $f(z) = \text{Re}(z)$ und $f(z) = \text{Im}(z)$ mit Hilfe der oben eingeführten komplexen Terme $A = \text{Re}(z)$ und $B = \text{Im}(z)$ und weisen erneut darauf hin, dass bei einer ungeschickten Wahl der **CAS**-Befehle die symbolische Rechnung möglicherweise nicht zu dem gewünschten Ergebnis führt! Es handelt sich hierbei ebenfalls um nicht (komplex) differenzierbare Funktionen.

Analytische Funktionen sind in Taylorpolynome entwickelbar und auch integrierbar:

<code>taylor(eZ,2,4,i)</code>	<code>taylor(eZ,2,4,i)</code>	<code>taylor(eZ,2,4,i)</code>	
$\frac{e^{i(x+yi-i)^4}}{24} + \frac{e^{i(x+yi-i)^3}}{6}$	$\frac{(x+yi-i)^3}{6} + \frac{e^{i(x+yi-i)^2}}{2}$	$\frac{(yi-i)^2}{2} + e^{i(x+yi-i)} + e^i$	
TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	
<code>J(sin Z,2,1-i,1+i)</code>	<code>J(2^3-3Z^2+eZ,2,1-i,1+i)</code>	<code>CExpand(J(2^3-3Z^2+eZ,</code>	<code>J(2^3-3Z^2+eZ,2)</code>
$2 \cdot \sin(1) \cdot \sinh(1) \cdot i$	$2 \cdot \sin(1) \cdot e^{i-4i}$	$(2 \cdot \sin(1) \cdot e^{-4})i$	$\frac{(x+yi)^4}{4} - (x+yi)^3 + e^{x+yi}$
TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >	TMSICALCEQUA 99M BRPHI >

KAPITEL 15

Graphische Darstellung von Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene

Nachdem es im letzten Kapitel zur komplexen Analysis etwas abstrakt zugegangen war, soll es nun wieder recht anschaulich werden. Es sollen einige Beispiele zur Darstellung von (Punkt-)Mengen in der Gaußschen Zahlenebene betrachtet werden. Dazu werden die **Ungleichungen oder Gleichungen zur Festlegung der Punktmengen** zuerst im **CAS-Menü** so umgeformt, dass die entstehenden (reellen) Funktionsterme dann im **GRPH·TBL-Menü** ausgenutzt werden können.

Beispiel:

Man skizziere die folgende Punktmenge **M** in der komplexen Zahlenebene. Hierbei ist **M** durch eine Ungleichung charakterisiert: $M = \{z \mid |z-1| < 2\}$.

Lösung:

Zuerst wird die Ungleichung im **CAS-Menü** ausgewertet. Dazu wird in z der Term $x+yi$ abgespeichert. Dann wird der Term $|z-1| = \text{Abs}(z-1)$ (linke Seite der Ungleichung) mit **cExpand(...)** vereinfacht, gleich ε gesetzt (mit $0 < \varepsilon < 2$) und schließlich nach y aufgelöst:


$x+yi \rightarrow z$	$\text{cExpand}(\text{Abs}(z-1))$	$\text{cExpand}(\text{Abs}(z-1)) = \varepsilon$	$\text{solve}(\text{eqn}(1), y)$
	$\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$	$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \varepsilon$	$y = -\sqrt{-x^2 + 2x + \varepsilon^2 - 1}$
			$y = \sqrt{-x^2 + 2x + \varepsilon^2 - 1}$

Wird die Gleichung 1 auf jeder Seite quadriert, erkennt man unschwer eine **Kreisgleichung** mit dem **Mittelpunkt P(1,0)** und dem **Radius R = ε** (mit $0 < \varepsilon < 2$). Mit **solve(...)** wurde **eqn(1)** nach y aufgelöst und man erkennt leicht: **eqn(2)** beschreibt den unteren Halbkreis, **eqn(3)** den oberen Halbkreis.

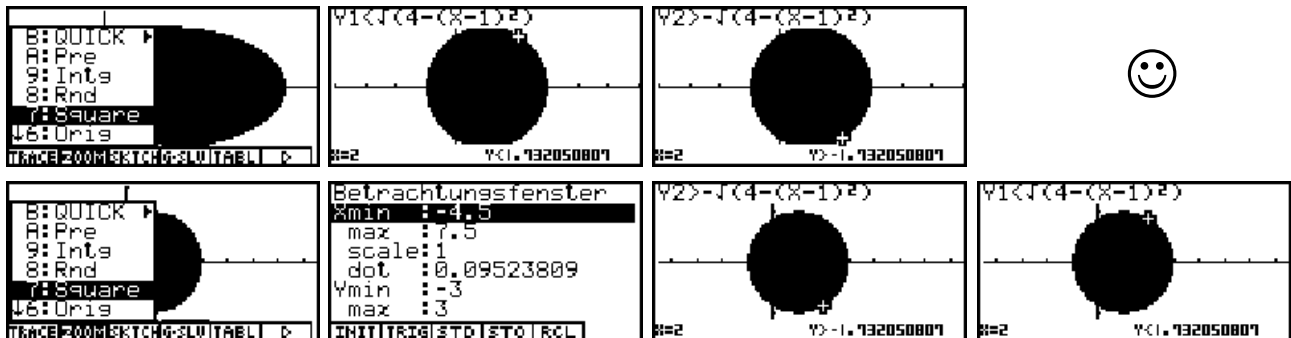
Der **solve(...)** - Befehl selbst kann die nichtlineare Ungleichung nicht auflösen, vgl. **eqn(5)**.

$\text{cExpand}(\text{Abs}(z-1)) < 2$	$\text{solve}(\text{eqn}(4), y)$	$\text{cExpand}(\text{Abs}(z-1))^2 < 2^2$	$\text{Abs}(z-1)^2 < 2^2$
$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 2$	$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - 2 < 0$	$(x-1)^2 + y^2 < 4$	$(x-1)^2 + y^2 < 4$

Mit der Eingabezeile **(cExpand(Abs(z-1)))² < 2²** erkennt man die Kreisgleichung als **eqn(6)**. Damit ist anschaulich klar, die Punktmenge **M** ist eine Kreiseumgebung (ohne Rand) um **P(1,0)** mit dem Umgebungsradius **$\varepsilon = 2$** . Wir wechseln zum **GRPH·TBL-Menü**, da es im **CAS-Menü** selbst (im Untermenü **GRPH**) nicht möglich ist, y -Terme einzutragen, s.S.67.

Grafikfunkt.:Y> 6:CONU P(1,0) 5:LINEQUAD 4:X=c 3:Param 2:r=2 1:y=	Grafikfunkt.:Y> Y1:Y1<4-(X-1)^2 Y2: Y3: Y4: Y5: Y6:	Grafikfunkt.:Y> 6:CONU P(1,0) 5:LINEQUAD 4:X=c 3:Param 2:r=2 1:y=	Grafikfunkt.:Y> Y1:Y1<4-(X-1)^2 Y2:Y2>4-(X-1)^2 Y3: Y4: Y5: Y6:
Betrachtungsfenster Xmin:-1.5 max:3.5 scale:1 dot:0.03968253 Ymin:-2.5 max:2.5	Y1<4-(X-1)^2 N=2 Y1: 1.32050807	Y2>4-(X-1)^2 N=2 Y2: -1.32050807	Kreise als Ellipsen? 

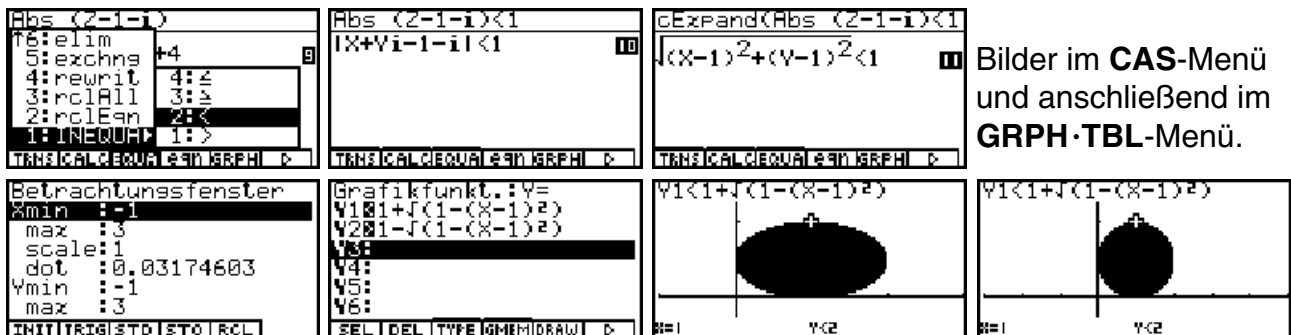
Diese durch die Einstellung des Betrachtungsfensters verursachte Verzerrung des Kreises zur Ellipse kann sofort mit dem **Zoom-Square-Befehl** korrigiert werden:



Die durch Auszoomen entstandenen letzten Bilder lassen die Lage der Punktmenge $M = \{z \mid |z-1| < 2\}$ im Koordinatensystem gut erkennen.

Beispiel:

Jetzt wird eine Verschiebung des Kreises anhand der Punktmenge $M = \{z \mid |z-1-i| < 1\}$ in beide Achsenrichtungen betrachtet: $P(0,0) \rightarrow P(1,1)$. Der Radius ist jetzt 1.



Bilder im **CAS-Menü** und anschließend im **GRPH-TBL-Menü**.

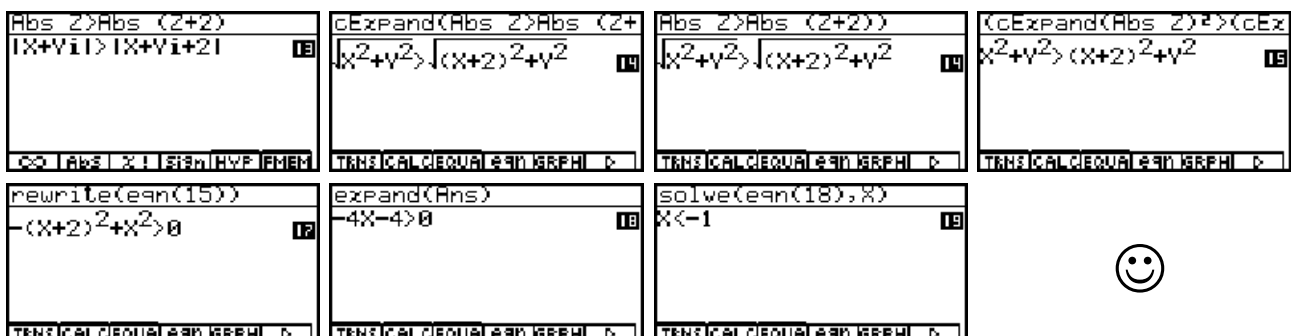
Für die Punktmenge (mit Rand) $M = \{z \mid |z-1-i| \leq 1\}$ entsteht praktisch das gleiche Bild:



Beispiel:

Das folgende Beispiel beschreibt eine weitere Punktmenge mittels einer Betragsungleichung für komplexe Zahlen und beinhaltet zum Erstaunen manches Schülers oder Studenten keine Kreisfläche: $M = \{z \mid |z| > |z+2|\}$.

Interessant sind hier die vorbereitenden Termumformungen im **CAS-Menü**:



Unvermutet erhält man hier die sehr einfache Ungleichung $M = \{z \mid x = \operatorname{Re}(z) < -1\}$.

Dieses Beispiel ermuntert zu der Feststellung, dass Mathematik manchmal wirklich recht einfach sein kann!

Wir sehen uns nun die Punktmenge **M** als Halbebene im **GRPH·TBL**-Menü an:



Da für den Graphik-Typ $x = c$ (**= const.**) keine Ungleichungsgraphik existiert, wurden weitere links von $x = -1$ liegende senkrechte Geraden eingezeichnet, um die Lage der **Halbebene** zu veranschaulichen.

Das Betrachtungsfenster wurde dabei bezüglich der x -Skalierung über die **dot**-Vorgabe **dot: 0.05** voreingestellt, um das Graphik-Display hinsichtlich seiner Auflösung optimal auszunutzen. Die **dot**-Vorgabe entspricht damit der halben **Schrittweite** der voreingestellten senkrechten Linien vom Graphik-Typ $x = c$ (mit $c = -1/4, -1.1, -1.2, \dots, -1.9, -2$).

Beispiel:

Man skizziere im **GRPH·TBL**-Menü die folgenden Punkt Mengen

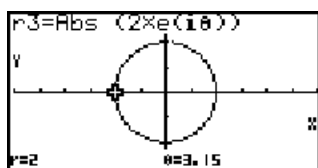
a) $M = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$ (Parallelstreifen D_0 mit einem Rand, vgl. Kapitel 4)



b) $M = \{z \mid \pi/4 < \arg(z) \leq 3\pi/4\}$ (Winkelraum D_1 mit einem Rand, vgl. Kapitel 3)



c) $M = \{z \mid |z| = 2\} = \{z \mid z = 2e^{i\theta} \wedge -\pi < \theta \leq \pi\}$ (Kreislinie um $P(0,0)$ mit Radius 2)



Der Leser möge sich anhand des Bildes die notwendigen Einstellungen im **GRPH·TBL**-Menü selbst überlegen.

Aufgaben:

15.1. Stellen Sie die komplexen Zahlen z , die der folgenden Bedingung genügen, in der Gaußschen Zahlenebene dar:

a) $M = \{z \mid |z - 2| \leq 3\}$ b) $M = \{z \mid |z + 1| > 2\}$ c) $M = \{z \mid 1 < |z + 1 + i| \leq 4\}$.

15.2. Skizzieren Sie folgende Punktmenge: $M = \{z \mid -\pi \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi\}$.

15.3. Untersuchen Sie im **CAS**-Menü die Ungleichung $|z - 1| \geq 1/|z|$.

(Hinweis: die Gleichung $|z - 1| \cdot |z| = 1$ beschreibt eine Cassinische Kurve.)

KAPITEL 16

Kurven in der Gaußschen Zahlenebene und deren komplexe Parameterdarstellungen

Unter einer Parameterdarstellung für die Funktion $w = f(z)$ versteht man die Gleichungen

$$z = z(t) = x(t) + y(t)i \quad \text{mit } t \in I \quad (\text{reelles Parameterintervall})$$

und

$$w = w(t) = f(z(t)) = u(t) + v(t)i.$$

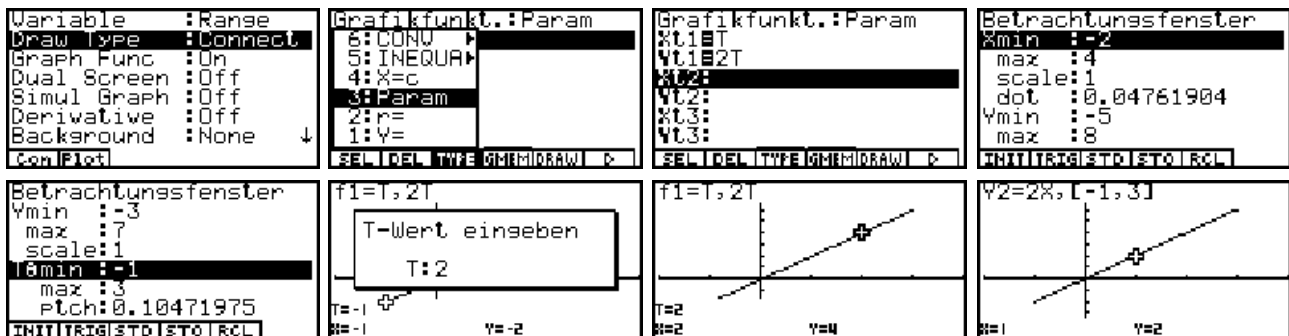
Hierbei sind $x(t)$ und $y(t)$ reelle Funktionsterme zur Beschreibung der Koordinaten von $z(t)$ und entsprechend $u(t)$ und $v(t)$ reelle Funktionen für die Bildpunkte $w(t) = f(z(t))$.

Beispiel:

Gegeben ist die komplexe Parameterdarstellung $z(t) = x(t) + y(t)i = t + 2ti$ mit $-1 \leq t \leq 3$. Zu skizzieren ist die zugehörige Kurve in der z -Ebene.

Lösung:

Es handelt sich um die reelle **Parameterdarstellung** $x(t) = t$ und $y(t) = 2t$ mit $-1 \leq t \leq 3$ bzw. um die **parameterfreie Darstellung** $y = 2x$ mit $-1 \leq x \leq 3$. Es ist möglich, beide Darstellungsarten im **GRPH-TBL-Menü** einzugeben und zu zeichnen.



Die Bilderfolge beginnt mit dem **SET UP** im **GRPH-TBL-Menü** und der Festlegung des Graphik-Typs (**Param**). Nach der Eingabe der Parameterdarstellung für $x(t)$ und $y(t)$ wird das Betrachtungsfenster eingestellt. Während das Parameterintervall im Betrachtungsfenster eingestellt wird, kann im letzten Bild (parameterfreie Darstellungsformel) der Definitionsbereich für x sofort hinter dem Formelterm geschrieben werden (Syntax: ..., [-1,3]).

Beispiel:

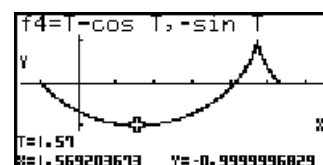
Gegeben ist die komplexe Parameterdarstellung $w(t) = u(t) + v(t)i = t - e^{it}$ mit $0 < t \leq 2\pi$. Zu skizzieren ist die zugehörige Kurve in der w -Ebene.

Lösung:

Es handelt sich um die reelle **Parameterdarstellung** $u(t) = t - \cos(t)$ und $v(t) = -\sin(t)$ mit $0 < t \leq 2\pi$.

Bemerkenswert ist hier, dass der Anfangspunkt der Kurve in die Betrachtung nicht eingeschlossen sein soll.

Der Leser möge sich hier wieder selbst die zugehörigen Taschenrechnereinstellungen überlegen.



Beispiel:

Die Kurve $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ soll sich aus vier Teilstücken zusammensetzen, wobei folgendes gilt:

C_1 : Geradenstück von $z_0 = -2 + 2i$ bis $z_1 = -1$

C_2 : oberer Halbkreis von $z_1 = -1$ bis $z_2 = 1$

C_3 : waagerechtes Geradenstück von $z_2 = 1$ bis $z_3 = 2$

C_4 : senkrechtes Geradenstück von $z_3 = 2$ bis $z_4 = 2 + 2i$.

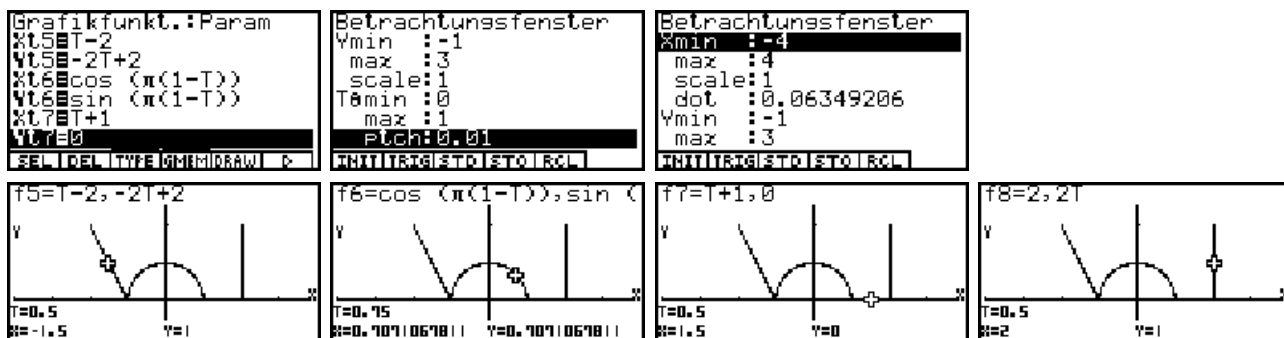
Zu ermitteln ist für jedes Teilstück jeweils eine Parameterdarstellung derart, dass stets das (gemeinsame) Parameterintervall $I = [0, 1]$ benutzt werden kann. Abschließend ist die Gesamtkurve C im Graphikdisplay darzustellen.

Lösung:

Als geeignete Parameterdarstellungen erweisen sich für

C_1 : $z(t) = t - 2 + (-2t + 2)i$, C_2 : $z(t) = \cos(\pi(1-t)) + i\sin(\pi(1-t))$, C_3 : $z(t) = t + 1 + 0i$ und

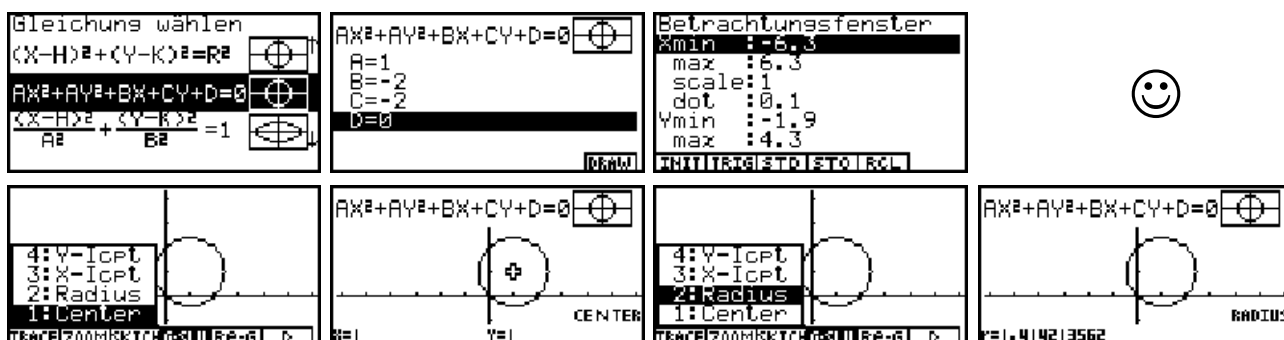
C_4 : $z(t) = 2 + 2ti$.

**Beispiel:**

Die Punktmenge $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 2(x + y)\}$ beschreibt eine geschlossene Kurve in der z -Ebene. Geben Sie eine geeignete Parameterdarstellung an und stellen Sie anschließend diese Kurve in der Zahlenebene dar. Um welche bekannte Kurve handelt es sich?

Lösungsweg 1:

Wir analysieren die Kurvengleichung 2.Ordnung im **CONIC**-Menü, indem wir eine dazu passende **Kegelschnittgleichung** auswählen: $1x^2 + 1y^2 - 2x - 2y + 0 = 0$.

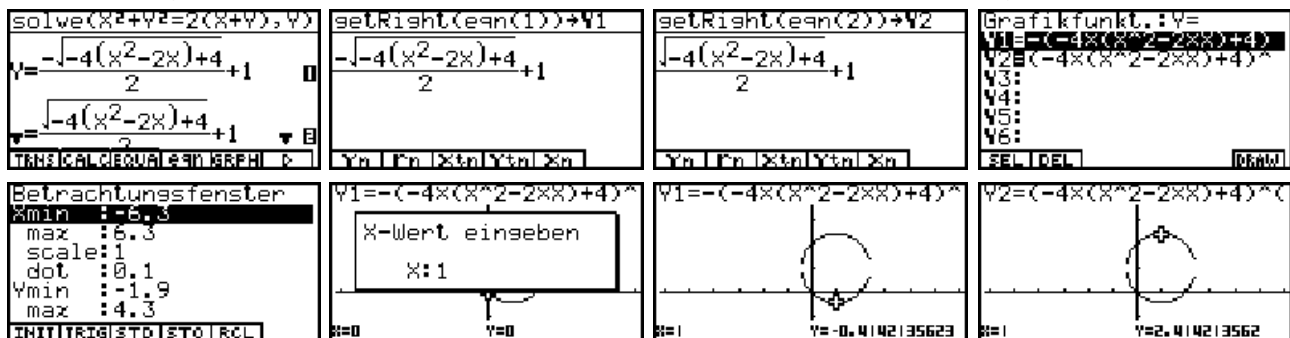


Damit ist offensichtlich, dass es sich um einen **Kreis** mit dem **Mittelpunkt** $M(1,1)$ und dem **Radius** $R = 1,41421... = 2^{1/2}$ handelt.

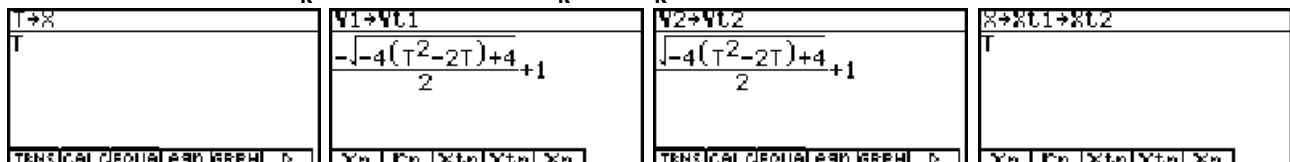
Parameterdarstellung: $z(t) = 1 + i + 2^{1/2} e^{it} = 1 + 2^{1/2} \cos t + (1 + 2^{1/2} \sin t)i$ mit $0 \leq t < 2\pi$.

Lösungsweg 2:

Wir analysieren die Kurvengleichung 2. Ordnung im **CAS**-Menü, indem wir mit **solve(...** nach **y** auflösen und mittels des **getRight(...** - Befehls die Gleichungsterme der beiden Teillösungen unter **Y1** bzw. **Y2** abspeichern. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass direkt aus den **CAS**-Menü heraus Graphikfunktionsterme abgespeichert und im Untermenü **GRPH** mit **DRAW** gezeichnet werden können (hier: parameterfreie Darstellung).



Der Übergang von der parameterfreien Darstellung $y = f_k(x)$, $x \in I$, kann in der Weise erfolgen, dass $x = x_k(t) = t$ und $y = y_k(t) = f_k(t)$ mit $t \in I$ ($k = 1, 2$) gesetzt werden:



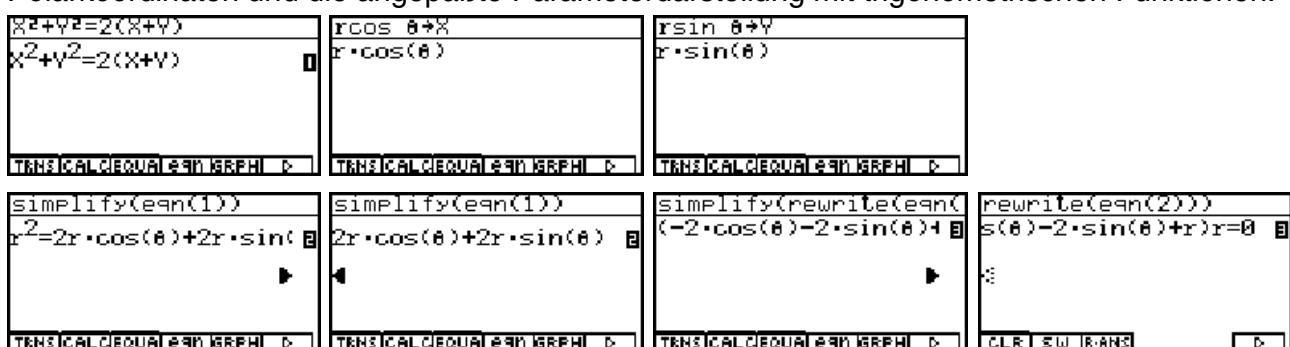
Die Menüleiste **Yn rn Xtn Ytn Xn** wird im **CAS**-Menü durch Drücken der **VARS**-Taste aktiviert. Im linken Bild wurde x parametrisiert, anschließend wurden die Formelterme **Y1** = $f_1(x)$ und **Y2** = $f_2(x)$ (untere und obere Halbkreis) in $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ abgespeichert und schließlich x in $x_k(t)$ ($k = 1, 2$). Parameterintervall $I = \text{Db}(f) = [1-2^{1/2}, 1+2^{1/2}]$.

Im Untermenü **GRPH** kann das Betrachtungsfenster eingestellt werden:



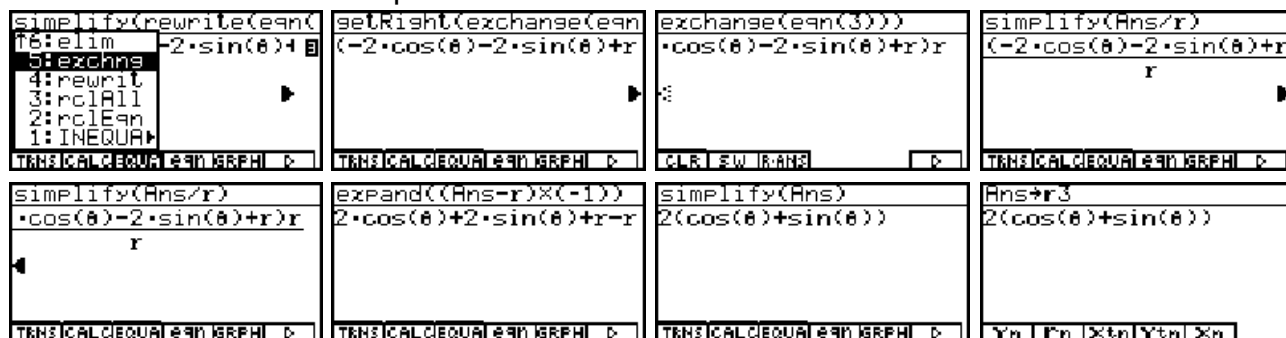
Lösungsweg 3:

Abschließend ermitteln wir im **CAS**-Menü aus der Ausgangsgleichung die Darstellung in Polarkoordinaten und die angepaßte Parameterdarstellung mit trigonometrischen Funktionen:

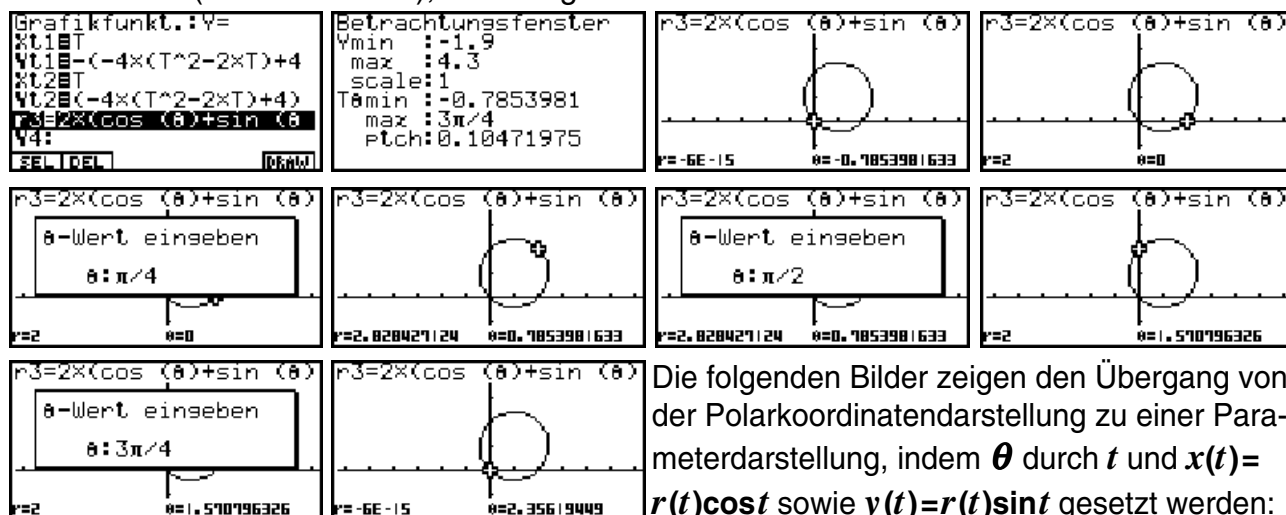


Die Ausgangsgleichung **eqn(1)** wurde in Polarkoordinaten umgeschrieben, nachdem die Variablen x bzw. y mit den Termen $r \cos \theta$ bzw. $r \sin \theta$ belegt worden sind. In **eqn(3)** wurden alle Terme nach links gebracht und r ausgeklammert.

Die nun folgenden Schritte sind einfache Termumformungen: Die Seiten der Gleichung **eqn(3)** werden vertauscht, um den Faktor der rechten Seite $-2 \cos \theta - 2 \sin \theta + r = 0$ nach r aufzulösen und in **r3** abzuspeichern:



Da der Kreis oberhalb der Winkelhalbierenden $y = -x$ liegt, ist als θ -Intervall $-\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ ausreichend (statt $-\pi \leq \theta \leq \pi$), um den gesamten Kreis zu zeichnen!



Die folgenden Bilder zeigen den Übergang von der Polarkoordinatendarstellung zu einer Parameterdarstellung, indem θ durch t und $x(t) = r(t) \cos t$ sowie $y(t) = r(t) \sin t$ gesetzt werden:



Dieses Beispiel verdeutlicht, dass eine vorgegebene Kurve (Punktmenge) durch unterschiedliche Parameterdarstellungen mit dazu angepaßten (unterschiedlichen) Parameterintervallen beschrieben werden kann!

Anwendungsbeispiel aus der Elektrotechnik:

Das komplexe Potenzial $w = f(z) = u(z) + v(z)i$ sei durch die Umkehrfunktion $z = e^w + w + 1$ gegeben. Zeichnerisch zu bestimmen sind die Feldlinien $u = \text{const.}$ und die Äquipotenziallinien $v = \text{const.}$ (Feld am Rande eines Plattenkondensators)

Im **CAS**-Menü wird zuerst eine Zerlegung von $z = e^w + w + 1$ in den Realteil und den Imaginärteil vorgenommen: $x(u,v) = \operatorname{Re}(z) = e^u \cos v + u + 1$, $y(u,v) = \operatorname{Im}(z) = e^u \sin v + v$.

<code>U+U1+U</code> <code>U+U1</code>	<code>eW+W+1</code> <code>U+U1+e^{U+U1}+1</code>	<code>CExpand(eW+W+1)</code> <code>U+e^U·cos(U)+1+(U+e^U·s</code>	<code>CExpand(eW+W+1)</code> <code>U)+1+(U+e^U·sin(U))i</code>
TMSICALCEWA EQN GRPH D	TMSICALCEWA EQN GRPH D	TMSICALCEWA EQN GRPH D	TMSICALCEWA EQN GRPH D

Man erhält sofort für

$$u = \text{const} \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 0.5, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\} = \text{List1}$$

die **Kurvenschar der Feldlinien**, indem im **GRPH·TBL**-Menü die Parameterdarstellung

$$x(\text{List1}, t) = e^{\text{List1}} \cos t + \text{List1} + 1, \quad y(\text{List1}, t) = e^{\text{List1}} \sin t + t \quad \text{mit } -\pi \leq t \leq \pi$$

benutzt wird.

Umgekehrt erhält man für

$$v = \text{const} \in \{-\pi, -3\pi/4, -\pi/2, -\pi/4, 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi\} = \text{List2}$$

die **Kurvenschar der Äquipotenziallinien**, indem die Parameterdarstellung

$$x(t, \text{List2}) = e^t \cos(\text{List2}) + t + 1, \quad y(t, \text{List2}) = e^t \sin(\text{List2}) + \text{List2} \quad \text{mit } -6 \leq t \leq 5$$

benutzt wird:

<code>{-5,-4,-3,-2,-1,0,.5,1,1.25,1.5,1.75,2}→List1</code> Done	Betrachtungsfenster Xmin :-5 max :10 scale:1 dot :0.11904761 Ymin :-5 max :5	Betrachtungsfenster Ymin :-5 max :5 scale:2 Tmin :-3.1415926 max :π Pitch:0.2	
TMSICALCEWA EQN GRPH D	TMSICALCEWA EQN GRPH D	TMSICALCEWA EQN GRPH D	
<code>{-π,-3π/4,-π/2,-π/4,0,π/4,π/2,3π/4,π}→List2</code> Done	Betrachtungsfenster Xmin :-5 max :10 scale:1 dot :0.11904761 Ymin :-5 max :5	Betrachtungsfenster Ymin :-5 max :5 scale:1 Tmin :-6 max :5 Pitch:0.2	
TMSICALCEWA EQN GRPH D	TMSICALCEWA EQN GRPH D	TMSICALCEWA EQN GRPH D	Feldlinien (als Hintergrundbild Pict1 abgespeichert)
Grafikfunkt.:Y=	Grafikfunkt.:Y=		
Xt1=eList 1xcos T+Li	Xt1=1xcos T+List 1+1		
Yt1=eList 1xsin T+1	Yt1=eList 1xsin T+1		
Xt2=eTxcos List 2+T+	Xt2=eTxcos List 2+T+		
Yt2=eTxs sin List 2+Li	Yt2=eTxs sin List 2+Li		
V3:	V3:		
V4:	V4:		
SEL DEL TYPE GMM DRAW D	SEL DEL TYPE GMM DRAW D		
Grafikfunkt.:Y=	Grafikfunkt.:Y=		
Xt1=eList 1xcos T+Li	Xt1=eList 1xcos T+Li		
Yt1=eList 1xsin T+1	Yt1=eList 1xsin T+1		
Xt2=eTxcos List 2+T+	Xt2=eTxcos List 2+T+		
Yt2=eTxs sin List 2+Li	Yt2=eTxs sin List 2+Li		
V3:	V3:		
V4:	V4:		
SEL DEL TYPE GMM DRAW D	SEL DEL TYPE GMM DRAW D		
			Äquipotenziallinien (als Hintergrundbild Pict2 abgespeichert)
	Feldlinien und Äquipotenziallinien in gemeinsamer Darstellung		

Aufgabe:

16.1. In der komplexen z -Ebene sei durch ein Quadrat mit den Eckpunkten $P_1(2,0)$, $P_2(2,2)$, $P_3(0,2)$ und $P_4(0,0)$ eine Fläche Q begrenzt. Wohin werden durch die Abbildung $w = z^2$ der Rand von Q und das Innengebiet des Quadrates in der w -Ebene abgebildet?

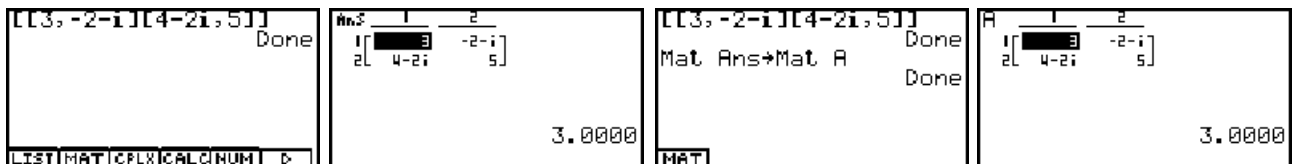
KAPITEL 17

Komplexe Matrizen, Determinanten sowie Gleichungssysteme

In diesem Kapitel werden speziell einige quadratische Matrizen, deren Determinanten und eindeutig lösbar lineare Gleichungssysteme betrachtet, in denen reguläre Koeffizientenmatrizen auftreten. Die Elemente der hier auftretenden Matrizen können komplexe Zahlen sein.

Beispiel:

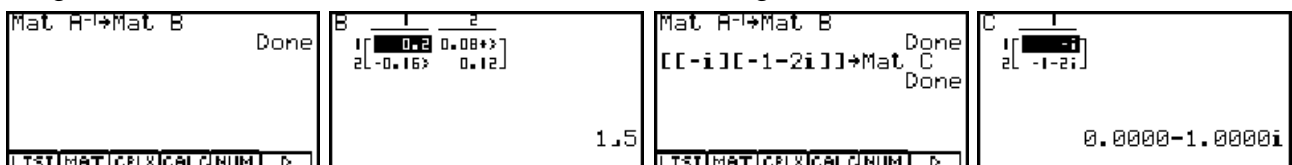
Wir betrachten die komplexe Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -2-i \\ 4-2i & 5 \end{bmatrix}$, die im **RUN·MAT**-Menü mittels eckiger Klammern eingegeben werden kann:



Ohne speziellen Speicherbefehl wird die eingegebene Matrix im **[Mat]-[Ans]**-Speicher abgelegt, der als Zwischenspeicher für Matrizen dient. Mit **[Mat]-[Ans]** kann dieser Speicherinhalt aufgerufen werden, um dann z.B. unter der Variablenbezeichnung **Mat A** abgelegt zu werden. Im Matrix-Editor (Untermenü **MAT**) kann die Matrix **Mat A** eingesehen und bearbeitet werden. Schließlich wird im **RUN·MAT**-Menü die Determinante berechnet:

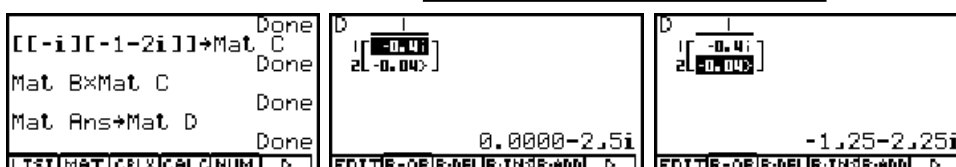


Es gilt hier **Det Mat A = 25 ≠ 0**, d.h. die Matrix **A** ist regulär und besitzt eine Inverse **B = A⁻¹**:



Die Matrix **C = (-i, -1-2i)^T** besteht nur aus einem Spaltenvektor, der dann die rechte Seite eines inhomogenen linearen Gleichungssystems **A · (z₁, z₂)^T = C** bilden soll:

$$\begin{aligned} 3z_1 - (2+i)z_2 &= -i \\ (4-2i)z_1 + 5z_2 &= -1-2i \end{aligned}$$



$$(z_1, z_2)^T = A^{-1} \cdot C = D$$

mit

$$D = (-0.4i, -0.04 - 0.08i)^T$$

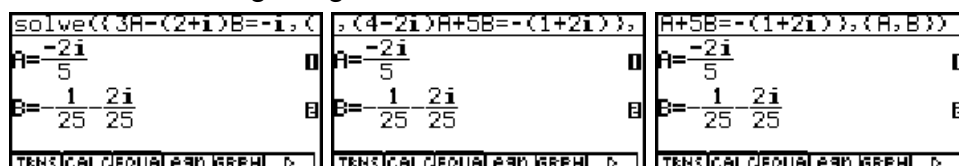
Damit lautet die Lösung: **z₁ = -0,4i** und **z₂ = -0,04 - 0,08i**.

Dieses Gleichungssystem kann man auch vorteilhaft im **EQUA**-Menü lösen:



Dazu trifft man im **EQUA**-Menü die Auswahl **F1: Gleichungssystem** (mehrere lineare Gleichungen „gleichzeitig“) mit zwei Unbekannten und trägt dann alle Daten des Gleichungssystems ein. Mit **SOLV** bekommt man sofort die vorhandene eindeutige Lösung angezeigt.

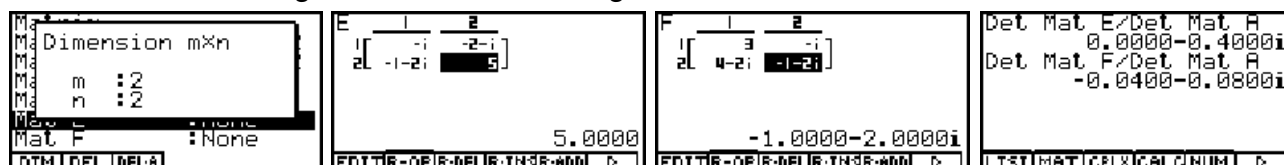
Eine dritte Lösungsmöglichkeit besteht im **CAS**-Menü mit dem **solve**-Befehl:



Hinweis:

Im **ALGEBRA**-Menü bzw. im **TUTOR**-Menü kann nicht mit komplexen Zahlen gearbeitet werden. Dort kann man reelle Gleichungssysteme in Einzelschritten bearbeiten und so die Lösungswege genauer üben.

Abschließend kehren wir in das **RUN·MAT**-Menü zurück und lösen dort das Gleichungssystem gemäß der Cramerschen Regel mit den modifizierten Determinanten **Det Mat E** und **Det Mat F**, die aus **A** hervorgehen, indem die erste bzw. zweite Spalte in **A** durch **C** ersetzt wird. Die Eingabe von **E** und **F** erfolgt im Matrix-Editor des **RUN·MAT**-Menüs:



Aufgaben:

17.1. Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} i & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2i \\ -i & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad C = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 1+i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

17.2. Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} i & 2 & T \\ 0 & 1 & 2i \\ S & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad C = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 1+i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Für welche Parameter **S** und **T** ist das Gleichungssystem eindeutig bzw. mehrdeutig bzw. gar nicht lösbar?

KAPITEL 18

(Keine) Scherzaufgaben mit komplexen Zahlen - “Wo steckt der Fehler?”

In diesem Kapitel werden einige Termumformungen betrachtet, die zunächst glaubhaft erscheinen aber dann offensichtlich oder vermutlich zu fehlerhaften Gleichungen führen.

Beispiel 1:

Wie ist der folgende „Widerspruch“ zu erklären?

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Beispiel 2:

Ein mathematischer Zauberkünstler rechnete im Bogenmaß wie folgt:

$$\begin{aligned} 1/2 \cdot \sqrt{2} + i/2 \cdot \sqrt{2} &= \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) \\ &= e^{i \cdot \pi/4} = e^{i \cdot 2\pi/8} = (e^{i \cdot 2\pi})^{1/8} \\ &= \sqrt[8]{e^{i \cdot 2\pi}} = \sqrt[8]{1} = 1. \end{aligned}$$

Wo steckt der Fehler?

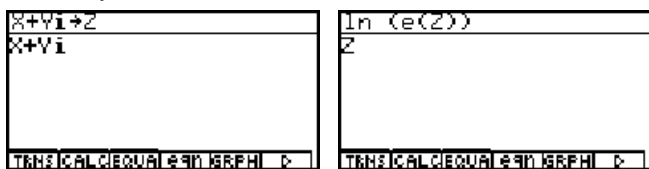
Beispiel 3:

Jemand behauptet scherzhaft, dass jede komplexe Zahl auf dem Einheitskreis gleich 1 ist und es damit eigentlich gar keine komplexen Zahlen gibt. Was meinen Sie zu folgendem Beweis?

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta} = e^{i 2\pi \cdot \theta / 2\pi} = (e^{i 2\pi})^{\theta / 2\pi} = (1)^{\theta / 2\pi} = 1.$$

Beispiel 4:

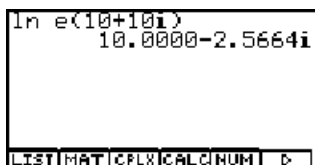
Im **CAS**-Menü wird symbolisch überprüft, dass die Logarithmus-Funktion die Umkehrung der Exponentialfunktion ist:



Anschließend wird im **RUN·MAT**-Menü

$$\ln(e^{10+10i}) = 10,0000 - 2,5664i = 10 + 10i$$

gerechnet. Wie ist dieser „Widerspruch“ zu erklären?



Beispiel 5:

Um zu „widerlegen“, dass das Wurzelziehen die Umkehroperation zum Potenzieren sei, könnte man folgendes Taschenrechnerbeispiel betrachten:

$((-8)^3)^{(1/3)}$ 4.0000+6.9282i	Ansle :Rad Answer type :Complex Display :Fix4	CExpand(((-8)^3)^(1/3)) 4.3i+4
TESTIMAT CFX/CALC/HUMI	REAL/CFX	TESTIMAT CFX/CALC/HUMI

Zuerst wird im **RUN·MAT**-Menü und dann im **CAS**-Menü gerechnet.

Warum gilt nicht $((-8)^3)^{1/3} = \sqrt[3]{(-8)^3} = -8$?

Beispiel 6:

Ein Schüler hatte früher einmal in der Schule gelernt, dass die Sinus-Funktion beschränkt ist und $|\sin z| \leq 1$ gilt.

Er rechnet im **RUN·MAT**-Menü und dann im **CAS**-Menü:

$$\text{Abs}(\sin(10i)) = 11013,2329$$

und ist etwas irritiert. Was meinen Sie dazu?

Abs(sin(10i)) 11013.2329	approx Abs(sin(10i)) 11013.2329
TESTIMAT CFX/CALC/HUMI	TESTIMAT CFX/CALC/HUMI

Beispiel 7:

Die komplexe Ableitung einer Funktion $w = f(z)$, mit $z = x + yi$, kann, sofern diese existiert, wie folgt berechnet werden:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \cdot \frac{\partial (x + yi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \cdot 1,$$

d.h.

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial}{\partial x} \text{Re}(f(z)) + i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{Im}(f(z)).$$

Wir betrachten nun konkret die Funktion $w = f(z) = \text{Abs}(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und berechnen im **CAS**-Menü sowohl $\frac{\partial}{\partial z} f(z)$ als auch $\frac{\partial}{\partial x} \text{Re}(f(z)) + i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{Im}(f(z))$ und vergleichen die Ergebnisse:

$x+yi \div z$ $x+yi$	Abs Z $ x+yi $	CExpand(Abs Z) $\sqrt{x^2+y^2}$	$\text{Im}(f(z)) = 0$
TESTIMAT CFX/CALC/HUMI	TESTIMAT CFX/CALC/HUMI	TESTIMAT CFX/CALC/HUMI	
$\frac{\partial}{\partial z} f(z) =$	Diff(Abs Z,Z) signum(x+yi)	Diff(Abs Z,x) signum(x+yi)	\neq
	TESTIMAT CFX/CALC/HUMI	TESTIMAT CFX/CALC/HUMI	
		Diff(sqrt(x^2+y^2),x) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	
		TESTIMAT CFX/CALC/HUMI	

Wo steckt der Fehler?

Beispiel 8: Lösen Sie die Aufgabe auf S. 36 unten!

Lösungshinweise zu den weiterführenden Aufgaben der einzelnen Kapitel

Kapitel 1:

L1.1: Achten Sie auf die Einstellungen im **SET UP** und im **Betrachtungsfenster**:

Background : None Angle : Rad Complex Mode: a+bi Coord : On Grid : Off Axes : On Label : On On Off	Angle : Rad Complex Mode: a+bi Coord : On Grid : Off Axes : On Label : On Display : Fix0 Fix Sci Norm Eng	Betrachtungsfenster Xmin : -3 max : 3 scale : 1 dot : 0.04761904 Ymin : -1.5 max : 1.5 INIT TRG STD STO RCL	(1,i^2,i^3,i^4)→List 1 ReP List 1→List 2 ImP List 1→List 3 LIST MATH CPLX CALC NUM
StatGraph1 Graph Type : Scatter XList : List2 YList : List3 Frequency : 1 Mark Type : •	StatGraph1 : DrawOn StatGraph2 : DrawOff StatGraph3 : DrawOff On Off Draw	List 1 Done LIST MATH CPLX CALC NUM	DRAW im STAT -Menü bzw. Anzeige im List-Ans -Speicher im RUN·MAT -Menü
Ans 1 [] 2 [-i] 3 [-i] 4 [] 0.+1.i	Ans 1 [] 2 [-i] 3 [-i] 4 [] -1.	Ans 1 [] 2 [-i] 3 [-i] 4 [] 0.-1.i	Ans 1 [] 2 [-i] 3 [-i] 4 [] 1.

L1.2: Anzeige im **List-Ans**-Speicher im **RUN·MAT**-Menü:

(i^7,i^9,i^14)	Ans 1 [] 2 [-i] 3 [-i] 0.-1.i	Ans 1 [] 2 [-i] 3 [-i] 0.+1.i	Ans 1 [] 2 [-i] 3 [-i] -1.
LIST MATH CPLX CALC NUM			

L1.3: Anzeige im **List-Ans**-Speicher im **RUN·MAT**-Menü:

Mode : Comp Func Type : r=	Betrachtungsfenster Xmin : -1 max : 10 scale : 1 dot : 0.08730158 Ymin : -15 max : 2 Deg Rad Grad	Ans 1 [] 2 [] 3 [] 4 [] 5 [] Re(z) 4	Ans 1 [] 2 [] 3 [-1.732] 4 [] 5 [-12] Im(z) -1.732050808
{4-3i,1+i,1-i√3,9,-12i}→List 1 ReP List 1 ImP List 1 LIST MATH CPLX CALC NUM	Ans 1 [] 2 [0.4102] 3 [] 4 [] 5 [12] Abs(z) 1.414213562	Ans 1 [] 2 [-36.86] 3 [] 4 [] 5 [-90] Arg(z) -36.86989765	StatGraph1 Graph Type : Scatter XList : List2 YList : List3 Frequency : 1 Mark Type : •
		Ans 1 [4+3i] 2 [] 3 [1+i√3] 4 [] 5 [12i] 4+3i	ReP List 1→List 2 ImP List 1→List 3 Conjs List 1 LIST MATH CPLX CALC NUM

L1.4: Anzeige der Ergebnisse im **RUN·MAT**-Menü:

3+4i+A	3+4i	A×B	7+7i	Conjs B	3-4i
4+3i+B	4+3i	Conjs A	25i	Conjs (A×B)	4-3i
A+B	7+7i	Conjs B	3-4i	Conjs A×Conjs B	-25i
LIST MATH CPLX CALC NUM		LIST MATH CPLX CALC NUM		LIST MATH CPLX CALC NUM	



L1.5: Anzeige der Ergebnisse im **List-Ans**-Speicher im **RUN·MAT**-Menü:

Func Type : r= Draw Type : Connect Derivative : Off Angle : Deg Complex Mode: re^8i Coord : On Grid : Off DEGREE MODE	$(1+i\sqrt{3}, 3+4i, -3i)$ Done LIST·MAT·CPLX·CALC·NUM	Ans $1 \begin{bmatrix} 2660i \\ 5653.13010235i \end{bmatrix}$ $2660i$	Ans $1 \begin{bmatrix} 2660i \\ 5653.13010235i \end{bmatrix}$ $5653.13010235i$
--	--	---	--

L1.6: Anzeige der Ergebnisse im **RUN·MAT**-Menü:

$9(\cos 330 + i \sin 330) \rightarrow a + bi$ $7.794228634 - 4.5i$ $9(\cos 330 + i \sin 330) \rightarrow r e^{8i}$ $9e^{-30i}$ LIST·MAT·CPLX·CALC·NUM

L1.7: Anzeige der Ergebnisse im **List-Ans**-Speicher im **RUN·MAT**-Menü:

Ans $1 \begin{bmatrix} 5 \\ 53.13 \end{bmatrix}$ 5	Ans $1 \begin{bmatrix} 5 \\ 53.13 \end{bmatrix}$ 53.13010235	$\text{Pol}(3, 4)$ $\text{Rec}(5, \pi/3)$ Done Done PROB·HYP·ANGEL·STAT·FMEN	Mode : Comp Func Type : r= Draw Type : Connect Derivative : Off Angle : Rad Complex Mode: a+bi Coord : On DEGREE MODE
Ans $1 \begin{bmatrix} 2.5 \\ 4.3301 \end{bmatrix}$ 2.5	Ans $1 \begin{bmatrix} 2.5 \\ 4.3301 \end{bmatrix}$ 4.330127019	$(3+4i) \rightarrow r e^{8i}$ $5653.13010235i$ $5x e(i\pi/3) \rightarrow a+bi$ $2.5+4.330127019i$ LIST·MAT·CPLX·CALC·NUM	$\text{GExpand}(5x e(i\pi/3))$ $5\sqrt{3}i + 5$ $2 \rightarrow 2$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH

L1.8: Anzeige der Ergebnisse im **CAS**-Menü:

$\cos X + i \sin X \rightarrow A$ $\cos(X) + \sin(X) \cdot i$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$\cos X - i \sin X \rightarrow B$ $\cos(X) - \sin(X) \cdot i$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$A \times B$ $\rightarrow -\sin(X) \cdot i (\cos(X) + \sin(X) \cdot i)$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$\text{Simplify}(A \times B)$ 1 TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH
--	--	--	--

L1.9: Anzeige der Ergebnisse im **CAS**-Menü:

Angle : Rad Answer Type : Complex Display : Fix3 FIX 3 Fix Norm	$2+2i \rightarrow C$ $2+2i$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$3(\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4))$ $(-\frac{3}{2} + \frac{3i}{2}) \cdot \sqrt{2}$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$3\pi/4 + i \sin(3\pi/4) \rightarrow D$ $(-\frac{3}{2} + \frac{3i}{2}) \cdot \sqrt{2}$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH
$\text{GExpand}(C \times D)$ $(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2)i - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	approx Ans $-0.121 + 4.121i$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$\text{GExpand}(C \times D)$ $-6\sqrt{2}$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	approx Ans -8.485 TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH

Kapitel 2:

L2.1: Achten Sie auf die Einstellungen im **SET UP**. Berechnung im **RUN·MAT**-Menü, dann im **CAS**-Menü:

Angle : Deg Complex Mode: re^8i Coord : On Grid : Off Axes : On Label : On Display : Fix3 DEGREE MODE	$1-i \rightarrow A$ $1.000 - 1.000i$ $1/2 + i\sqrt{3}/2 \rightarrow B$ $0.500 + 0.866i$ $-1-i \rightarrow C$ $-1.000 - 1.000i$ LIST·MAT·CPLX·CALC·NUM	$A \times B / C^3$ $0.707615.000i$ $\text{Ans} \rightarrow a+bi$ $0.683 + 0.183i$ LIST·MAT·CPLX·CALC·NUM	$(A+1) \times B^2 / C$ $1.581e-131.565i$ $\text{Ans} \rightarrow a+bi$ $-1.049 - 1.183i$ LIST·MAT·CPLX·CALC·NUM
$1-i \rightarrow A$ $1-i$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$1/2 + i\sqrt{3}/2 \rightarrow B$ $\frac{\sqrt{3}i}{2} + \frac{1}{2}$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$-1-i \rightarrow C$ $-1-i$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH	$\text{GExpand}(A^2 \times B / C^3)$ $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} + (\frac{\sqrt{3}-1}{4})i$ TANG·CALC·EQUA·EQN·GRAPH

Lösungshinweise - Kapitel 2

approx Ans 0.683+0.183i	CExpand((A+1)×B²/C) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}$	approx Ans -1.049-1.183i	Ansle :Rad Complex Mode:a+bi Coord :On Grid :Off Axes :On Label :On Display :Fix4 REALS:***
----------------------------	--	-----------------------------	--

L2.2: Berechnung im RUN·MAT-Menü:

3+4i÷H 4+3i÷B A-B -1.0000+1.0000i	1/(A×B) A/B Conjs A/Conjs B 0.0000-0.0400i 0.9600+0.2800i 0.9600-0.2800i	A/B Conjs A/Conjs B Conjs Ans 0.0000-0.0400i 0.9600+0.2800i 0.9600+0.2800i
--	---	---

L2.3: Berechnung im RUN·MAT-Menü:

(1+i)/(-1+i)²÷H (3+4i)/5+5/(3+4i)÷B (1+i)²÷C -0.5000+0.5000i 1.2000 0.0000+2.0000i	(1+2i)²×(1+i)²/(1-i)²÷D (A,B,C,D) Done Done	Ans 1 0.5+ 2 1.2 3 2i 4 3-4i -0.5000+0.5000i	Ansle :Deg Complex Mode:re^θi Coord :On Grid :Off Axes :On Label :On Display :Fix4 REALS:***
Ans 1 0.707 2 1.2 3 2e90i 4 5e-53 0.70716135.0000i	Ans 1 0.707 2 1.2 3 2e90i 4 5e-53 1.2000	Ans 1 0.707 2 1.2 3 2e90i 4 5e-53 2.0000e90.0000i	Ans 1 0.707 2 1.2 3 2e90i 4 5e-53 5.0000e-53.1301i

L2.4: Berechnung im RUN·MAT-Menü, dann im CAS-Menü:

√3+i×√2÷H A/Conjs A 4/(4(cos 30+i sin 30)) 0.2000+0.9798i 0.8660-0.5000i	CExpand((√3+i√2)/(√3-2√5i+1) 5	approx Ans 0.2000+0.9798i
Ansle :Deg Answer Type :Complex Display :Fix4 Deg Rad	CExpand(4/(4(cos 30+i √3 2 2 0.8660-0.5000i	approx Ans 0.8660-0.5000i

L2.5: Berechnung im CAS-Menü, dann im RUN·MAT-Menü:

√2×e(i×π/4)÷H 1-i	1×e(iπ/3)÷B √3i+1 2 2	√2×e(i×5π/4)÷C -1-i	Ansle :Rad Answer Type :Complex Display :Norm1 FIX 1sci Norm1
CExpand(A×B/C) -√3i 2 2	approx Ans -0.8660254038+0.5i	Abs Ans √25000000000673826361 5000000000	Abs CExpand(A×B/C) 1
approx (A×B/C) 0.8485281374-1.039230i	im CAS-Menü im RUN·MAT-Menü:	A B C 1.732050808 +1.414213562i 1.2 2i	A×B/C 0.8485281374 -1.039230485i

Der Zugriff mit **approx** auf **A**, **B**, **C** ruft Speicherinhalte der numerischen Variablen des RUN·MAT-Menüs ab - nicht die Speicherinhalte der symbolischen Variablen **A**, **B**, **C**, d.h. im CAS-Menü existieren zwei Variablentypen (numerisch und symbolisch) unter der gleichen Variablenbezeichnung!

L2.6: Berechnung im CAS-Menü. Zerlegung von eqn(1) in seinen Realteil und Imaginärteil:

$A(2+3i)+B(1+2i)=1-4i$ $(2+3i)A+(1+2i)B=1-4i$	$\text{GExpand}(\text{eqn}(1))$ $(3A+2B)i+2A+B=1-4i$	$\text{GExpand}(\text{rewrite}(\text{eqn}(2)))$ $(3A+2B+4)i+2A+B-1=0$	$\text{solve}((3A+2B+4=0, 2A+B=0))$ $A=6$ $B=-11$
$4=0, 2A+B-1=0), (A, B))$ $A=6$ $B=-11$	$\text{getRight}(\text{exchange}(\text{eqn}(4)))$ $2A+B+(3A+2B+4)i-1$	$\text{exchange}(\text{eqn}(4))) \div 2$ $2A+B+(3A+2B+4)i-1$	$\text{GExpand}((\text{Abs } Z)^2/Z) \cdot W$ $2A+B-1+(-3A-2B-4)i$

Z und W beinhalten den Gleichungsterm bzw. den konjugiert komplexen Gleichungsterm von **equ(4)**. Mit **eqn(8)** und **eqn(9)** werden der Real- bzw. Imaginärteil der Gleichung **equ(4)** symbolisch erzeugt:

$\text{simplify}(\text{GExpand}((Z+W)))$ $2A+B-1=0$	$\text{GExpand}((Z+W)/2=0))$ $2A+B-1=0$	$\text{simplify}(\text{GExpand}((Z-W)))$ $3A+2B+4=0$	$\text{GExpand}((Z-W)/(2i)=0))$ $3A+2B+4=0$
$\text{solve}((\text{eqn}(8), \text{eqn}(9)))$ $A=6$ $B=-11$	$\text{eqn}(8), \text{eqn}(9)), (A, B))$ $A=6$ $B=-11$		

L2.7: Berechnung im CAS-Menü, dann im RUN·MAT-Menü (Datenübergabe im Termspeicher):

$\frac{(-2+2\sqrt{3}i)/(2+5i)-2\sqrt{3}i-2}{\sqrt{5}i+2} \cdot \frac{5(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{5}+5i}$	$\frac{-5(\sqrt{3}+i)/(2\sqrt{5}+5i)+2}{2\sqrt{3}i-2} \cdot \frac{5(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{5}i+2}$	$\text{GExpand}(Z)$ $\sqrt{3}i-1$	$\text{GExpand}(Z)$ $\sqrt{3}i-1$
$\text{== Termspeicher ==}$ $\text{dann } 3^{(1/2)} \cdot i - 1$ $f2:$ $f3:$ $f4:$ $f5:$ $f6:$	$4:\text{SEE}$ $3:\text{fn}$ $2:\text{Recall}$ $1:\text{Store}$	Mode Func Type Draw Type Derivative Angle Complex Mode Coord	$3^{(1/2)} \cdot i - 1 + \text{re}^{60^\circ} \cdot i$ $26120i$ $\text{Ans} \rightarrow a+bi$ $-1+1.732050808i$

L2.8: Berechnung im CAS-Menü (zwei Varianten), dann im EQUA-Menü:

$3A-(2+i)B=-i$ $3A+(-2-i)B=-i$	$(4-2i)A-5B=-1-2i$ $(4-2i)A-5B=-1-2i$	$\text{eliminate}(\text{eqn}(1), A, \text{eqn}(2))$ $(1+\frac{i}{2})B-\frac{3i}{2}=-i$	$\text{solve}(\text{eqn}(3), B)$ $B=\frac{1}{5}+\frac{2i}{5}$
$\text{eliminate}(\text{eqn}(1), B, \text{eqn}(2))$ $A-i=-i$	$\text{eqn}(1), B, \text{eqn}(2))$ $A-i=-i$	$\text{solve}(\text{eqn}(5), A)$ $A=0$	Lösung mit dem eliminate -Befehl, Vereinfachung mit dem solve -Befehl.
$\text{solve}((\text{eqn}(1), \text{eqn}(2)))$ $A=0$ $B=\frac{1}{5}+\frac{2i}{5}$	$(\text{eqn}(1), \text{eqn}(2)), (A, B))$ $A=0$ $B=\frac{1}{5}+\frac{2i}{5}$		Unmittelbare Lösung mit dem solve -Befehl.
Gleichung Typ wählen F1: Gleichzeitis F2: Polynominal F3: Lösungs ENTER POLY SOLU	Gleichzeitis Daten im Speicher vorhanden. Unbekannte: 2 Anzahl der Unbekannten? 2 3 4 5 6 7	$ax+by=Cn$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2-i & -i \\ 2 & 4-2i & -5 & -1-2i \end{bmatrix}$ $-1-2i$ EDIT DEL CLR SOLU	$ax+by=Cn$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2-i & -i \\ 2 & 4-2i & -5 & -1-2i \end{bmatrix}$ $0.2+0.4i$ REPT

Kapitel 3:

L3.1: Die Zahl $z = -2 + 5i$ liegt offensichtlich im Winkelraum D_1 (Winkel 111.8°).

Demzufolge liegt die Potenz $w = z^2 = -21 - 20i$ im Blatt 1.

<pre> Angle : Deg Complex Mode: a+bi Coord : On Grid : Off Axes : On Label : On Display : Norm1 </pre>	<pre> (-2+5i)^2 Ans (-2+5i) 111.8014095 </pre>	<pre> Expand((-2+5i)^2) -21-20i </pre>	Bildschirmanzeigen im RUN·MAT -Menü und CAS -Menü.
<pre> DEG RAD GRG </pre>	<pre> LAST MAT/CALC/NUM </pre>	<pre> TNH/CALC/EQUAL/APP/GRAPH </pre>	

L3.2: Die Zahlen z_1 und z_2 liegen offensichtlich in D_0 bzw. D_1 (Winkel 30° bzw. 150°).

<pre> √3+i→A -√3+i→B (A,B)^3 Done </pre>	<pre> Ans 1.732050808+i -1.732050808+i 8E-14+8i </pre>	<pre> Ans 1 30 2 150 30 </pre>	<pre> Ans (A,B) ReP (A,B)→List 3 ImP (A,B)→List 4 Done </pre>
<pre> Grafikfunkt.:Y= V1tan 60XX,[0,100] V2tan -60XX,[0,100] V3: V4: V5: V6: </pre>	<pre> Speichern in Bildspeicher Pict[1~20]: 2 </pre>	<pre> S Wählen Sie Bildspeicher Pict[1~20]: 2 Background: none Angle: Rad Mon&Pict </pre>	<pre> Background: Pict2 Angle: Deg Complex Mode: a+bi Coord: On Grid: Off Axes: On Label: Off </pre>
<pre> StatGraph2 Graph Type: Scatter XList: List3 YList: List4 Frequency: 1 Mark Type: </pre>	<pre> Stat1 X Y INP </pre>	Der Winkelraum D_0 wurde als Hintergrundbild zum Scatterplot hinzugefügt. Die Potenzwerte betragen jeweils $8i$.	

L3.3: Die Berechnungen erfolgen mittels geeigneter Listenarithmetik und Hintergrundbilddarstellung:

<pre> 2i→A -1+2i→B -1-2i→C Ans (A,B,C) </pre>	<pre> Ans 1 90 2 116.56 3 -116.5 90 </pre>	<pre> Ans 1 90 2 116.56 3 -116.5 116.5650512 </pre>	<pre> Ans 1 90 2 116.56 3 -116.5 -116.5650512 </pre>
<pre> Ans (A,B,C) ReP (A,B,C)→List 1 ImP (A,B,C)→List 2 </pre>	<pre> Betrachtungsfenster Xmin: -6 max: 6 scale: 1 dot: 0.09523809 Ymin: -3 max: 3 </pre>	<pre> Grafikfunkt.:Y> V1tan 60XX,[0,100] V2tan -60XX,[0,100] V3X V48-X V5: V6: </pre>	<pre> Speichern in Bildspeicher Pict[1~20]: 1 </pre>
<pre> S Wählen Sie Bildspeicher Pict[1~20]: 1 Background: none Angle: Rad Mon&Pict </pre>	<pre> Stat Wind: Manual Resid List: None List File: File1 Func Type: Y= Graph Func: Off Background: Pict1 Angle: Rad </pre>	<pre> StatGraph1 Graph Type: Scatter XList: List1 YList: List2 Frequency: 1 Mark Type: </pre>	<pre> Stat1 X Y INP </pre>

L3.4: Die Zahl z liegt in D_5 (Winkelraum $-128.57^\circ < -120^\circ = \arg(z) \leq -77.14^\circ$), d.h. z^7 liegt in Blatt 5:

<pre> Angle : Deg Complex Mode: a+bi Coord : On Grid : Off Axes : On Label : Off Display : Fix2 </pre>	<pre> -1-i√3→Z Ans Z -1.00-1.73i -120.00 (-180/7,-180/7-360/7, -180/7-2×360/7) </pre>	<pre> Ans 1 -25.71 2 -77.14 3 -120.5 -77.14 </pre>	<pre> GExpand((-1-i√3)^7) -64i-64 </pre>
<pre> DEG RAD GRG </pre>	<pre> LAST MAT/CALC/NUM </pre>	<pre> TNH/CALC/EQUAL/APP/GRAPH </pre>	

L3.5: Die z -Potenzen bilden sich spiralförmig in der Gaußschen Zahlenebene ab:

<pre> Mode : Comp Func Type : Y= Draw Type : Connect Derivative : Off Angle : Rad Complex Mode: re^θi Coord : On </pre>	<pre> 11/10×e(i×π/10)→Z Seq(ReP Z^N,N,1,20,1) →List 1 Seq(ImP Z^N,N,1,20,1) →List 2 </pre>	<pre> StatGraph1 Graph Type: Scatter XList: List1 YList: List2 Frequency: 1 Mark Type: </pre>	<pre> Stat1 X Y INP </pre>
<pre> DEG RAD GRG </pre>	<pre> LAST MAT/CALC/NUM </pre>	<pre> TNH/CALC/EQUAL/APP/GRAPH </pre>	

L3.6: Die gewünschte Vereinfachung von z^5 konnte auf direktem Wege im CAS-Menü nicht realisiert werden:

$11/10 \times e^{(1 \times \pi / 10) + 2i}$	Angle : Rad Zahl wählen Fix[0~9]: 3	approx 2 $1.046 + 0.340i$	simplify(z^5) $161051(\sqrt{2}\sqrt{5}+10+\sqrt{5}i-i)^5$ 102400000
$\frac{11}{10} \left(\frac{(\sqrt{5}-1)i + \sqrt{2}(\sqrt{5}+5)}{4} \right)$	11/10+r $\frac{11}{10}$	$\pi/10 + \theta$ $\frac{\pi}{10}$	$\frac{161051 \left(\frac{(\sqrt{5}-1)i + \sqrt{2}(\sqrt{5}+5)}{4} \right)}{100000}$
simplify(CExpand(z^5)) $\frac{161051 \left(\frac{(\sqrt{5}-1)i + \sqrt{2}(\sqrt{5}+5)}{4} \right)}{100000}$	Speicherfehler Drücken Sie: [ESC]	Eine schon vereinfachte Termeingabe ergab das gewünschte Ergebnis:	$\frac{r^5 \times e^{(5 \times i \times \theta)}}{161051i}$ 100000

Kapitel 4:

L4.1: Die Lösung wird zunächst für z selbst ausgeführt, d.h. $|z| = \text{abs } z = r$, $R = \text{Re}(z) = (Z+W)/2$, $I = \text{Im}(z) = (Z-W)/(2i)$ und $H = \theta = \arg(z) = -\arctan(R/I) + \pi/2 \cdot \text{sgn}(I)$ (Hauptargument) werden ermittelt. Als Hilfsvariable wird dabei unter W die konjugiert komplexe Zahl zu z abgespeichert: $W = \text{conj } z = (\text{abs } z)^2 / z$:

$A+Bi+Z$ $A+Bi$	$(\text{abs } Z)^2/Z \rightarrow W$ $\frac{(A+Bi)^2}{A+Bi}$	CExpand(W) $A-Bi$	$(Z+W)/Z+R$ $\frac{(A+Bi)^2}{A+Bi} + A+Bi$ 2
CExpand(R) A	$(Z-W)/(2i)+I$ $-\frac{(-(A+Bi)^2/A+Bi)i}{2}$	CExpand(I) B	$-\tan^{-1}(R/B) + \pi/2 \times \text{sgn}(B)$ $-\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{\pi \cdot \text{sgn}(B)}{2}$
$(R/B) + \pi/2 \times \text{sgn}(B) \rightarrow H$ $-\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{\pi \cdot \text{sgn}(B)}{2}$	$e^Z \rightarrow Z$ e^{A+Bi}	$(\text{abs } Z)^2/Z \rightarrow W$ $e^{-A-Bi} \cdot (e^{A+Bi})^2$	simplify(CExpand(W)) $e^A(\cos(B) - \sin(B) \cdot i)$
CLR EW RANG $\text{TrigToExp}(\text{simplify}(CExpand(W)))$ e^{A-Bi}	$\text{simplify}(CExpand(W))$ e^{A-Bi}	$(Z+W)/Z+R$ $e^{A+Bi} + e^{-A-Bi} \cdot (e^{A+Bi})^2$	simplify(CExpand(R)) $e^A \cdot \cos(B)$
$(Z-W)/(2i)+I$ $-\frac{(e^{A+Bi} - e^{-A-Bi}) \cdot (e^{A+Bi})^2}{2}$	$\text{simplify}(CExpand(I))$ $\frac{e^A(-\cos(2B)+1)}{2 \cdot \sin(B)}$	$\text{CExpand}(\text{simplify}(CExpand(W)))$ $\frac{e^A(-(\cos(B))^2 + (\sin(B))^2)}{2 \cdot \sin(B)}$	$\text{simplify}(CExpand(I))$ $\frac{\cos(B)^2 + (\sin(B))^2 + 1}{2 \cdot \sin(B)}$
CLR EW RANG $e^A(-\cos(2B) + (\sin(B))^2)$ $e^A((\cos(B))^2 + (\sin(B))^2)$ $2 \cdot \sin(B)$	$\text{CExpand}(e^A(-\cos(2B) + \sin(B)))$ $e^A \cdot \sin(B)$	Die Vereinfachung von I zu $e^A \cdot \sin(B)$ war nicht ganz unproblematisch.	$e^A \cos B \rightarrow X$ $e^A \cdot \cos(B)$
$e^A \sin B \rightarrow Y$ $e^A \cdot \sin(B)$	$-\tan^{-1}(X/Y) + \pi/2 \times \text{sgn}(Y) \rightarrow H$ $-\tan^{-1}\left(\frac{\cos(B)}{\sin(B)}\right) + \frac{\pi \cdot \text{sgn}(B)}{2}$	$(X/Y) + \pi/2 \times \text{sgn}(Y) \rightarrow H$ $\frac{1}{2} + \frac{\pi \cdot \text{sgn}(e^A \cdot \sin(B))}{2}$	simplify(H) $-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(B)}\right) + \frac{\pi \cdot \text{sgn}(B)}{2}$

L4.2: Die Lösung wird mit und ohne **CAS (RUN·MAT-Menü)** ermittelt, vgl. **L4.1:**

$\sqrt{3+5i}+2$ $\sqrt{3+5i}$	$\text{Simplify}(-\tan^{-1}(\sqrt{3}/5))$ $-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)+\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{3/5}+\pi/2 \times \text{signum}(5)$ $-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)+\frac{\pi}{2}$	$\text{approx Ans}/\pi \times 180$ 70.89339465
$-2+2$ $-\sqrt{3}-5i$	$\text{Simplify}(-\tan^{-1}(-\sqrt{3}/-5))$ $-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)-\frac{\pi}{2}$	$-5+\pi/2 \times \text{signum}(-5)$ $-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)-\frac{\pi}{2}$	$\text{approx Ans}/\pi \times 180$ -109.1066054
$\text{Simplify}(\text{Abs } Z)$ $2\sqrt{7}$	$\text{Abs } eZ$ $ e^{\sqrt{3}+5i} $	$\text{Simplify}(\text{CExpand}(\text{Ans}))$ $\sqrt{e} 2\sqrt{3}$	approx Ans 5.652233674
$e(\sqrt{3+5i})+2$ $e^{\sqrt{3}+5i}$	$e(\sqrt{3-5i})+0$ $e^{\sqrt{3}-5i}$	$(Z+0)/2+8$ $e^{\sqrt{3}+5i}+e^{\sqrt{3}-5i}$ 2	$\text{Simplify}(\text{CExpand}(X))+$ $\cos(5) \cdot e^{\sqrt{3}}$
$(Z-0)/(2i)+Y$ $-\frac{(e^{\sqrt{3}+5i}-e^{\sqrt{3}-5i})i}{2}$	$\text{Simplify}(\text{CExpand}(Y))+$ $\sin(5) \cdot e^{\sqrt{3}}$	$-\tan^{-1}(X/Y)+\pi/2 \times \text{signum}$ $-\tan^{-1}\left(\frac{\cos(5)}{\sin(5)}\right)+\frac{\pi \cdot \text{signum}}{2}$	$(X/Y)+\pi/2 \times \text{signum}(Y)+H$ $\frac{\pi \cdot \text{signum}(\sin(5) \cdot e^{\sqrt{3}})}{2}$
$\text{Simplify}(H)+H$ $-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(5)}\right)+\frac{\pi \cdot \text{signum}}{2}$	$\text{Ans}/\pi \times 180+H$ $100\left(-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan(5)}\right)+\frac{\pi \cdot \text{signum}}{2}\right)$	Die Vereinfachung von H im CAS-Menü mit approx zu -73,52° war nicht ganz unproblematisch. Es gilt für $\text{Im}(z)=5: \pi < 5 \leq 3\pi \Rightarrow z \in D_1 \Rightarrow w \in \text{Blatt 1, für}$ $\text{Im}(z)=-5: -3\pi < 5 \leq -\pi \Rightarrow z \in D_{-1} \Rightarrow w \in \text{Blatt -1}$	
Angle : Deg Complex Mode: re ⁰ⁱ Coord : On Grid : Off Axes : On Label : Off Display : Fix4 Fix Sci Norm Eng	$\sqrt{3+5i}+2$ 5.2915670.8934i (Z, -Z) → List 1 Abs List 1 Done Arg List 1 Done LIST MAT CPL CALC NUM	Ans 1 5.2915 2 5.2915 5.2915	Ans 1 70.893 2 109.106 109.1066e180.0000i

L4.3: Die Berechnung erfolgt mittels einer geeigneter Listenarithmetik im **RUN·MAT-Menü**:

Ans 1 4.05E> 2 22026> 3 10E-10> 485165195.4e65.9156i	Ans 1 4.05E> 2 22026> 3 10E-10> 22026.4658 e-147.0422i	Ans 1 4.05E> 2 22026> 3 10E-10> 0.0000e-131.8312i	$(20+20i, 10+10i, -40-40i) \rightarrow \text{List 1}$ e(List 1) Conjs eList 1 LIST MAT CPL CALC NUM
Ans 1 4.05E> 2 22026> 3 10E-10> 485165195.4 e-65.9156i	Ans 1 4.05E> 2 22026> 3 10E-10> 22026.4658e147.0422i	Ans 1 4.05E> 2 22026> 3 10E-10> 0.0000e131.8312i	Conjs eList 1 Done ReP eList 1 → List 2 Done ImP eList 1 → List 3 Done LIST MAT CPL CALC NUM

Für $\text{Im}(z)=\{-40, 10, 20\}$ gilt: $-13\pi < -40 \leq -11\pi \Rightarrow z \in D_{-6} \Rightarrow w \in \text{Blatt -6,}$

$3\pi < 10 \leq 5\pi \Rightarrow z \in D_2 \Rightarrow w \in \text{Blatt 2, } 5\pi < 20 \leq 7\pi \Rightarrow z \in D_3 \Rightarrow w \in \text{Blatt 3.}$

L4.4: Die Darstellung im **STAT-Menü** erfordert eine geeignete Betrachtungsfenstereinstellung!

Betrachtungsfenster Xmin : -1E+08 max : 5E+08 scale: 1.25E+08 dot : 4.7619E+06 Ymin : -1E+08 max : 5E+08 TH1 TRG STD STO RCL			
	X=-191907213.2 Y=442929260.9	X=-10401.78033 Y=-11902.06239	X=-2.033389E-10 Y=-3.165504E-10

Kapitel 5:

L5.1: Die Lösung werden im **RUN·MAT**-Menü ausgerechnet und mit einer Hintergrundgraphik (Einheitskreis) im **STAT**-Menü dargestellt:

<pre>Ans 1 1e45i 2 1e135i 3 1e-13> 4 1e-45i 1.0000e45.0000i</pre>	<pre>Ans 1 1e45i 2 1e135i 3 1e-13> 4 1e-45i 1.0000e135.0000i</pre>	<pre>Ans 1 1e45i 2 1e135i 3 1e-13> 4 1e-45i 1.0000e-135.0000i</pre>	<pre>Ans 1 1e45i 2 1e135i 3 1e-13> 4 1e-45i 1.0000e-45.0000i</pre>
<pre>Angle :Deg Complex Mode:re^81 Coord :On Grid :Off Axes :On Label :Off Display :Fix4 DEFPARA</pre>	<pre>-1+2 1.0000e180.0000i (√2, √2xe(i×1×2π/4), √2xe(i×2×2π/4), √2xe (i×3×2π/4)) Done LISTMATICPLXCALCHUM</pre>	<pre>List Ans→List 1 Done ReP List 1→List 2 Done ImP List 1→List 3 Done Done LISTMATICPLXCALCHUM</pre>	<pre>List 1 List 2 List 3 List 4 1 1e45i 0.7071 0.7071 2 1e135i 0.7071 0.7071 3 1e-13> 0.7071 0.7071 4 1e-45i 0.7071 0.7071 1.0000e45.0000i GRAPHICALDELDELINSE</pre>
<pre>Betrachtungsfenster Xmin :-3 max :3 scale :1 dot :0.04761904 Ymin :-1.5 max :1.5 WHITIRGSTDISTOICOL</pre>	<pre>Grafikfunkt.:Param Xt1:1xcos T Yt1:1xsin T Xt2: Yt2: Xt3: Yt3: SELDELTYPEGMEMIDRAW</pre>	<pre>Speichern in Bildspeicher Pict[1~20]: 1 Pict</pre>	<pre>Wählen Sie Bildspeicher Pict[1~20]: 1 Angle :Rad NonePict</pre>
<pre>0.7071067811 Y=0.7071067811</pre>	<pre>0.7071067811 Y=0.7071067811</pre>	<pre>0.7071067811 Y=0.7071067811</pre>	<pre>0.7071067811 Y=0.7071067811</pre>
<pre>StatGraph1 Graph Type :Scatter XList :List2 YList :List3 Frequency :1 Mark Type :a</pre>		<pre>Angle :Deg Answer type :Complex Display :Fix4 DEFPARA</pre>	<pre>-1+2 -1 TRANSICALCEQUALEQNMGRAPH</pre>
<pre>CExpand(√2) √2+√2i 2+2</pre>	<pre>CExpand(√2xe(i×2π/4)) -√2+√2i 2+2</pre>	<pre>CExpand(√2xe(i×4π/4)) -√2+√2i 2+2</pre>	<pre>CExpand(√2xe(i×6π/4)) √2+√2i 2+2</pre>

L5.2: Für Teilaufgabe a) werden verschiedene Lösungsvarianten gezeigt, b) und c) sind analog zu lösen. Die exakte Lösung im **CAS**-Menü ist hier von der Darstellung her nicht in jedem Fall gut zu vereinfachen:

<pre>Angle :Deg Answer type :Complex Display :Fix4 DEFPARA</pre>	<pre>solve(Z^6=-1/2+J3/2xi Z= 6√3i-1 6√2 6√3i-1</pre>	<pre>solve(Z^6=-1/2+J3/2xi Z= 6√3i-1 6√2 6√3i-1</pre>	<pre>solve(Z^6=-1/2+J3/2xi Z= 6√3i-1 6√2 6√3i-1</pre>
<pre>solve(Z^6=-1/2+J3/2xi Z= 26√2 26√2 6√3i-1 6√3i-1 26√2 26√2</pre>	<pre>solve(Z^6=-1/2+J3/2xi Z= 26√2 26√2 6√3i-1 6√3i-1 26√2 26√2</pre>	<pre>Z^6=-1/2+J3/2xi, 2) Z= 6√3i-1 6√3i-1 26√2 26√2</pre>	<pre>CExpand(eqn(1)) Z=-cos(20)-sin(20)·i</pre>
<pre>CExpand(eqn(2)) Z=cos(20)+sin(20)·i</pre>	<pre>CExpand(eqn(3)) Z=-cos(20)+√3·sin(20)</pre>	<pre>CExpand(eqn(3)) 20)+(-sin(20)·√3·co</pre>	<pre>CExpand(eqn(3)) h(20)·√3·cos(20))i</pre>
<pre>CExpand(eqn(4)) Z=cos(20)+√3·sin(20)</pre>	<pre>CExpand(eqn(4)) h(20)·√3·cos(20))i</pre>	<pre>CExpand(eqn(5)) Z=-cos(20)·√3·sin(20)</pre>	<pre>CExpand(eqn(5)) h(20)·√3·cos(20))i</pre>

Lösungshinweise - Kapitel 5

CEXPAND(egn(6)) $z = \frac{\cos(20)}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin(20)}{2}i$	CEXPAND(egn(6)) $\frac{\cos(20)}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin(20)}{2}i$	Angle : Rad Answer Type : Complex Display : Fix4	$-1/2 + i\sqrt{3}/2$
TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/	TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/	DEG/RAD	TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/

Abschließend im **CAS**-Menü die exakte Darstellung der Hauptwurzel (Winkel im Bogenmaß):

Abs H+r 1	$-\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) + \pi/2 + 2\pi/3$	$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}i}{2}}$	CEXPAND(W) $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$
CO/ABS/X1/SPH/HVP/HMEV	TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/	TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/	TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/

Nun der Lösungsvorschlag im **EQUA**-Menü mit Betrachtung einer Nullstellengleichung, dann **RUN·MAT**-Menü:

Polynomial Key: $a_0x^6 + a_1x^5 + \dots + a_6 = 0$ Grad[4~30]? n=6 Grad? 2 3 4 5 6	$a_0x^6 + a_1x^5 + \dots + a_6 = 0$ C 1 0 0 0 0 0 1.0000	$a_0x^6 + a_1x^5 + \dots + a_6 = 0$ C 0 0 0 0 0 0.5-0.8660i 0.5000-0.8660i	$a_0x^6 + a_1x^5 + \dots + a_6 = 0$ C 0.9996+0.3421i 0.766-0.6427i 0.1736+0.9848i -0.173-0.9848i 0.9397+0.3420i
TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/	EDIT/DEL/CLR/	EDIT/DEL/CLR/	REPT
$a_0x^6 + a_1x^5 + \dots + a_6 = 0$ 3 0.1736+0.9848i 4 -0.173-0.9848i 5 -0.766+0.6427i 6 -0.939-0.3421i -0.9397-0.3420i	Ans Complex Mode: re^θi Coord : On Grid : Off Axes : On Label : Off Display : Fix4	Ans 1 1e19 2 0.999 3 0.999 4 1e-16 5 0.999 1.0000e20.0000i	Ans 1 1e19 2 0.999 3 0.999 4 1e-16 5 0.999 1.0000e80.0000i
REPT	FIX/Sci/Normal/Eng/		
Ans 1 1e19 2 0.999 3 0.999 4 1e-16 5 0.999 1.0000e140.0000i	Ans 1 1e19 2 0.999 3 0.999 4 1e-16 5 0.999 1.0000e-160.0000i	Ans 1 1e19 2 0.999 3 0.999 4 1e-16 5 0.999 1.0000e-100.0000i	Ans 1 1e19 2 0.999 3 0.999 4 1e-16 5 0.999 1.0000e-40.0000i
TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/	TRANS/CALC/EQUA/EGN/MSPH/	GRAPH/CALC/DEL/DEL+INS/	STAT/Graph1 Graph Type : Scatter XList : List3 YList : List4 Frequency : 1 Mark Type : *
$-1/2 + i\sqrt{3}/2$ 1.0000e120.0000i {0,1,2,3,4,5}→List 1 6*√2x(i>List 1x2π/6) Done	List Ans→List 2 Done ReP List 2→List 3 Done Imp List 2→List 4 Done	List 1 List 2 List 3 List 4 1 0 1e19 0.9996 0.342 2 1 0.999 0.1736 0.9848 3 2 0.999 0.766 0.6427 4 3 1e-16 0.999 0.342 5 4 0.999 0.173 0.984 0.0000	STAT/Graph1 Graph Type : Scatter XList : List3 YList : List4 Frequency : 1 Mark Type : *
LIST/MAT/CPLX/CALC/NUM/	LIST/MAT/CPLX/CALC/NUM/	GRAPH/CALC/DEL/DEL+INS/	STAT/Graph1

Der Lösungsvorschlag im **STAT**-Menü mit Hintergrundgraphik (Einheitskreis, vgl : L 5.1):

Betrachtungsfenster Xmin : -3 max : 3 scale : 1 dot : 0.04761904 Ymin : -1.5 max : 1.5	Stat Wind : Manual Resid List : None List File : File1 Func Type : Param Graph Func : Off Background : Pict1 Angle : Deg		
UNIT/TRA/STD/ISTO/RC/L	Mon#1/P1CT	X=0.9396926207 Y=0.3420201433	X=0.1736481776 Y=0.984807753
X=-0.7660444431 Y=0.6427876096	X=-0.9396926207 Y=-0.3420201433	X=-0.1736481776 Y=-0.984807753	X=0.7660444431 Y=-0.6427876096

Die sechs Wurzelwerte wurden wieder im mathematisch positiven Drehsinn entsprechend der Winkelraumzuordnung dargestellt.

L5.3: Die Zahlen werden im **RUN·MAT**-Menü in **List1** und die Blattnummern in **List2** abgespeichert

(27i, 27i, -4i2+4i2xi, -4i2+4i2xi, -3+i)→List 1 Done (2, 0, 1, 0, 2)→List 2 Done	(List 1)^(1/3)×e(i>List 2x2π/3)→List 3 List 3 Done	Mode : Comp Func Type : Param Draw Type : Connect Derivative : Off Angle : Deg Complex Mode : re^θi Coord : On	Ans 1 3e-90i 2 3e30i 3 2e165i 4 2e45i 5 1.467e-90i 3.0000e-90.0000i
LIST/MAT/CPLX/CALC/NUM/	LIST/MAT/CPLX/CALC/NUM/	DEG/RAD/GRD	
Ans 1 3e-90i 2 3e30i 3 2e165i 4 2e45i 5 1.467e-90i 3.0000e30.0000i	Ans 1 3e-90i 2 3e30i 3 2e165i 4 2e45i 5 1.467e-90i 2.0000e165.0000i	Ans 1 3e-90i 2 3e30i 3 2e165i 4 2e45i 5 1.467e-90i 2.0000e45.0000i	Ans 1 3e-90i 2 3e30i 3 2e165i 4 2e45i 5 1.467e-90i 1.4678e-66.1450i
LIST/MAT/CPLX/CALC/NUM/	LIST/MAT/CPLX/CALC/NUM/	DEG/RAD/GRD	


L5.4: Die Lösungen zu a) und b) werden dargestellt, weitere Lösungen sind entsprechend zu finden.

Im **CAS**-Menü erhält man unmittelbar für a):

```
solve(Z^2=-5+12i,Z)
Z=-2-3i
Z=2+3i
```

Für b) erhält man im **EQUA**-Menü (Polynomgleichung) und dann im **CAS**-Menü:

```
aX^3+bX^2+cX+d=0
a 1 b -12 c 5 d -5i
c 1 b 0 c 0 d -12-5i
-12.0000-5.0000i
EDIT DEL CLR SOLV
```

<pre>aX^3+bX^2+cX+d=0 1 2.331+0.3085i 2 -0.898-2.1729i 3 -1.432+1.8644i 2.3310+0.3085i REPT</pre>	<pre>aX^3+bX^2+cX+d=0 1 2.331+0.3085i 2 -0.898-2.1729i 3 -1.432+1.8644i -0.8983-2.1730i REPT</pre>	<pre>aX^3+bX^2+cX+d=0 1 2.331+0.3085i 2 -0.898-2.1729i 3 -1.432+1.8644i -1.4327+1.8644i REPT</pre>	<pre>aX^3+bX^2+cX+d=0 1 2.3513e7.5400i 2 2.3513e-112.4i 3 2.3513e127.53i 2.3513e7.5400i REPT</pre>
<pre>aX^3+bX^2+cX+d=0 1 2.3513e7.5399i 2 2.3513e-112.4i 3 2.3513e127.53i 2.3513e-112.4600i REPT</pre>	<pre>aX^3+bX^2+cX+d=0 1 2.3513e7.5399i 2 2.3513e-112.4i 3 2.3513e127.53i 2.3513e127.5400i REPT</pre>	<pre>Func Type : Param Angle : Rad Complex Mode: a+bi Display : Fix4 Real a+bX^2+cX+d</pre>	
<pre>solve(Z^3=12+5i,Z) -3*sqrt(13)*cos(tan^-1(5/12)/3) Z= 2 (5/12) TNS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH ></pre>	<pre>simplify(getRight(eqn(1))) sqrt(13)*(-cos(tan^-1(5/12)/3)) TNS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH ></pre>	<pre>getRight(eqn(3)) sqrt(13)*(-cos(tan^-1(5/12)/3)) TNS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH ></pre>	<pre>approx Ans -1.4327+1.8644i TNS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH ></pre>
<pre>solve(Z^3=12+5i,Z) 3*sqrt(13)*cos(tan^-1(5/12)/3) Z= 2 tan^-1(5/12) CLR/5W/TRANS ></pre>	<pre>simplify(getRight(eqn(1))) sqrt(13)*(cos(tan^-1(5/12)/3)+si TNS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH ></pre>	<pre>getRight(eqn(4)) sqrt(13)*(cos(tan^-1(5/12)/3)+si CLR/5W/TRANS ></pre>	<pre>approx Ans 2.3310+0.3085i TNS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH ></pre>
<pre>solve(Z^3=12+5i,Z) -3*sqrt(13)*cos(tan^-1(5/12)/3) Z= 2 tan^-1(5/12) CLR/5W/TRANS ></pre>	<pre>simplify(getRight(eqn(1))) sqrt(13)*(-sin(tan^-1(5/12)/3)) TNS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH ></pre>	<pre>getRight(eqn(5)) sqrt(13)*(-sin(tan^-1(5/12)/3)) CLR/5W/TRANS ></pre>	<pre>approx Ans -0.8983-2.1730i TNS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH ></pre>

L5.5 und L5.6: Die Lösungen werden, sofern im **CAS**-Menü erhältlich, wieder als Bild angegeben:

<pre>simplify(sqrt(-x^2)) sqrt(-x^2) L5.5b)</pre>	<pre>simplify(sqrt(-1)*sqrt(x^2)) sqrt(x^2)i L5.5c)</pre>	<pre>Angle : Rad Answer type : Real Display : Fix4 Real(x^2)</pre>	<pre>sqrt(x^2) ixi L5.5f)</pre>
<pre>sqrt(-49) 7i L5.5a)</pre>	<pre>sqrt(-1/9) i/3 L5.5d) i· x·y e) 7i· a </pre>	<pre>sqrt(-48)*sqrt(-75)+sqrt(-27) 12sqrt(3)i L5.5f)</pre>	
<pre>sqrt(-12)+sqrt(-8)+sqrt(-6) sqrt(15)i/5+2sqrt(3)i+2sqrt(2)i L5.5g)</pre>	<pre>approx Ans 0.0000+7.0671i L5.6a)</pre>	<pre>sqrt(-3)*sqrt(-3) -3 L5.6a)</pre>	<pre>sqrt(-2)*sqrt(-8) -4 L5.6b)</pre>

L5.6c) Fallunterscheidung: $a \cdot b \geq 0 \Rightarrow i \cdot (a \cdot b)^{1/2}$, $a \cdot b < 0 \Rightarrow \text{sgn}(b) \cdot |a \cdot b|^{1/2}$.

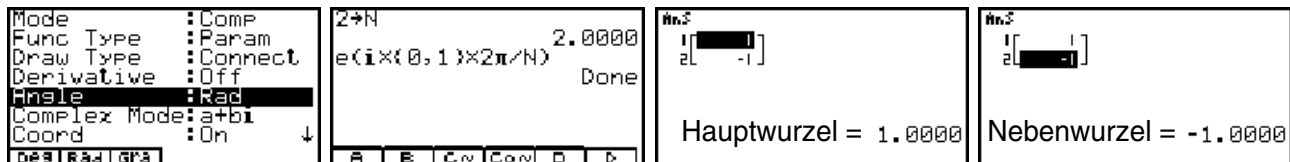
L5.6d) Fallunterscheidung für $a \neq 0$: $a > 0 \Rightarrow i/a^{1/2}$, $a < 0 \Rightarrow 1/|a|^{1/2}$.

L5.6e) $i \cdot \text{sgn}(y-x)$ für $x \neq y$. **L5.6f)** $i \cdot |a-b|$. **L5.6g)** $-6 \cdot 3^{1/2}/|a|$.

<pre>12÷N Seq(X-1,X,1,N,1)→List 1 L5.7: N=12 Done LIST/MAT/CPX/CALC/HUM ></pre>	<pre>e(iList 1x2π/N)→List 2 ReP List 2→List 3 Done Imp List 2→List 4 Done LIST/MAT/CPX/CALC/HUM ></pre>	<pre>Mode : Comp Func Type : Param Draw Type : Connect Derivative : Off Angle : Deg Complex Mode: re^θi Coord : On Dsp Rad/Gra</pre>	<pre>Ans 1 1 2 0.999 3 0.999 4 1.000 5 0.999 1.0000e30.0000i</pre>
--	--	--	--



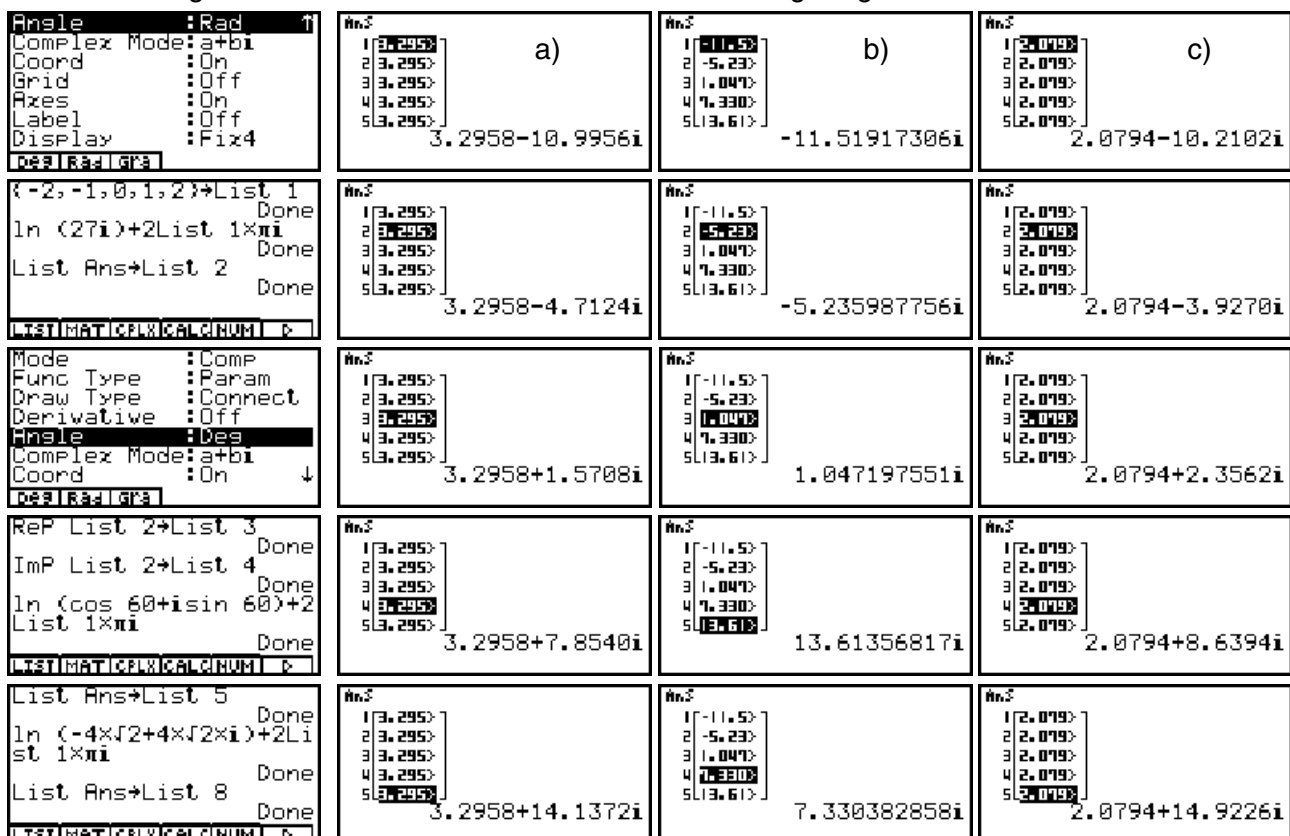
Der Index $k = 0, 1, 2, \dots, N$ des Winkelraumes wurde als Zahlenfolge in **List1** abgespeichert. **List2** enthält die Wurzelwerte. Als Hintergrundgraphik wurde wieder der Einheitskreis verwendet, vgl. **L 5.1**. Die folgenden Bilder betreffen den Fall $N = 2$. Die anderen Lösungen überlegt man sich entsprechend.



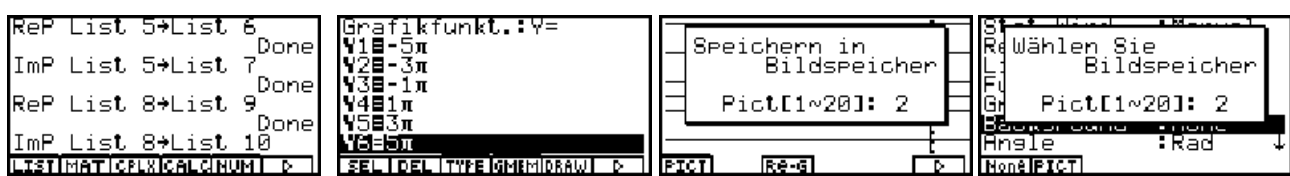
L5.8: Hierzu erfolgen keine gesonderten Lösungen, die teilweise schon in **L5.4** mit angegeben wurden.

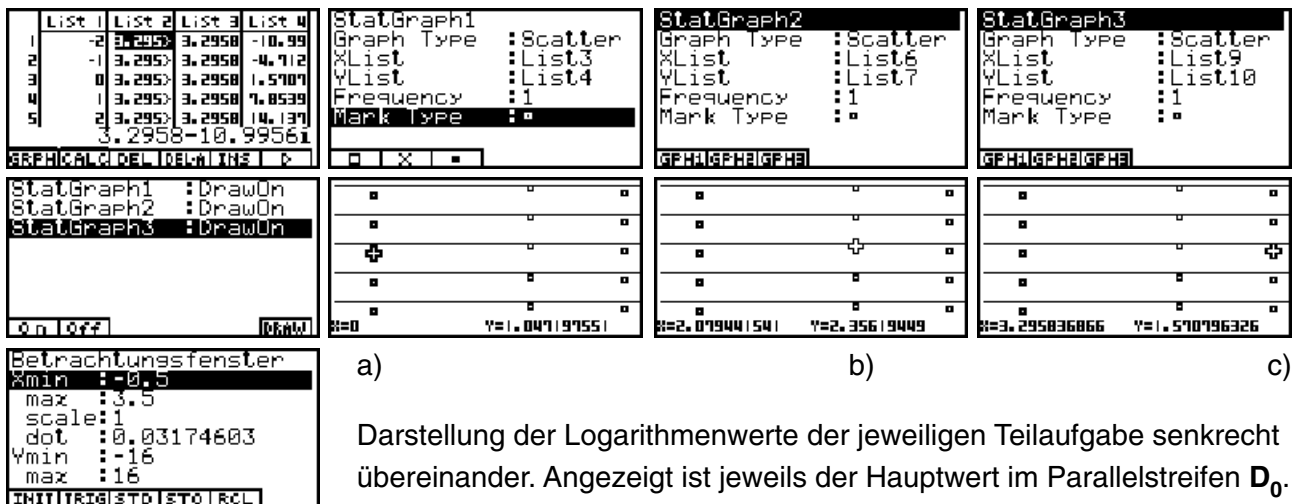
Kapitel 6:

L6.1: Die Lösungsstrategie sieht hier folgendermaßen aus: Die Indizes (Blattnummern für z , bzw. Parallelstreifenindex für $w = \ln z$) werden in **List1** abgespeichert. Die Logarithmen zu a) in **List2**, deren Real- bzw. Imaginärteil in **List3** bzw. **List4**, zu b) entsprechend in **List5** bis **List7** und zu c) entsprechend in **List8** bis **List10** (Im **RUN·MAT**-Menü). Damit können am Ende alle Ergebnisse in einem(!) Scatterplot (**STAT**-Menü) angezeigt werden. Als Hintergrundbild (im **GRPH·TBL**-Menü erzeugt) werden die entsprechenden Parallelstreifen gezeigt, so dass die Lage der jeweiligen Einzelwerte im richtigen Parallelstreifen mit **TRACE** unmittelbar abgefragt werden kann.

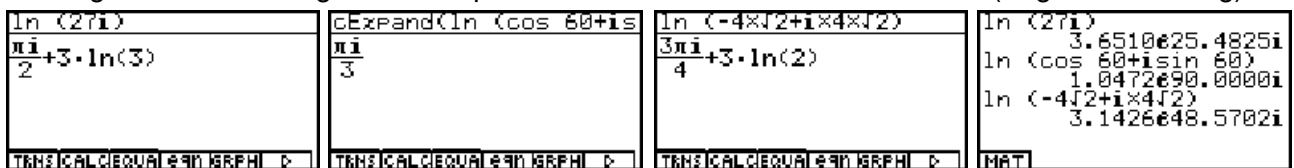


Ansicht der Ergebnisse im **List-Ans**-Speicher, dann Vorbereitung der Hintergrundgraphik:

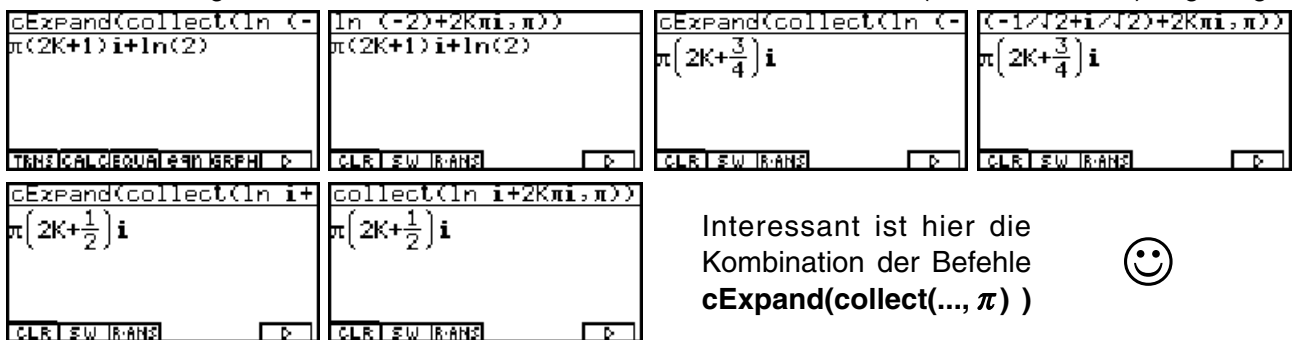




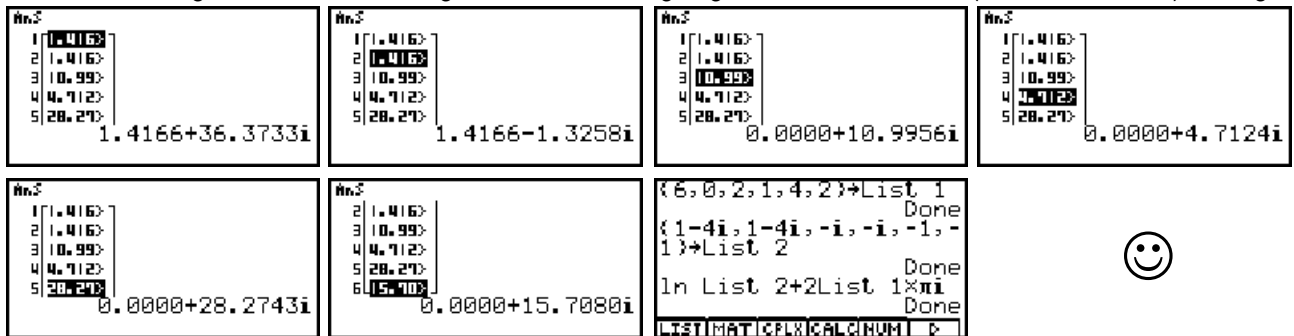
Die folgenden Bilder zeigen die Hauptwerte im **CAS**- bzw. **RUN·MAT**-Menü (Altgradeinstellung):



L6.2: Die Lösungen werden im **CAS**-Menü unter Hinzunahme von $k \cdot 2\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) angezeigt:



L6.3: Die Lösungen werden sofort insgesamt durch eine geeignete Listenarithmetik (**RUN·MAT**-Menü) erzeugt:



L6.4: Die Lösungen zu a) und b) werden angegeben (**CAS**-Menü), weitere Lösungen ergeben sich analog:



Lösungshinweise - Kapitel 6

L6.5: Die Lösung a) wird dargestellt (**CAS**-Menü). Weitere Lösungen ergeben sich analog.

$\text{GExpand}(\ln(-5+12i)+2\pi k\pi)$ $(-\tan^{-1}(\frac{12}{5})+2\pi k\pi)i+\ln(13)$	$\ln(-5+12i)+2K\pi i$ $(\frac{12}{5})+2\pi k\pi)i+\ln(13)$	$\text{GExpand}(\ln(-5+12i)+0)$ $(-\tan^{-1}(\frac{12}{5})+\pi)i+\ln(13)$	approx Ans $2.5649+1.9656i$
CLR EW R-ANS	CLR EW R-ANS	CLR EW R-ANS	THNS CALC EQVA EQN MRPH

L6.6: Die Darstellungen wurden z.T. bereits in L6.3 angegeben. Weitere Umformungen sind etwa folgende:

Angle :Rad Complex Mode:re^8i Coord :On Grid :Off Axes :Off Label :Off Display :Fix4 RES SW R-ANS	{6,0,2,1,4,2}+List 1 Done {1-4i,1-4i,-i,-i,-1,-1}+List 2 Done $\ln \text{List 2}+2\text{List 1}\times\pi i$ $\ln e^{8i}$	Ans 1 35.409 2 1.940 3 10.99 4 4.712 5 28.27 6 15.708 36.4009e1.5319i	Ans 2 1.940 3 10.99 4 4.712 5 28.27 6 15.708 15.7080e1.5708i
RES SW R-ANS	LIST MAT CPLX CALC RUN		

L6.7: Die Aufgabe besitzt wegen der Periodizität der komplexen **e**-Funktion unendlich viele Lösungen, die im **CAS**-Menü nicht erhalten werden können. Formal ist $z = \ln(e^{3-4i}) = \text{„Hauptwert“} + \text{„Periodizität“}$.

Die ersten Bilder zeigen den Hauptwert $z = \ln(e^{3-4i}) = 3-4i+3\cdot 2\pi i = 3+2,283185307i$ an:

$e^{(3-4i)}$ -13.12878308 +15.20078446i $\ln \text{Ans}$ 3+2.283185307i	$\text{approx } e^{(3-4i)}$ -13.12878308+15.20078446i	$\text{approx } \ln \text{Ans}$ 3+2.283185307i	$\text{approx } \ln(e^{(3-4i)})$ 3+2.283185307i
LIST MAT CPLX CALC RUN	THNS CALC EQVA EQN MRPH	THNS CALC EQVA EQN MRPH	THNS CALC EQVA EQN MRPH

Ohne **approx**-Befehl unterscheiden sich die angezeigten Ergebnisse im **RUN**·**MAT**-Menü und **CAS**-Menü: Während im **RUN**·**MAT**-Menü sofort der Hauptwert angezeigt wird, erhält man für z im **CAS**-Menü lediglich einen Nebenwert. Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Hinzunahme der „Periodizität“ mit $k\cdot 2\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$\ln(e^{(3-4i)})$ 3+2.283185307i	$\ln(e^{(3-4i)})$ 3-4i	$\text{solve}(e^z=e^{(3-4i)}, z)$ Z=3-4i	$\text{solve}(e^z=e^{(3-4i+2K\pi i)})$ Z= $\ln(e^{2\pi Ki+3-4i})$
LIST MAT CPLX CALC RUN	THNS CALC EQVA EQN MRPH	THNS CALC EQVA EQN MRPH	THNS CALC EQVA EQN MRPH

L6.8 und L6.9: Die Gleichungen definieren die hyperbolischen Funktionen $w = \sinh z$ bzw. $w = \cosh z$:

$\text{expand}(\text{trigToExp}(\text{GExp}(e^{x+yi})))$ $\frac{e^{x+yi} - e^{-x-yi}}{2}$	$\text{GExpand}(\sinh(x+iy))$ $\frac{e^{x+yi} - e^{-x-yi}}{2}$	$\text{expand}(\text{trigToExp}(\text{GExp}(e^{x+yi})))$ $\frac{e^{x+yi} + e^{-x-yi}}{2}$	$\text{GExpand}(\cosh(x+iy))$ $\frac{e^{x+yi} + e^{-x-yi}}{2}$
CO Abs Z Sign HYP FMEH	CO Abs Z Sign HYP FMEH	THNS CALC EQVA EQN MRPH	CLR EW R-ANS
$\text{solve}(w=(e^z-e^{-z})/2, z)$ Z= $\ln\left(\frac{w+\sqrt{4w^2+4}}{2}\right)$ w= $\ln\left(\frac{w+\sqrt{4w^2+4}}{2}\right)$	$\text{solve}(w=(e^z-e^{-z})/2, z)$ Z= $\ln\left(\frac{w+\sqrt{4w^2+4}}{2}\right)$	$\text{solve}(w=(e^z+e^{-z})/2, z)$ Z= $\ln\left(\frac{w+\sqrt{4w^2-4}}{2}\right)$ w= $\ln\left(\frac{w+\sqrt{4w^2-4}}{2}\right)$	$\text{solve}(w=(e^z+e^{-z})/2, z)$ Z= $\ln\left(\frac{w+\sqrt{4w^2-4}}{2}\right)$
THNS CALC EQVA EQN MRPH	THNS CALC EQVA EQN MRPH	THNS CALC EQVA EQN MRPH	THNS CALC EQVA EQN MRPH

eqn(1) ist im Reellen nicht definiert, **eqn(2)** = **arsinh** w . Hier definiert **eqn(2)** die Umkehrfunktion $z = \text{arcosh } w$.

Rechnung „per Hand“ mit der Substitution $e^z = A$ ($A > 0$, im Reellen) und Auswertung der quadratischen Gleichung:

$w = (A-1/A)/2$ $A = \frac{1}{2}$	$\text{solve}(\text{eqn(1)}, A)$ $A = \frac{\sqrt{4w^2+4}}{2}$ $w = \frac{\sqrt{4w^2+4}}{2}$	$w = (A+1/A)/2$ $A = \frac{1}{2}$	$\text{solve}(\text{eqn(4)}, A)$ $A = \frac{\sqrt{4w^2-4}}{2}$ $w = \frac{\sqrt{4w^2-4}}{2}$
THNS CALC EQVA EQN MRPH	THNS CALC EQVA EQN MRPH	CLR EW R-ANS	THNS CALC EQVA EQN MRPH

Anmerkung: **CAS** kürzt den Faktor 2 in Zähler und Nenner nicht heraus.

Kapitel 7:

L7.1: Die Umformung $\text{Abs } z = (z^2)^{1/2}$ gilt nur im Reellen. Im Komplexen gilt $\text{Abs } z = (z \cdot \text{conj } z)^{1/2}$.

Kapitel 8:

L8.1: a) Der Hauptwert in **RUN·MAT**-Menü und dann im **CAS**-Menü:

$(1-i)^{(1+i)}$ 2.807879297 -1.317865173i	Ansle :Rad Answer type :Complex Display :Norm1	Expand((1-i)^(1+i)) $\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\ln(2)}{2}\right) - \sqrt{2}$	approx Ans 2.8078793-1.3178652i
simplify(Expand(e((1-i)^(1+i)))) $\sqrt{2} e^{-2\pi k + \frac{\pi}{4}} \left(\cos\left(2\pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + i \sin\left(2\pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \right)$	e((ln(1-i)+2Kπi)(1+i)) $\left(\cos\left(2\pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}\right) + i \sin\left(2\pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}\right) \right) \cdot i$	ln(1-i)+2Kπi $\ln(1-i) + 2K\pi i$	e((ln(1-i)+2Kπi)i) $e^{-2\pi k}$ b)
simplify(Expand(e((1-i)^(1+i)))) c)	e((ln(1-i)+2Kπi)(1-i)) $\left(\cos(2\pi k) \cdot i - \sin(2\pi k) \right)$	Die Nebenwerte entstehen durch Hinzufügen der „Periodizität“ mit $k \cdot 2\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)	😊

L8.2: a) $\text{Abs } w_k = 2^{1/2} \cdot e^{-2k+\pi/4}$ und $\text{Arg } w_k = \ln(2)/2 - \pi/4$

b) $\text{Abs } w_k = e^{-2k\pi}$ und $\text{Arg } w_k = 0$

c) $\text{Abs } w_k = e^{2\pi(1+4k)}$ und $\text{Arg } w_k = \pi/2$

Betrag und Hauptargument wurden in L8.1 abgelesen.

Ans ((1-i)^(1+i)) ln(1-i) Ans (i^(1-i))	-0.4388246 -0.4388246 1.5707963
---	---------------------------------------

L8.3: Mit L8.2 erhält man $\text{Re } w_k = \text{Abs } w_k \cdot \cos w_k$ bzw. $\text{Im } w_k = \text{Abs } w_k \cdot \sin w_k$.

L8.4: Die vorhandene Speicherkapazität kann beim symbolischen Rechnen überschritten werden („Speicherfehler“). Im **SYSTEM**-Menü kann nicht benötigter Speicherplatz freigegeben werden.

Speicherfehler Drücken Sie: [ESC]	2Kπi+Q 2Kπi	Expand(1/(A+i)) $\frac{-i}{A^2+1} + \frac{A}{A^2+1}$	Expand(1/(1+Bi)) $\frac{1}{B^2+1} - \frac{Bi}{B^2+1}$
Expand(e((ln(1+i)+Q))) $\frac{1}{2^2(A^2+1)} e^{(2\pi k + \frac{\pi}{4})} (A^2+1)$	e((ln(1+i)+Q)P) $\frac{1}{(A^2+1)^{-1}} \cdot \cos\left(\frac{(2\pi k + \frac{\pi}{4})A}{A^2+1}\right)$	Expand(e((ln(1+i)+Q))) $\frac{1}{2^2(B^2+1)} e^{(2\pi k + \frac{\pi}{4})} (B^2+1)$	e((ln(1+i)+Q)R) $\frac{1}{(B^2+1)^{-1}} \cdot \cos\left(\frac{(2\pi k + \frac{\pi}{4})B}{B^2+1}\right)$

Dem Leser bleibt es überlassen, sich die angedeuteten Formelstrukturen selbst ausführlich darzustellen.

Kapitel 9:

L9.1: cExpand liefert die umfangreichste Zerlegung:

Expand(sin(re(θi))) $\cosh(r \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(r \cdot \cos(\theta))$	Expand(sin(re(θi))) $\sin(r \cdot \cos(\theta)) + \sinh(r \cdot \sin(\theta))$	Expand(sin(re(θi))) $\sin(\theta) \cdot \cos(r \cdot \cos(\theta))$	ExpToTrig(sin(re(θi))) $\frac{1}{2} (e^{i r \cos(\theta)} - e^{-i r \cos(\theta)})$
---	---	--	--

L9.2: Wegen der begrenzten Mantissenlänge beim numerischen Rechnen (RUN·MAT-Menü) erhält man nur im **CAS**-Menü das richtige Ergebnis:

```

sin Z
-6.805850799E+42
+1.159007071E+43i
(sin Z)^2
-8.801013399E+85
-1.57760584E+86i

```

```

100+100i+Z
100+100i

```

```

Simplify((sin Z)^2+(cos
1

```

```

100+100i+Z
100.0000+100.0000i
(sin Z)^2+(cos Z)^2
0.0000

```

```

cos Z
-1.57760584E+86i
1.159007071E+43
+6.805850799E+42i
(cos Z)^2
8.801013399E+85
+1.57760584E+86i

```

L9.3: Berechnung im **CAS**-Menü:

```

sin (pi/2+i)
cosh(1)

```

```

approx Ans
1.5431

```

```

cos (pi/2+i)
-sinh(1)i

```

```

approx Ans
0.0000-1.1752i

```

```

sin (pi/2+i ln 3)
cosh(ln(3))

```

```

approx Ans
1.6667

```

```

trigToExp(sin (pi/2+i
5
3

```

```

trigToExp(cos (pi/2+i
-4i
3

```

L9.4: Symbolische Umformungen im **CAS**-Menü:

```

expToTris(sinh (iZ)/i
sin(Z)

```

```

trigToExp(sinh (iZ)/i
-(e^Zi-e^-Zi)i
2

```

```

expToTris(Ans)
sin(Z)

```



```

cExpand(cosh (iZ))
cos(Z)

```

```

trigToExp(cosh (iZ))
e^Zi+e^-Zi
2

```

```

expToTris(Ans)
cos(Z)

```

L9.5: Umformung und Berechnung im **CAS**-Menü:

```

100+100i+Z
100+100i

```

```

tCollect(sin ZXcos Z)
sin(200+200i)
2

```

```

approx Ans
-1.57760584E+86+8.801013399E+85i

```

```

approx Ans
+86+8.801013399E+85i

```

L9.6: Zerlegung im **CAS**-Menü. Hierbei ist w der konjugiert komplexe Term zu z :

```

tan (X+Yi)+Z
tan(X+Yi)

```

```

(Abs tan (X+Yi))^2/tan
(i tan(X+Yi))^2
tan(X+Yi)

```

```

(X+Yi)^2/tan (X+Yi)+W
(i tan(X+Yi))^2
tan(X+Yi)

```



```

(Z+W)/Z+R
tan(X+Yi)+(i tan(X+Yi)
2

```

```

cExpand(R)
sin(X)·cos(X)
(cos(X))^2+(sinh(Y))^2

```

```

(Z+W)/(Zi)+I
-(tan(X+Yi)-(i tan(X+Yi)
2

```

```

cExpand(I)
sinh(Y)·cosh(Y)
(cos(X))^2+(sinh(Y))^2

```

Wie bereits an anderer Stelle praktiziert, lassen sich der konjugiert komplexe Term, sowie der Real- und Imaginärteil im **CAS**-Menü unkompliziert symbolisch darstellen.

Kapitel 10:

L10.1: Die Überprüfung der dargestellten Formeln bleibt dem Leser überlassen.

L10.2: Es ergeben sich unter Beachtung der Periodizität $k \cdot 2\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) im Realteil von z unendlich viele Lösungen. Die Periodizität wird hier im **CAS**-Menü sofort berücksichtigt!

$\text{solve}(\cos z = 5/3, z)$ $Z = \cos^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) - 2\pi k$ $Z = -\cos^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) + 2\pi k$	$\text{CExpand}(\text{eqn}(1))$ $Z = -2\pi k + \ln(3) \cdot i$	$\text{CExpand}(\text{eqn}(2))$ $Z = 2\pi k - \ln(3) \cdot i$	$\text{solve}(\sin z = -5/3, z)$ $Z = -\sin^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) + 2\pi k$ $Z = \sin^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) + 2\pi k + \pi$
TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/
$\text{CExpand}(\text{eqn}(3))$ $Z = 2\pi k - \frac{\pi}{2} + \ln(3) \cdot i$	$\text{CExpand}(\text{eqn}(4))$ $Z = 2\pi k + \frac{3\pi}{2} - \ln(3) \cdot i$	$\text{solve}(\cosh(z) = 5/3, z)$ $Z = \cosh^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) - 2\pi k$ $Z = -\cosh^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) + 2\pi k$	$\text{solve}(\sinh(z) = -5/3, z)$ $Z = -\sinh^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) + 2\pi k$ $Z = \sinh^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) + 2\pi k + \pi$
TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	CO/Ans/X/ SIN/HYP/FMEM/	CO/Ans/X/ SIN/HYP/FMEM/

In den letzten beiden Bildern wurden die Zusammenhänge der Aufgaben 9.4 a) und c) ausgenutzt.

L10.3: Darstellung der Lösungen im **CAS**-Menü:

$\text{CExpand}(\cos^{-1}(-2 + \sqrt{2} \times i))$ $\ln\left(\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{33}+1)}{2} - 2\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right)$	approx Ans $2.485 - 1.577i$	$\text{CExpand}(\sin^{-1}(-2 + \sqrt{2} \times i))$ $-\ln\left(\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{33}+1)}{2} - 2\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right)$	approx Ans $-0.915 + 1.577i$
TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/

Kapitel 11:

Hier sind keine Lösungshinweise notwendig.

Kapitel 12:

L12.1: Eine exakte komplexe Lösung kann hier im **CAS**-Menü mit **solve(...)** nicht unmittelbar erhalten werden. Deshalb wird der Formelterm **A** mittels des konjugiert komplexen Formelterms **B** in seinen Realteil **R** (vereinfacht dann **C**) und seinen Imaginärteil **I** (vereinfacht dann **D**) zerlegt. **C = 0** wird nach **Y** aufgelöst (**eqn(1)** bzw. **eqn(2)**) und in **D = 0** eingesetzt. Jedoch können auch die nichtlinearen reellen Gleichungen nicht mit **solve(...)** im **CAS**-Menü exakt aufgelöst werden, so dass eine Näherungslösung im **EQUA**-Menü ermittelt werden muß:

$\frac{x+yi+2}{x+yi}$	$\frac{z^3-3z^2-7+A}{(x+yi)^3-3(x+yi)^2-7}$	$\frac{(A+B)^2/A+B}{((x+yi)^3-3(x+yi)^2-7)} \cdot \frac{(x+yi)^3-3(x+yi)^2-7}{(x+yi)^3-3(x+yi)^2-7}$	$\frac{(A+B)/2+R}{((x+yi)^3-3(x+yi)^2-7)} \cdot \frac{(x+yi)^3-3(x+yi)^2-7}{(x+yi)^3-3(x+yi)^2-7}$											
TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	CO/Ans/X/ SIN/HYP/FMEM/	CO/Ans/X/ SIN/HYP/FMEM/											
$\text{Simplify}(\text{CExpand}(R))+A$ $x^3-3x^2+(-3x+3)y^2-7$	$\text{CExpand}(R)+C$ $x^3-3x^2+(-3x+3)y^2-7$	$\frac{(A-B)/(2i)+i}{((x+yi)^3-3(x+yi)^2-7)} \cdot \frac{(x+yi)^3-3(x+yi)^2-7}{(x+yi)^3-3(x+yi)^2-7}$	$\text{Simplify}(\text{CExpand}(I))+D$ $3x^2y-6xy-y^3$											
TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	CLR/EW/RANS/	CLR/EW/RANS/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/											
$\text{CExpand}(I)+D$ $3x^2y-6xy-y^3$	$\text{solve}(\{C=0,D=0\},\{X,Y\})$ $\text{solve}(x^3-3x^2+(-3x+3)y^2-7=0,3x^2y-6xy-y^3=0)$	$\text{solve}(C=0,Y)$ $y=\frac{-\sqrt{-x^3+3x^2+7}-\sqrt{-3x+3}}{\sqrt{-x^3+3x^2+7}}$	$\text{eliminate}(D=0,Y,\text{eqn}(1))$ $-3\sqrt{-x^3+3x^2+7}x^2+6\sqrt{-x^3+3x^2+7}-3x+3=0$											
CLR/EW/RANS/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/	TAN/CALC/EQUA/eqn/WRPH/											
$\text{eliminate}(D=0,Y,\text{eqn}(2))$ $3\sqrt{-x^3+3x^2+7}x^2-6\sqrt{-x^3+3x^2+7}-3x+3=0$	Gleichung Typ wählen F1: Gleichzeitig F2: Polynomial F3: Lösung SOLV/POLYSOLV	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ <table><tr><td>c</td><td>1</td><td>-3</td><td>0</td><td>-7.000</td></tr></table>	c	1	-3	0	-7.000	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ <table><tr><td>1</td><td>3.5541</td></tr><tr><td>2</td><td>-0.277+1.375i</td></tr><tr><td>3</td><td>-0.277-1.375i</td></tr></table> <div>3.554149219</div>	1	3.5541	2	-0.277+1.375i	3	-0.277-1.375i
c	1	-3	0	-7.000										
1	3.5541													
2	-0.277+1.375i													
3	-0.277-1.375i													
CLR/EW/RANS/	EDIT/DEL/CLR/	SOLV/	REPT/											

Lösungshinweise - Kapitel 12

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ <pre> 1 3.5541 2 -0.2770746093 3 -0.2770746093 -0.2770746093 +1.3757758621 REPT </pre>	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ <pre> 1 3.5541 2 -0.2770746093 3 -0.2770746093 -0.2770746093 +1.3757758621 REPT </pre>	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ <pre> 1 3.5541 2 -0.2770746093 3 -0.2770746093 -0.2770746093 +1.3757758621 REPT </pre>	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ <pre> 1 3.5541 2 -0.2770746093 3 -0.2770746093 -0.2770746093 +1.3757758621 REPT </pre>
$ax^3+bx^2+cx+d=0$ <pre> 1 3.5541 2 1.403399092 3 1.403399092 1.403399092 e-101.38677611 REPT </pre>	$3.554149219+E$ <pre> 3554149219 1000000000 CLR SW TRANS </pre>	$746093+1.3757758621+E$ <pre> 2770746093 68788783 10000000000 + 50000000 CLR SW TRANS </pre>	$746093-1.3757758621+E$ <pre> 2770746093 68788783 10000000000 50000000 CLR SW TRANS </pre>

Die Lösungen (eine reelle und ein Paar komplexer / konjugiert komplexer Zahlen), dargestellt in arithmetischer und exponentieller Darstellung (Winkelmodus Altgrad), wurden dann im **CAS**-Menü in **E**, **F** und **G** abgespeichert. **W** ist die Polynomvariable, **H** das quadratische reelle Polynom. Schließlich wird unter **J** das Gesamtpolynom **(W-E)(W-F)(W-G)** symbolisch berechnet und abgespeichert, vereinfacht und mit der Ausgangsaufgabe verglichen, um festzustellen, wie gut die Näherungslösung einer Faktorisierung der Ausgangssituation entspricht:

$\text{Simplify}((W-F)(W-G))+H$ $W^2 + 2770746093W + 196952500000000 + 100000$	$\text{Simplify}((W-F)(W-G))+H$ 196952901127028589049 1000000000000000000000	$\text{Simplify}((W-E)H)+J$ $\left(\frac{W-3554149219}{1000000000}\right)\left(W^2 + 2770746093W + 196952500000000 + 100000\right)$	$\text{expand}(J)$ $W^3 - \frac{75000000001W^2}{2500000000} + \frac{196952901127028589049W}{1000000000} - 1000000000000000000000$
$\text{expand}(J)$ $122636438291W^2 + 6999999999720412879559W - 1000000000000000000000$	$\text{expand}(J)$ $6999999999720412879559W^2 - 1000000000000000000000$	$\text{expand}(J)$ $720412879559175302731W^2 - 2000000000000000000000$	<p>Der Koeffizient des quadratischen Terms 75,000.000.01/25 ist praktisch exakt.</p>

Der Koeffizient des quadratischen Terms **75,000.000.01/25** ist praktisch exakt.

Der zusätzliche lineare Term hat den Koeffizienten $1,226 \cdot 10^{-9}$ und ist damit vernachlässigbar. Das Absolutglied ist praktisch auch korrekt $6,999.999.9972$ mit einer Toleranz von $3 \cdot 10^{-9}$. Interessant ist die Darstellung des Absolutgliedes als Bruch mit Zahlen aus jeweils **30** Ziffern.

L12.2: Im nächsten Beispiel ergibt der **factor(...** - Befehl keine reelle Faktorisierung, so dass zwei komplexe Faktoren zunächst herausgekürzt werden, um zwei Faktoren mit einem Paar komplexer / konjugiert komplexer Nullstellen zu einem reellen quadratischen Faktor ausmultiplizieren zu können:

$\text{rFactor}(Z^4+16=0)$ $(Z+(-1-i)\sqrt{2})(Z+(-1+i)\sqrt{2})$	$\text{getRight}(\text{exchange}(\text{eqn}(1))) \rightarrow W$ $(Z+(-1-i)\sqrt{2})(Z+(-1+i)\sqrt{2})$	$\text{exchange}(\text{eqn}(1)) \rightarrow W$ $\sqrt{2}(Z+(-1+i)\sqrt{2})(Z+(-1-i)\sqrt{2})$	$\text{exchange}(\text{eqn}(1)) \rightarrow W$ $Z+(-1-i)\sqrt{2})(Z+(-1+i)\sqrt{2})$
$W / ((Z+(-1-i)\sqrt{2})(Z+(-1+i)\sqrt{2}))$ $(Z+(-1-i)\sqrt{2})(Z+(-1+i)\sqrt{2})$	$-i\sqrt{2}(Z+(-1+i)\sqrt{2}) + 8$ $(-1-i)\sqrt{2})(Z+(-1+i)\sqrt{2})$	$\text{expand}(S)$ $Z^2 - 2\sqrt{2}Z + 4$	$W/S \rightarrow T$ $(Z+(-1-i)\sqrt{2})(Z+(-1+i)\sqrt{2})$
$\text{expand}(T)$ $Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4$	$\text{expand}(S \times T)$ $Z^4 + 16$	<p>Zum Schluß wurden die reellen quadratischen Faktoren S und T noch einmal ausmultipliziert, um das Ausgangspolynom 4. Grades zu erhalten (Rechenkontrolle).</p>	

Zum Schluß wurden die reellen quadratischen Faktoren **S** und **T** noch einmal ausmultipliziert, um das Ausgangspolynom 4. Grades zu erhalten (Rechenkontrolle).

L12.3: Das Polynom 7. Grades lässt sich im **CAS**-Menü unkompliziert faktorisieren:

$\text{rFactor}(Z^7+3Z^6+5Z^5+3Z^4-2Z^3-5Z^2-4Z-2=0)$ $(Z-1)(Z+1-i)(Z+1+i)$	$+3Z^4-2Z^3-5Z^2-4Z-2=0$ $\left(Z+\frac{-\sqrt{3}i+1}{2}\right)^2\left(Z+\frac{\sqrt{3}i+1}{2}\right)$	$+3Z^4-2Z^3-5Z^2-4Z-2=0$ $\frac{\sqrt{3}i+1}{2}^2\left(Z+\frac{\sqrt{3}i+1}{2}\right)^2=0$
---	--	--

L12.4: Die Rechnung erfolgt hier in kleineren Teilschritten, da es sonst zu Speicherfehlern (Speicherüberlauf) kommt. Die Nullstellen sind in exponentieller Darstellung (Winkelmodus Altgrad) vorgegeben.

Wichtiger Hinweis: Jegliche Winkleingaben in der exponentiellen Darstellung werden stets als Bogenmaß interpretiert, unabhängig von der **SET UP** Einstellung! Nur unmittelbar in trigonometrische Funktionen kann eine Winkleingabe in Altgrad erfolgen! Andererseits kann im **RUN·MAT**-Menü eine Ergebnisanzeige (exponentielle Darstellung) sehr wohl in Altgrad erfolgen, aber eben die Eingabe selbst nicht!

Ansle :Des Answer type :Complex Display :Norm1	$(Z-2e^{36i})(Z-2e^{-36i})$	$(Z-3e^{45i})(Z-3e^{-45i})$	$-.5e^{60i})(Z-.5e^{-60i})$
DESI Rad	CLR EW RANG	CLR EW RANG	CLR EW RANG
$60i)(Z-.5e^{-60i})+P$	Expand(P)	collect(P,Z)	
$i)\left(\frac{Z-e^{-60i}}{2}\right)\left(\frac{Z-e^{60i}}{2}\right)$	$Z^6 + \frac{53Z^4}{4} + \frac{157Z^2}{4} - 3e^{141i}Z$	$Z^6 + \left(\frac{-e^{60i}}{2} - 3e^{45i} - 2e^{36i}\right)$	
CLR EW RANG	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	

Es werden Faktorpaare aus komplexen / konjugiert komplexen Nullstellen gebildet. Das Polynom 6. Grades wird in **P** abgespeichert und mit **collect(P,Z)** vereinfacht. Die Winkel erscheinen formal in Altgrad, obwohl sie der Rechner als Bogenmaß interpretiert, wie die folgenden Bilder zeigen:

$e^{36i})(Z-2e^{-36i})+H$	Simplify(ExpToTris(H)	$45i)(Z-3e^{-45i})+B$	Simplify(CExpand(B))
$(Z-2e^{-36i})(Z-2e^{36i})$	$Z^2 - 4 \cdot \cos\left(\frac{6480}{\pi}\right) \cdot Z + 4$	$(Z-3e^{-45i})(Z-3e^{45i})$	$Z^2 - 6 \cdot \cos\left(\frac{8100}{\pi}\right) \cdot Z + 9$
CLR EW RANG	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI
$60i)(Z-.5e^{-60i})+C$	Simplify(CExpand(C)	Ansle :Rad	Simplify(CExpand(H)+D
$\left(\frac{Z-e^{-60i}}{2}\right)\left(\frac{Z-e^{60i}}{2}\right)$	$Z^2 - \cos\left(\frac{10800}{\pi}\right) \cdot Z + \frac{1}{4}$	Answer type :Complex Display :Norm1	$Z^2 - 4 \cdot \cos(36) \cdot Z + 4$
TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	DESI Rad	TRNICALCEQUA EQN MRPFI

Die Umschaltung auf Bogenmaß (Rad im **SET UP**) bringt die korrekten quadratischen Faktoren hervor, die in **D**, **E**, **F** und **G = D·E** abgespeichert werden und dabei **cos**-Terme mit den korrekten Winkeangaben (in Altgrad) enthalten. Der Rechner hat die Winkelangaben der **e**-Funktion nicht umgerechnet, da Bogenmaß eingestellt war (etwas verwirrend, aber nachvollziehbar).

Simplify(CExpand(B)+E	Simplify(CExpand(C)+F	collect(DxE,Z)+G	Ansle :Des
$Z^2 - 6 \cdot \cos(45) \cdot Z + 9$	$Z^2 - \cos(60) \cdot Z + \frac{1}{4}$	$Z^4 + 36 \cdot (\cos(36))^2 \cdot (\cos$	Answer type :Complex Display :Norm1
TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	CLR EW RANG	DESI Rad

Wird nun, nachdem die Winkelangaben korrekt in den **cos**-Termen stehen, auf Altgrad umgeschaltet, interpretiert der Rechner im nächsten Umformungsschritt die Winkel korrekt als Altgradangaben.

Die letzten sechs Bilder enthalten das gesuchte Polynom 6. Grades:

Simplify(collect(F,Z)	collect(F,Z)+H	Simplify(collect(GXH,	Simplify(collect(GXH,
$Z^2 - \frac{Z}{2} + \frac{1}{4}$	$Z^2 - \frac{Z}{2} + \frac{1}{4}$	$Z^6 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{4} + \frac{9\sqrt{5}}{2} + \frac{27\sqrt{2}}{4} + \frac{175}{4}\right)Z^2$	$\left(\frac{3\sqrt{10}}{4} + \frac{9\sqrt{5}}{2} + \frac{27\sqrt{2}}{4} + \frac{175}{4}\right)Z^2$
TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI
Simplify(collect(GXH,	Simplify(collect(GXH,	Simplify(collect(GXH,	Simplify(collect(GXH,
$-\frac{3\sqrt{10}}{2} - \frac{37\sqrt{5}}{4} - \frac{57\sqrt{2}}{4} - \frac{63}{4})Z^3 +$	$\left(\frac{-9\sqrt{5}}{4} - 3\sqrt{2} - \frac{81}{4}\right)Z + (3\sqrt{10} +$	$\left(3\sqrt{10} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{55}{4}\right)Z^4 + (-$	$5)Z^4 + \left(-\sqrt{5} - 3\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)Z^5 + 9$
TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI	TRNICALCEQUA EQN MRPFI

Kapitel 13:

L13.1: Im Periodizitätsintervall $-1 < x < 1$ ($x \neq 0$) kann $f(x)$ durch $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \end{cases}$ dargestellt werden. Die Periodenlänge T beträgt $T=2$, d.h. $\omega = 2\pi/T = \pi$.

$$c_k = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ikx\omega} dx = 1/2 \int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \cdot e^{-ik\pi x} dx = 1/2 \cdot \left(\int_{-1}^0 -1 \cdot e^{-ik\pi x} dx + \int_0^1 1 \cdot e^{-ik\pi x} dx \right)$$

Ansage :Rad
Answer Type :Complex
Display :Norm1

1/2X(J(sgnum(X)X(-KpiX),X,0,1))
1
-1
(e^-piKXi.sgnum(X))
2

X)X(-KpiX),X,-1,1)
(e^-piKXi.sgnum(X)) dx
2

1/2X(J(-1Xe(-KpiX),X,
-2i+e^piKi+e^-piKi
piK+piK+piK
2

X,-1,0)+J(1Xe(-KpiX),
-2i+e^piKi+e^-piKi
piK+piK+piK
2

1Xe(-KpiX),X,0,1))+C
-2i+e^piKi+e^-piKi
piK+piK+piK
2

simplify(cExpand(C))
(cos(piK)-1)i
piK

0+K
0

1/2X(J(-1Xe(-KpiX),X,
0

Es gilt mit $\cos(k\pi) = (-1)^k$ die Darstellung $c_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade } (k \neq 0), \\ -2i/(k\pi), & k \text{ ungerade,} \end{cases}$
und $c_0 = 0$ ($k=0$). Es sei $k = 2m+1$.

2M+1+H
2M+1

-2i/piX(e^piXi)/H+e(Bpi
-2(e^pi(2M+1)Xi+e^-pi(-2M-1)Xi)
2M+1-2M-1
pi

simplify(cExpand(C))+
-4.sin(piX+2piMX)
pi(-2M-1)

cExpand(C))+D
-4.sin(piX+2piMX)
pi(-2M-1)

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)
N
sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)

piXi)/H+e(BpiX)/B)+D
1Xi+e^pi(-2M-1)Xi
-2M-1
pi

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)
N
sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)
N
sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)
N
sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)
N
sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)

Damit lautet das Ergebnis wie folgt:

$$s(x) = -2i/\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/k) \cdot e^{ik\pi x} = -2i/\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1/(2m+1)) \cdot e^{i(2m+1)\pi x}$$

$$= 4/\pi \sum_{m=0}^{\infty} (1/(2m+1)) \cdot \sin((2m+1)\pi x).$$

simplify(sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N))+
4.sin(piX)
pi
N = 0

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)+V1
4.sin(piX)
pi
N = 1

expand(simplify(sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N))+V2
4.sin(piX)+4.sin(3piX)
pi+3pi
N = 1

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)+V2
4.sin(piX)+4.sin(3piX)
pi+3pi
N = 1

expand(simplify(sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N))+V3
4.sin(piX)+4.sin(5piX)
pi+5pi
N = 2

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)+V3
4.sin(piX)+4.sin(5piX)
pi+5pi
N = 2

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)+V3
4.sin(piX)+4.sin(5piX)
pi+5pi
N = 2

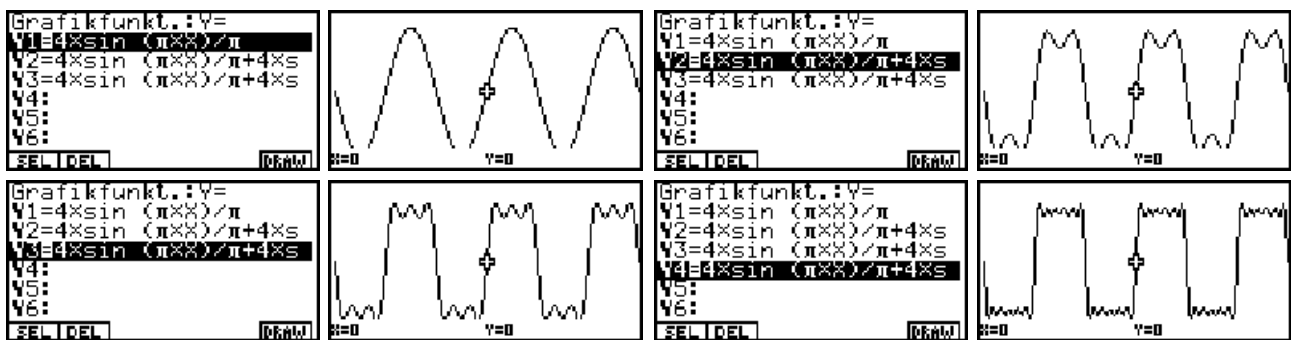
sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)+V3
4.sin(piX)+4.sin(5piX)
pi+5pi
N = 2

expand(simplify(sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N))+V4
4.sin(piX)+4.sin(11piX)
pi+11pi
N = 5

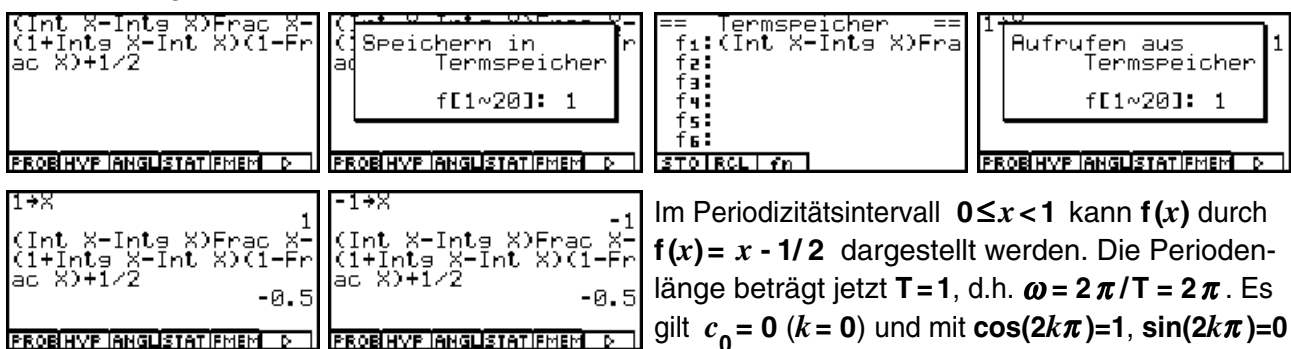
sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)+V4
4.sin(piX)+4.sin(11piX)
pi+11pi
N = 5

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)+V4
4.sin(piX)+4.sin(11piX)
pi+11pi
N = 5

sum(-4.sin(piX+2piMX)/pi(-2M-1),M=0,N)+V4
4.sin(piX)+4.sin(11piX)
pi+11pi
N = 5

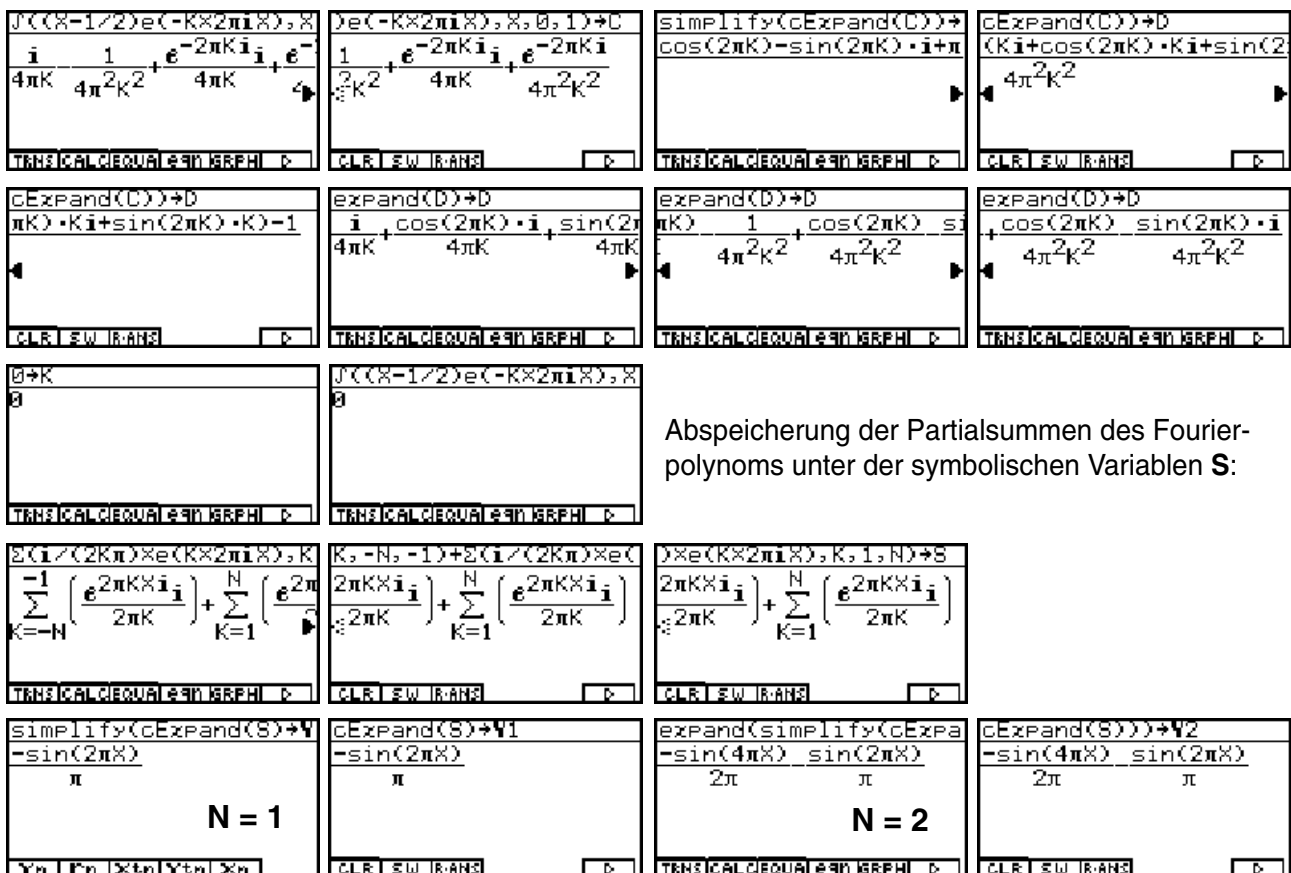


L13.2: Diese Aufgabe ist zunächst eine gute Übung, die Wirkungsweise der **Int**-, **Intg**- und **Frac**-Funktion kennenzulernen. Die Funktion $y = f(x) = \text{Int}x + \text{Frac}x - \text{Int}x - 1/2 = x - \text{Int}x - 1/2$ ist rechtsseitig stetig, d.h. in der Unstetigkeitsstelle wird immer der von rechts herkommende untere Funktionswert $-1/2$ angenommen:

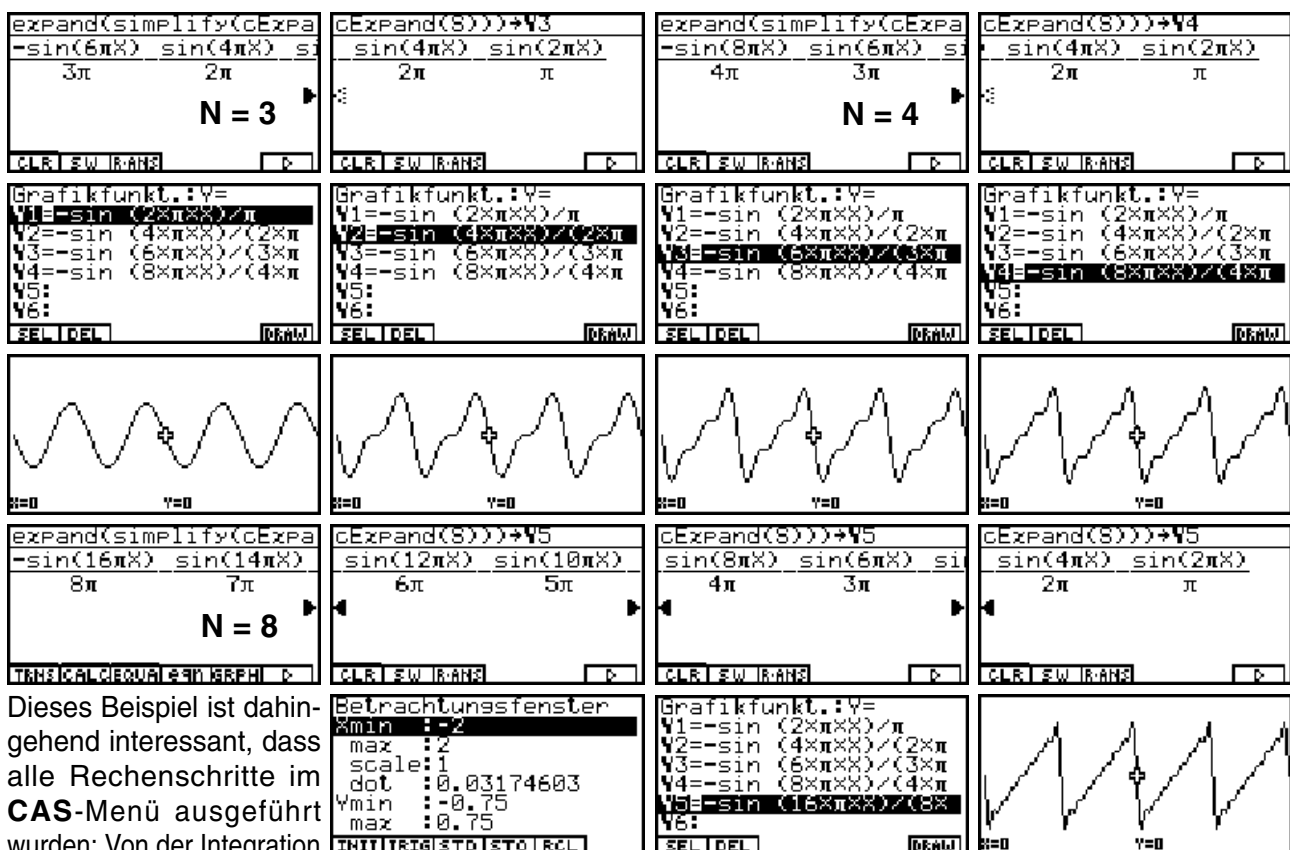


Im Periodizitätsintervall $0 \leq x < 1$ kann $f(x)$ durch $f(x) = x - 1/2$ dargestellt werden. Die Periodenlänge beträgt jetzt $T=1$, d.h. $\omega = 2\pi/T = 2\pi$. Es gilt $c_0 = 0$ ($k=0$) und mit $\cos(2k\pi)=1$, $\sin(2k\pi)=0$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ikx\omega} dx = \int_0^1 (x - 1/2) \cdot e^{-i2k\pi x} dx = i/(2k\pi), k \neq 0,$$



Abspeicherung der Partialsummen des Fourierpolynoms unter der symbolischen Variablen **S**:



Dieses Beispiel ist dahingehend interessant, dass alle Rechenschritte im **CAS**-Menü ausgeführt wurden: Von der Integration der Fourierkoeffizienten, über die Termumformung, Abspeicherung der Partialsummen bis hin zur graphischen Darstellung.

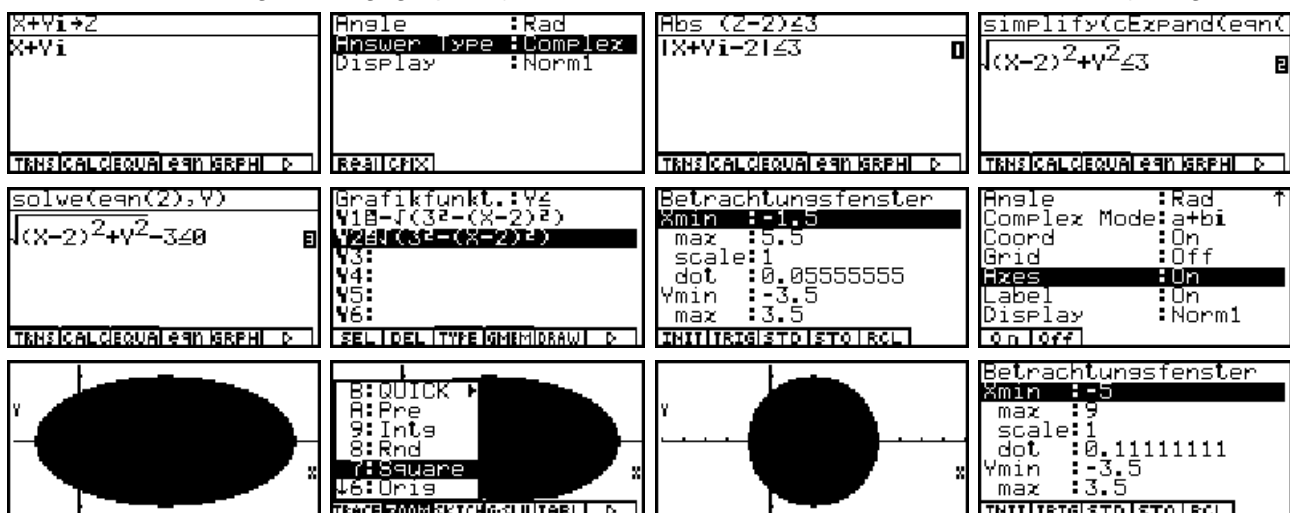
$$s(x) = i/(2\pi) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1/k) \cdot e^{i2k\pi x} = -1/\pi \sum_{k=1}^{k=\infty} (1/k) \cdot \sin(2k\pi x)$$

Kapitel 14:

Hier sind keine Lösungshinweise notwendig.

Kapitel 15:

L15.1: a) Die Betragsungleichung wird zuerst im **CAS**-Menü umgeformt und dann im **GRPH·TBL**-Menü über eine Ungleichungsgraphik (Fläche zwischen oberem und unterem Halbkreis) dargestellt:



Zuletzt wurde mit **ZOOM Square** der Kreis (Innengebiet mit Rand) unverzerrt dargestellt.

L15.1: b) Es handelt sich um das Außengebiet eines Kreises um $M(-1,0)$ mit $R > 2$. Für die graphische Darstellung wird die Parameterdarstellung von Kreisen mit Radien größer als 2 genutzt, wobei die Radien über die **List1** (im **RUN·MAT**-Menü abgespeichert) sofort in die Formel für die Kreislinien eingehen:

$(\text{Abs}(Z+1))^2 > Z^2$ $(1+Vi+1i)^2 > 4$	$\text{Simplify}(\text{GExpand}(\text{eqn}(1)))$ $(X+1)^2 + V^2 > 4$	$\text{GExpand}(\text{eqn}(1))$ $(X+1)^2 + V^2 > 4$	$X+Vi \rightarrow Z$ $X+Vi$ CLR SW TRANS
TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	Seq(r,r,2.1,5.6,.25)→ List 1 Done
Gratikfunkt.:Param Y1=-J(3^2-(X-2)^2) Y2=J(3^2-(X-2)^2) Xt3=-1+List 1xcos T Yt3=List 1xsin T Xt4: Yt4: SEL/DEL/TYPE/MEM/DRAW	Betrachtungsfenster Xmin:-6 max:4 scale:1 dot:0.07936507 Ymin:-2.5 max:2.5	Betrachtungsfenster Ymin:-2.5 max:2.5 scale:1 Tmin:0 max:6.2831853 Pch:2π/50	

L15.1: c) Hier handelt es sich um einen Kreisring um $M(-1,-1)$ mit $1 < R \leq 4$. Es wird im wesentlichen wie in Aufgabe **L15.1b)** vorgegangen:

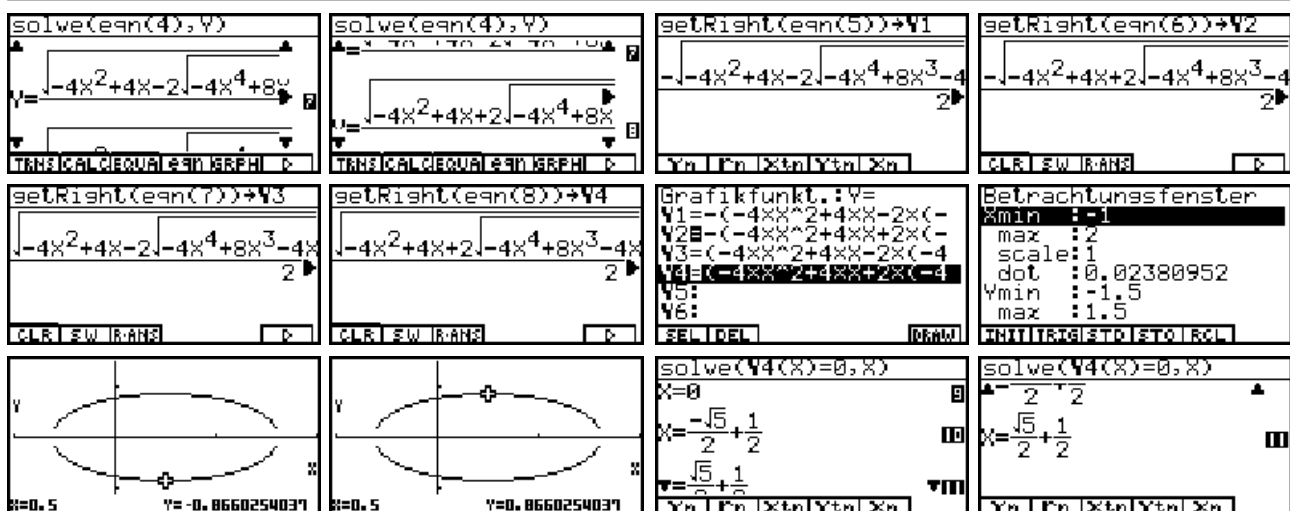
Seq(r,r,1.1,4,.145)→ List 1 Done	Gratikfunkt.:Param Y1=-J(3^2-(X-2)^2) Y2=J(3^2-(X-2)^2) Xt3=-1+List 1xcos T Yt3=List 1xsin T Xt4: Yt4: SEL/DEL/TYPE/MEM/DRAW	Betrachtungsfenster Xmin:-10 max:8 scale:2 dot:0.14285714 Ymin:-5.5 max:3.5	
LIST/MAT/CPLX/CALC/NUM			

L15.2: Hier handelt es sich um einen senkrechten Parallelstreifen, der graphisch über $x = c = \text{List1}$ dargestellt wird. Die c -Werte werden dabei als **List1** im **RUN·MAT**-Menü abgespeichert:

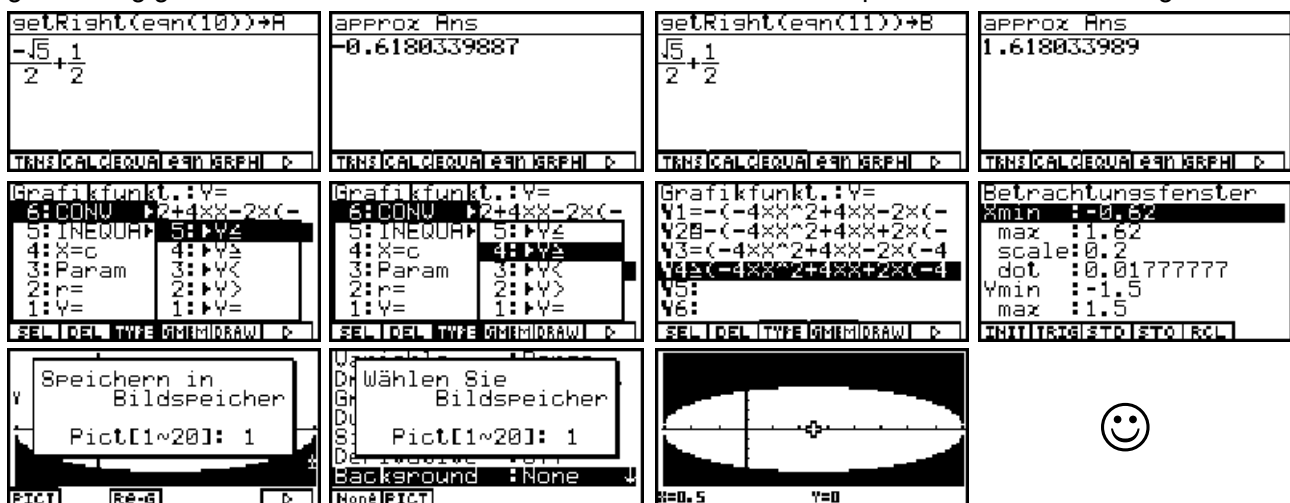
Gratikfunkt.:X=c Y1=-J(3^2-(X-2)^2) Y2=J(3^2-(X-2)^2) Xt3=-1+List 1xcos T Yt3=-1+List 1xsin T Xt4: Yt4: SEL/DEL/TYPE/MEM/DRAW	Betrachtungsfenster Xmin:-5 max:5 scale:1 dot:0.07936507 Ymin:-5 max:5		

L15.3: Die Ungleichung wird offensichtlich von „großen“ z -Werten erfüllt, die hinreichend weit entfernt von $z = 0$ und $z = 1$ liegen. Damit handelt es sich um das Außengebiet zur Cassinischen Kurve, die eine Gleichung 4. Grades in x und y ist, wenn man zur reellen Darstellung übergeht. Mit dem **solve(...** - Befehl (**CAS**-Menü) kann diese Gleichung nach y aufgelöst werden. Die vier Lösungen werden als Funktionsterme **Y1** bis **Y4** abgespeichert, wobei nur **Y2** und **Y4** reelle Funktionen sind. Genau mit diesen Funktionen werden der obere und der untere Teil der geschlossenen Cassinischen Kurve gezeichnet.

$(\text{Abs}(Z-1))^2 \cdot (\text{Abs}(Z))^2 =$ $(1+Vi)^2 \cdot (1+Vi-1i)^2$	$\text{Abs}(Z-1)^2 \cdot (\text{Abs}(Z))^2 = 1$ $(1+Vi)^2 \cdot (1+Vi-1i)^2 = 1$	$\text{Simplify}(\text{GExpand}(\text{eqn}(1)))$ $(x^2+v^2)((x-1)^2+v^2)=1$	$\text{GExpand}(\text{eqn}(1))$ $+v^2)((x-1)^2+v^2)=1$
CO/ABS/X/1/SIGN/HYP/PMEM	CLR SW TRANS	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	CLR SW TRANS
$\text{expand}(\text{eqn}(2))$ $x^4 - 2x^3 + 2x^2v^2 + x^2 - 2xv^2$	$\text{expand}(\text{eqn}(2))$ $2v^2 + x^2 - 2xv^2 + v^4 + v^2 = 1$	$\text{collect}(\text{eqn}(3), V)$ $v^4 + (2x^2 - 2x + 1)v^2 + x^4 - 2x$	$\text{collect}(\text{eqn}(3), V)$ $x+1)v^2 + x^4 - 2x^3 + x^2 = 1$
TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH
$\text{solve}(\text{eqn}(4), V)$ $y = \sqrt{-4x^2 + 4x - 2} \sqrt{-4x^4 + 8}$	$\text{solve}(\text{eqn}(4), V)$ $x^4 + 8x^3 - 4x^2 + (2x^2 - 2x + 1)$	$\text{solve}(\text{eqn}(4), V)$ $2 + (2x^2 - 2x + 1)^2 + 4 - 2$	$\text{solve}(\text{eqn}(4), V)$ $y = \sqrt{-4x^2 + 4x - 2} \sqrt{-4x^4 + 8}$
TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH	TNS/CALC/EQUAL/eqn/GRAPH



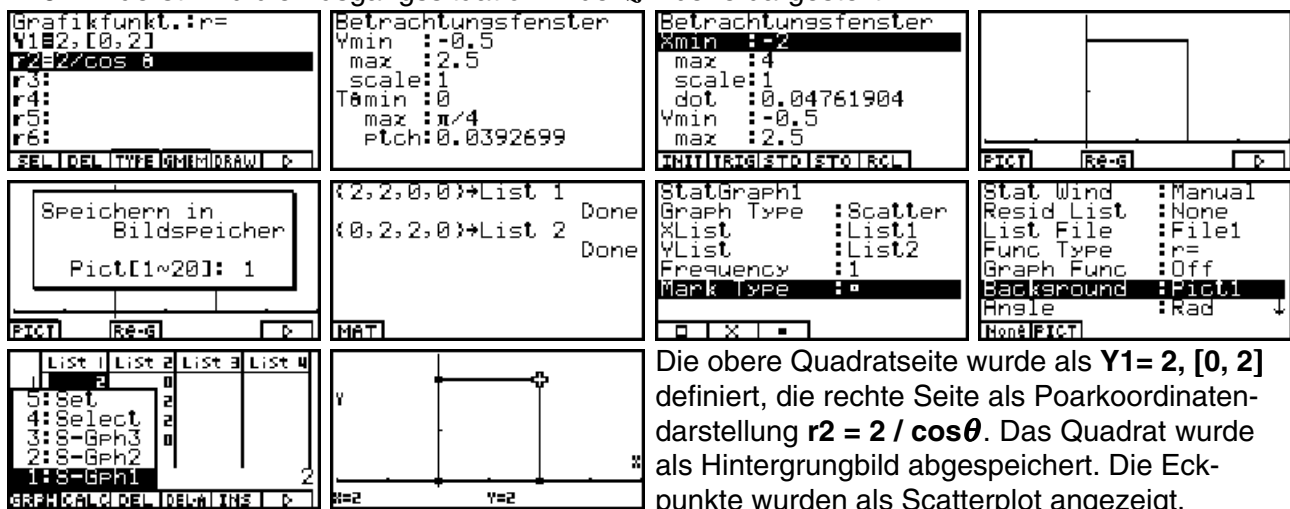
Abschließend wird über das **GRPH·TBL**-Menü eine Ungleichungsgraphik für das betrachtete Außengebiet dargestellt, wobei die untere Schraffur als Hintergrundbild abgespeichert wird, da nicht beide Schraffuren gleichzeitig gezeichnet werden können. Der linke und rechte Scheitelpunkt werden exakt ausgerechnet:



Wie ändern sich die Umformungen und Graphiken für die Cassinische Kurve $|z - i| \cdot |z| = 1$?

Kapitel 16:

L16.1: Zuerst wird die Ausgangssituation in der z -Ebene dargestellt:



Die obere Quadratseite wurde als $Y1 = 2, [0, 2]$ definiert, die rechte Seite als Polarkoordinatendarstellung $r2 = 2 / \cos \theta$. Das Quadrat wurde als Hintergrundbild abgespeichert. Die Eckpunkte wurden als Scatterplot angezeigt.

Die imaginäre Achse ($P_3(0,2) \rightarrow P_4(0,0)$) geht bei $w = z^2$ in die negative Achse über, die positive reelle Achse ($P_4(0,0) \rightarrow P_1(0,2)$) geht bei $w = z^2$ in die positive Achse über: $-4 \leq w \leq 4$.

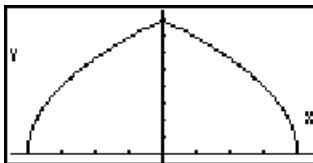
Die Parameterdarstellung für $P_1(2,0) \rightarrow P_2(2,2)$ lautet $z(t) = 2 + it$, im Bildbereich $w = -t^2 + 4 + 4it$:

$2+it \rightarrow z$ $ti+2$	$\text{GExpand}(z^2) \rightarrow w$ $4ti-t^2+4$	$-t^2+4 \rightarrow x$ $-t^2+4$	$4t \rightarrow y$ $4t$
TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	Yn Fn Xtn Ytn Xn	Yn Fn Xtn Ytn Xn

Die Parameterdarstellung für $P_2(2,2) \rightarrow P_3(0,2)$ lautet $z(t) = t + 2i$, im Bildbereich $w = t^2 - 4 + 4it$:

$t+2i \rightarrow z$ $t+2i$	$\text{GExpand}(z^2) \rightarrow w$ $t^2-4+4ti$	$t^2-4 \rightarrow x$ t^2-4	$4t \rightarrow y$ $4t$
Yn Fn Xtn Ytn Xn	TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	Yn Fn Xtn Ytn Xn	Yn Fn Xtn Ytn Xn

Grafikfunkt.: Y= $X(t) = t^2 + 4$ $Y(t) = 4t$ $X(t) = t^2 - 4$ $Y(t) = 4t$ $Y3:$ $Y4:$ SEL DEL	Betrachtungsfenster Xmin: -4.5 max: 4.5 scale: 1 dot: 0.07142857 Ymin: -0.5 max: 8.5 INIT/TRIG/STD/ETO/RCI	Betrachtungsfenster Ymin: -0.5 max: 8.5 scale: 1 Tamin: 0 max: 2 Pch: 0.02 INIT/TRIG/STD/ETO/RCI	Variable: Range Draw Type: Connect Graph Func: Off Dual Screen: Off Simul Graph: Off Derivative: Off Background: None Hxnd/FIXT
---	---	---	--



Damit ist das Bild des Quadrates ein dreieckförmiges Gebilde, das aus zwei nach links bzw. nach rechts geöffneten Parabelästen gebildet wird! Das Innengebiet des Quadrates geht wieder in das Innengebiet über.

Kapitel 17:

L17.1: Lösung im EQUA-Menü, RUN·MAT-Menü oder CAS-Menü möglich:

$ax+by+cz=d$ $1 \cdot i \quad 2 \quad 4 \quad 3+2i$ $2 \quad 0 \quad 1 \quad 2i$ $3 \quad -i \quad 0 \quad 4$ EDIT/DEL/CLE	$ax+by+cz=d$ $1 \cdot i \quad 2 \quad 4 \quad 3+2i$ $2 \quad 0 \quad 1 \quad 2i$ $3 \quad -i \quad 0 \quad 4$ REPT	$ax+by+cz=d$ $1 \cdot i \quad 2 \quad 4 \quad 3+2i$ $2 \quad 0 \quad 1 \quad 2i$ $3 \quad -i \quad 0 \quad 4$ EQUA-Menü	$ax+by+cz=d$ $1 \cdot i \quad 2 \quad 4 \quad 3+2i$ $2 \quad 0 \quad 1 \quad 2i$ $3 \quad -i \quad 0 \quad 4$ REPT
$ax+by+cz=d$ $1 \cdot i \quad 2 \quad 4 \quad 3+2i$ $2 \quad 0 \quad 1 \quad 2i$ $3 \quad -i \quad 0 \quad 4$ EDIT/OPR/DEL/INSR/ADD	$ax+by+cz=d$ $1 \cdot i \quad 2 \quad 4 \quad 3+2i$ $2 \quad 0 \quad 1 \quad 2i$ $3 \quad -i \quad 0 \quad 4$ MAT	$ax+by+cz=d$ $1 \cdot i \quad 2 \quad 4 \quad 3+2i$ $2 \quad 0 \quad 1 \quad 2i$ $3 \quad -i \quad 0 \quad 4$ RUN·MAT-Menü	$ax+by+cz=d$ $1 \cdot i \quad 2 \quad 4 \quad 3+2i$ $2 \quad 0 \quad 1 \quad 2i$ $3 \quad -i \quad 0 \quad 4$ CAS-Menü

L17.2: Lösung im CAS-Menü mit dem solve(... - Befehl möglich. Im Nenner der Lösungsdarstellung tritt dabei der Term $STi+4S+4$ auf, so dass z.B. die Fallunterscheidung a) $STi+4S+4 \neq 0$, d.h. $T=4i$ oder $S \neq -4/(4+Ti)$ bzw. b) $STi+4S+4=0$, d.h. $T \neq 4i$ und $S = -4/(4+Ti)$ zu treffen und auszuwerten ist:

$1x+2y+1x2=3+2i$ $xi+2y+1x2=3+2i$ TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	$1x+2y+1x2=3+2i$ $xi+2y+1x2=3+2i$ TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	$1x+2y+1x2=3+2i$ $xi+2y+1x2=3+2i$ TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	$1x+2y+1x2=3+2i$ $xi+2y+1x2=3+2i$ TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH
$1x+2y+1x2=3+2i$ $xi+2y+1x2=3+2i$ TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	$1x+2y+1x2=3+2i$ $xi+2y+1x2=3+2i$ TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	$1x+2y+1x2=3+2i$ $xi+2y+1x2=3+2i$ TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH	$1x+2y+1x2=3+2i$ $xi+2y+1x2=3+2i$ TRANS/CALC/EQUA/eqn/GRAPH

Stichwortverzeichnis

A

Ableitung, symbolisch, partiell (CAS)	60,73
abs (Untermenü CPLX)	7
Absolutwert einer komplexen Zahl	7
Addition komplexer Zahlen	7
Additionsregel (komplexe Zahlen)	8
Additionstheoreme (trigonometrische Funktionen) ...	9,19
Äquipotenziallinien	68
allgemeine reelle Potenz	24
allgemeine komplexe Potenz	37
Altgrad (Deg, Winkelmodus)	7
ALGEBRA-Menü	71
Ans (Ans-Speicher)	33,41
Answer Type	28
approx (Befehl)	10,41
Areafunktionen	52,86
arctan	10,19,25
Arg (Untermenü CPLX)	7
Argument einer komplexen Zahl	7
arithmetische Darstellung (komplexer Zahl) ..	7,28
Arkusfunktionen	48
Auszoomen	63

B

Basen (Logarithmus)	33
Befehle, geschachtelt	14,31
Betrag einer komplexen Zahl	7,60
Betragsfunktion (Abs)	35
Betragsungleichung	63
Betrachtungsfenster (V-Window)	27,35,57,65
Bildbereich	32
Binomischer Satz	18
Blatt, Blattnummer	16,29,37,39
Bogenmaß (Rad, Winkelmodus)	7,23

C

CAS-Menü	9
Cassinische Kurve	64,95,96
Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen	60
cExpand (Befehl, cExpnd)	9,38
collect (Befehl, collct)	9,56
Comp (Zahlensystem - Mode - SET UP)	7
Complex Mode (Zahlenformat)	11,23,24
CONIC-Menü	66
Conjg (konjugiert komplexe Zahl)	8
cos-Funktion	41
cos-Reihe	10
cosh-Funktion	43,51,52,86

CPLX (Untermenü)	7
Cramersche Regel	71

D

Darstellungsformen komplexer Zahlen	7
Definition komplexer Zahlen	7
Definitionsbereich (Syntax)	65
Deg (Altgrad, Winkelmodus)	7
Determinante (Matrix)	70
diff (komplexe Ableitung)	60,61,73
DIN-gerecht, Hauptargument	17,23,25,37
DIN-gerecht, Hauptwert	30
Division komplexer Zahlen	13

E

e-Funktion, komplexe	21
e-Reihe	10
Ehrenrettung	26,31
Einheitskreis	72
Eins (als komplexe Zahl)	13
Einweggleichrichtung	57
Elektrotechnik (Anwendungsbeispiel)	68
Ellipse	62
eqn	56,62
EQUA-Menü	54,55,71
ERROR	35
Eulersche Formel	10,21,39
exchange (Befehl)	68
Exemplar einer Gaußschen Zahlenebene ...	16,29
Exponentialfunktion	21,72
exponentielle Darstellung (komplexe Zahl) .	10,28
expToTrig (Befehl)	10

F

factor (Befehl)	14,15,53
Faktorisierung (CAS)	15,53,56
Feldlinien	68
FMEM (Termspeicher)	36
Fourierkoeffizienten (komplex)	57
Fourierreihen (komplex)	57
Frac-Funktion (Nachkommastellen)	59
Fundamentalsatz der Algebra	53
Funktionentheorie	60

G

Gaußsche Zahlenebene	7,11,33
Gegenuhrzeigersinn	16,27
Geradenstück	66

getRight (Befehl)	67
Gleichheitseigenschaft (komplexe Zahlen).....	8,10
Gleichungssystem, linear	15,70
Graphik-Hintergrundbild	69
GRPH (Untermenü)	12,67
GRPH-TBL-Menü	17,22,35,43

H

Halbebene	27,64
Halbkreis	62,66
Hauptargument	17,23,25,26
Hauptargumentbereich	7,11
Hauptwert (Logarithmus)	30
Hauptwert (Potenz)	37
Hauptwert (cosh-Funktion)	51
Hauptwurzel von -1	8
Hauptwurzel einer komplexen Zahl	24
Hintergrundbild	69,78,81
Hyperbolische Funktionen (HYP)	43,51

I

imaginäre Achse	7
imaginäre Einheit	8
Imaginärteil komplexer Zahlen (ImP)	8,27,60
Index, Indizes	16,22,37
Innengebiet	69
Int-Funktion (Vorkommastellen)	59
Intg-Funktion (Ganzzahlfunktion)	59
Integral mit Parametern	57
Inverse Zahl bei Addition	13
Inverse Zahl bei Multiplikation	14
∫ (Integral)	57,61

K

Kartesische Koordinaten, Transformation	9
Kegelschnittgleichung	66
kleine Geschichte (etwa drei gleiche Antworten)	46
komplexe Basis einer Potenz	37
komplex differenzierbar	60
komplexes lineares Gleichungssystem	15,70
komplexer Logarithmus	30
komplexe Polynome	53
konjugiert komplexe Zahl (Conjg)	8,60
Koordinaten des Funktionsgraphen	65,67,68
Koordinatenpaar	7
Koordinatenumwandlung, Transformation	9
Körper der komplexen Zahlen	7
Kreis	27,62,64,66
Kreisumgebung	62

Kurvenschar	69
-------------------	----

L

Lage der komplexen Zahlen	12
Lineares Gleichungssystem (im CAS-Menü) ...	14
Linearfaktoren eines Polynoms	53
ListAns-Speicher	11,26,32,38
ListAns-Liste eingeben	22
Logarithmengesetze	34
Logarithmus, komplexer	30,72

M

MatAns-Speicher	70
mathematisch positiver Drehsinn	16,27,55
Matrix, invertieren	70
Matrix-Editor	70
Mehrdeutigkeit (Logarithmus)	34
Menge der komplexen Zahlen	7
Mittelpunkt (Kreis)	62,66
Multiplikation komplexer Zahlen	7
Multiplikationsregel (komplexe Zahlen)	8

N

Nebenwert (Logarithmus)	30
Nebenwert (Potenz)	37
Nebenwert (cosh-Funktion)	51
Nebenwurzel einer komplexen Zahl	24
Normalform	42
Null (als komplexe Zahl)	13
Nullstellen komplexer Polynome	53
Nullstellengleichung	54,55
Numerische Berechnungen (NUM)	44

O

Optionsmenü (Funktionstaste OPTN)	7,44
---	------

P

Parallelstreifen	22,30,32,49,64
Parameter (Gleichungssystem)	71
Parameterdarstellung (komplex)	65
parameterfreie Darstellung	65,67
Parameterintegrale	57
partielle Ableitungen (CAS).....	60
Partialbruchzerlegung	56
periodische komplexe e-Funktion	21,33
Periodizität (komplexe sin-Funktion)	44
Plattenkondensator	68
Polarkoordinaten, Transformation	9

Stichwortverzeichnis

Polarkoordinatendarstellung	68
Polynomgleichungen (POLY)	53
Potenz einer komplexen Zahl	16,73
Potenzgesetze	20
Potenzial (komplexes)	68
Punktmengen (komplexe)	62
Pythagoras, trigonometrischer, hyperbolischer	45

Q

Quadranten im Koordinatensystem	10
Quadrat	69
Quadratisches Polynom	53

R

Radius einer komplexen Zahl	23
Radius (Kreis)	27,62,66
Rand	69
Real-Modus	24
Realteil komplexer Zahlen (ReP)	8,27,60
Rechengenauigkeit	47
Rechteckkurve	59
reelle Achse	7
regulär (Funktion, Matrix)	60,70
rewrite (Befehl)	68
rFactor (Root-Faktor-Befehl)	53
Riemannsche Fläche	16,21,37

S

Sägezahnkurve	59
Satz von Moivre	18
Scatterplot (Gaußsche Zahlenebene)	11,20,27
Scatterplot der Zahlenpaare	11,33
Select (Untermenü)	12
SET UP (individuelle Voreinstellungen)	10
Signum-Funktion (sgn)	19, 35,36
simplify (Befehl, simplfy)	9
sin-Reihe	10
sinh-Funktion	43,51,52,86
Sinus-Funktion	41,73
Spaltenvektor	70
Speicherfehler	39,40
STAT-Listeneditor	12
STAT-Menü	11,22,32
statistische Grafik	11,20
Subtraktion komplexer Zahlen	13
solve	14

T

Taylorentwicklung	10
Taylorpolynom (CAS)	61
Termspeicher (FMEM)	36,41
Tracefunktion (TRACE)	12,35
TRIG (Untermenü)	10
trigonometrische Darstellung (komplexe Zahl) ...	10
Trigonometrische Funktionen (komplex)	43
trigToExp (Befehl)	10,45
TRNS (Untermenü)	9
TUTOR-Menü	71

U

Umgebungsradius	62
Umkehrfunktion, trigonometrische	10
Unbeschränktheit	44
unendlich große komplexe Zahl	7
Ungleichung	62
Urbildbereich	32

V

V-Window (Betrachtungsfenster)	27
Vektorrechnung	36
Vorzeichenfunktion	19,35
verbundene Datenlisten	11

W

Wertebereich, arctan-Funktion	10
Winkel einer komplexen Zahl	7
Winkelabstand	27
Winkelmodus	7
Winkelproblem	42
Winkelraum	16,29,64
Wurzel einer komplexen Zahl	24
Wurzelfunktion	35
Wurzelwerte	27,56
Wurzelziehen	73

X

X = Konstantenterm	64,95
--------------------------	-------

Z

Zahlenfolgen	22
Zahlenformat (Complex Mode)	11
Zahlenkörper	8
Zahlenliste (komplexe Zahlen)	11
Zahlensystem (Mode)	7
Zehner-Logarithmus	33
Zoom-Square-Befehl	63