Prof. Dr. Ludwig Paditz, 5.Mathe-Intensivkurs 2014

Einführung in die CAS-Software (ClassPad)
===

Kurs Dr.Kohl/Meinhold:
======================

Testat 1:
A1: elementare Mengenlehre
===

Die Rechenoperationen ∪, ∩, \, ×, Δ (sowie Potenzmengen und Kardinalzahlen) und die Relationen =, ⊂, ⊆, ⊄, ⊈ sowie ∈, ∉, ∅, Ω, A, Ā, B, B̄ sind zwar im Zeichensatz des ClassPad vorhanden, können aber nicht im CAS genutzt werden. D.h., die Mengenlehre ist zurzeit nicht im Betriebssystem des ClassPad implementiert.

Informatik-Studenten der HTW Dresden haben in den zurückliegenden Jahren im Projektseminar die Mengenlehre für den ClassPad programmiert und zusätzlich AddIns generiert.

Die Programme zur Mengenlehre liegen im library-Ordner dieses vcp-files:
Programm "Menge" zur Mengenlehre
Programm "StrOVenn" generiert zusätzlich Venn-Diagramme

Diese Rahmenprogramme nutzen außerdem Unterprogramme, vgl. Bedienungsanleitung
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Bedienungsanleitung_Menge_Version_0_9_13.pdf

Das besondere dieser Programme besteht darin, dass auch **Mengen mit Elementen nichtnumerischer Art** verarbeitet werden können.
Z.B. Mengen mit Vornamen oder Mengen mit e-mail-Adressen usw.
Die Programmierung beruht auf der Zeichenkettenverarbeitung.

Die erwähnten AddIns (sogen. ***.cpa**-files) können nicht in den ClassPad-Manager eingebunden werden sondern lediglich in älteren TR implementiert werden (ClassPad330 und älter, nicht ClassPad330PLUS oder ClassPad400, da hier das AddIn ein anderes Datenformat hat: ***.c1a** bzw ***.c2a**).

Unabhängig davon liegen diese AddIns als eigenständige PC-Version vor:
AddIn "Real Sets"(2011) und **AddIn "Venn-Diagramm"(2014)**
download:
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mengenlehre-Add-In-Real-Sets.zip
bzw.
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mengenlehre-Add-In-Venn-Diagramm.rar

==

a) endliche diskrete Mengen
$A=\{n|n\in N,n\le 6\}$, $B=\{m|m\in \mathbf{Z},-2<m<9,2|m\}$,
gegebene Definition der Mengen verstehen:
Mengen als Zahlenfolgen generieren:
seq(n,n,0,6,1)⇒A

{0,1,2,3,4,5,6}

seq(m,m,0,8,2)→B

{0,2,4,6,8}

Zeichenkettenverarbeitung:

Menge("{0,1,2,3,4,5,6}","∪","{0,2,4,6,8}")

done

Ergebnis

"{0,1,2,3,4,5,6,8}"

alternative Eingabe:
Mengen in Zeichenketten konvertieren
ExpToStr A,A

done

ExpToStr B,B

done

Menge(A,"∪",B)

done

Ergebnis

"{0,1,2,3,4,5,6,8}"

Zeichenkette in eine Zahlenliste konvertieren
strToExp(Ergebnis)

{0,1,2,3,4,5,6,8}

b) Mengen in Intervallform
Ein Intervall enthält unendlich viele Elemente und kann nicht mit dem Programm Menge verarbeitet werden. Lösung durch überlegung (auf dem Zahlenstrahl) oder Nutzung des AddIn "Real Sets".
[1;7]∩(3;10]=(3;7],   [1;7]\(3;10]=[1;3]

A2: Termvereinfachung

a)

Hinw.1: Syntax x(...) bedeutet Funktion x,
Syntax x*(...) bedeutet Multiplikation mit x
Hinw.2: xy bedeutet zweibuchstabiger Variablenname
alternativ ***xy*** für x*y nutzen,
x*,*y (kursiv) gelten als einbuchstabige Variable.

$x\times(y+z)+y\times(z-x)-(x+y)(-z) \Rightarrow \mathrm{Term}$

$$z\cdot(x+y)-y\cdot(x-z)+x\cdot(y+z)$$

$\mathrm{simplify}(\mathrm{Term}) \Rightarrow \mathrm{Term}$

$$2\cdot z\cdot(x+y)$$

schrittweise (per Hand):
Hintergrundfenster zur Termumformung mit Rechenkontrolle

Hintergrundfenster	f(x)=

b)

$(3x-y)^2+(3x-2y)(2y-3x) \Rightarrow \mathrm{Term}$

$$(3\cdot x-y)^2-(3\cdot x-2\cdot y)^2$$

$\mathrm{simplify}(\mathrm{Term}) \Rightarrow \mathrm{Term}$

$$3\cdot y\cdot(2\cdot x-y)$$

schrittweise (per Hand):
Hintergrundfenster zur Termumformung mit Rechenkontrolle

Hintergrundfenster	f(x)=

A3: quadratische Ergänzung

$4a^2+36a+40 \Rightarrow \mathrm{Term}$

$$4\cdot a^2+36\cdot a+40$$

$\mathrm{judge}((2a)^2+2\times 2a\times 9+9^2-41=\mathrm{Term})$

TRUE

$\mathrm{judge}((2a+9)^2+81=\mathrm{Term})$

FALSE

$\mathrm{judge}((2a+9)^2-41=\mathrm{Term})$

TRUE

Ergebnis: $4a^2+36a+40=(2a+9)^2-41$

schrittweise als Gleichungskette (per Hand):

Hintergrundfenster zur Termumformung mit Rechenkontrolle

Hintergrundfenster	$f(x)=$

A4: Def.-Bereich und Termvereinfachung

a) Bruchterme

$$\frac{5x-2}{x^2-4}-\frac{4x+2}{x^2+2x} \Rightarrow Term$$

$$-\frac{4\cdot x+2}{x^2+2\cdot x}+\frac{5\cdot x-2}{x^2-4}$$

solve($x^2-4\neq 0,x$)

$$\{x\neq -2, x\neq 2\}$$

solve($x^2+2x\neq 0,x$)

$$\{x\neq -2, x\neq 0\}$$

Db(Term)$=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq -2, x\neq 0, x\neq 2\}$

Db(Term)$=\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$

Db(Term)$=(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;\infty)$

Hinw.: Ordnet man die Werte des Terms der Variablen y zu, bekommt man die Funktion

Define $f(x)=\frac{5x-2}{x^2-4}-\frac{4x+2}{x^2+2x}$

done

welche vier Kurvenäste (und drei Definitionslücken) besitzt. (**!**Kurvendiskussion)

simplify(Term)

$$\frac{x+2}{x\cdot(x-2)}$$

b) Wurzeln und Potenzen

Klarstellung der potenzierten Potenz:

judge$\left(a^{b^c}=a^{\left(b^c\right)}\right)$

TRUE

$\text{judge}\left(a^{b^c}=\left(a^b\right)^c \mid a=2 \text{ and } b=3 \text{ and } c=4\right)$

FALSE

$\text{judge}\left(\left(a^b\right)^c=a^{b\times c} \mid a>0\right)$

TRUE

$\left(\sqrt{3-x}\,\sqrt{x+3}\,\right)^{2^2} \Rightarrow \text{Term}$

$(x+3)^2\cdot(x-3)^2$

solve(3-x≥0,x)

{x≤3}

solve(x+3≥0,x)

{x≥-3}

Db(Term)={x∈**R**|-3≤x≤3}
Db(Term)=[-3;3]

$\text{judge}\left(\text{Term}=\left(\sqrt{3-x}\,\sqrt{x+3}\,\right)^4\right)$

TRUE

In diesem Fall gilt sogar:

$\left(\left(\sqrt{3-x}\,\sqrt{x+3}\,\right)^2\right)^2=\left(\sqrt{3-x}\,\sqrt{x+3}\,\right)^{\left(2^2\right)}$

$(x+3)^2\cdot(x-3)^2=(x+3)^2\cdot(x-3)^2$

judge(ans)

TRUE

Das darf **nicht** zu der Annahme führen, dass stets

$a^{b^c}=a^{\left(b^c\right)}=\left(a^b\right)^c=a^{b\times c}$ sei **!!!**

A5: Prozentrechnung

a) Mehrwertsteuer

Netto*1.19=71.40

1.19·Netto=71.4

solve(ans,Netto)

{Netto=60}

Der Nettopreis beträgt 60€

b) Rabatt (prozentual)
Bruttopreis für 11 Einheiten:
11×71.40

785.4

10er Pack (11 Einheit gratis):
10*71.40

714

785.40×(1-Rabatt)=714

$-785.4\cdot(Rabatt-1)=714$

solve(ans,Rabatt)

{Rabatt=0.09090909091}

Der Rabatt beträgt rund 9,1%.
Exakt: $\frac{1}{11}100\%$

1/11

0.09090909091

A6: ln-Term vereinfachen, n∈N,
ln(1+2n+n^2)+ln(1)-2ln(n+1)→Term

$\ln\left(n^2+2\cdot n+1\right)-2\cdot\ln(n+1)$

simplify(Term)→Term

$\ln\left((n+1)^2\right)-2\cdot\ln(n+1)$

simplify(Term|n≥0)

0

judge(ln(1+2n+n^2)+ln(1)-2ln(n+1)=0|n>0)

TRUE

judge(ln(1+2n+n^2)+ln(1)-2ln(n+1)=0|n=0)

TRUE

judge(ln(1+2n+n^2)+ln(1)-2ln(n+1)=0|n≥0)

Undefined

Unter der Bedingung n≥0 kommt es mit dem CAS-Befehl "judge" zu keiner Entscheidung.

schrittweise als Gleichungskette (per Hand):
Hintergrundfenster zur Termumformung mit Rechenkontrolle

Hintergrundfenster	f(x)=

(Voreinstellung **R**>0 erforderlich)

A7: Gleichungsauflösung nach n

a) Bruchgleichung mit $n\neq-\frac{1}{z}$ und $y\neq0$

$x=\frac{n\times y}{n\times z+1}$ ⇛Gl

$$x=\frac{n\cdot y}{n\cdot z+1}$$

solve(Gl,n)

$$\left\{n=\frac{-x}{x\cdot z-y}\right\}$$

schrittweise:

Gl×(n×z+1)⇛Gl

$$x\cdot(n\cdot z+1)=n\cdot y$$

expand(Gl)⇛Gl

$$n\cdot x\cdot z+x=n\cdot y$$

Gl−n×y−x⇛Gl

$$n\cdot x\cdot z-n\cdot y=-x$$

n×(x×z−y)=−x⇛Gl

$$n\cdot(x\cdot z-y)=-x$$

Gl/(x×z−y)⇛Gl

$$n=\frac{-x}{x\cdot z-y}$$

b) Potenzgleichung mit $x>0$, $x\neq1$, $a>0$, $a\neq3$

$a=3x^n$⇛Gl

$$a=3\cdot x^n$$

solve(Gl,n)

$$\left\{n=\frac{\ln(a)}{\ln(x)}-\frac{\ln(3)}{\ln(x)}\right\}$$

simplify(ans)

$$\left\{n=\frac{\ln\left(\frac{a}{3}\right)}{\ln(x)}\right\}$$

schrittweise:

Gl/3⇛Gl

$$\frac{a}{3}=x^n$$

ln(Gl)⇛Gl

$$\ln(a)-\ln(3)=\ln\left(x^n\right)$$

expand(Gl|x>0)⇛Gl

$$\ln(a)-\ln(3)=n\cdot\ln(x)$$

Gl/ln(x)⇛Gl

$$\frac{\ln(a)-\ln(3)}{\ln(x)}=n$$

simplify(Gl)

$$\frac{\ln\left(\frac{a}{3}\right)}{\ln(x)}=n$$

A8: Summen- und Produktzeichen

$\sum_{k=0}^{4}\left(k^2\right)\prod_{m=1}^{3}\left(m^2\right)$⇛Zahl

$$1080$$

schrittweise:

seq(k^2,k,0,4,1)

$$\{0,1,4,9,16\}$$

sum(ans)

$$30$$

seq(m^2,m,1,3,1)

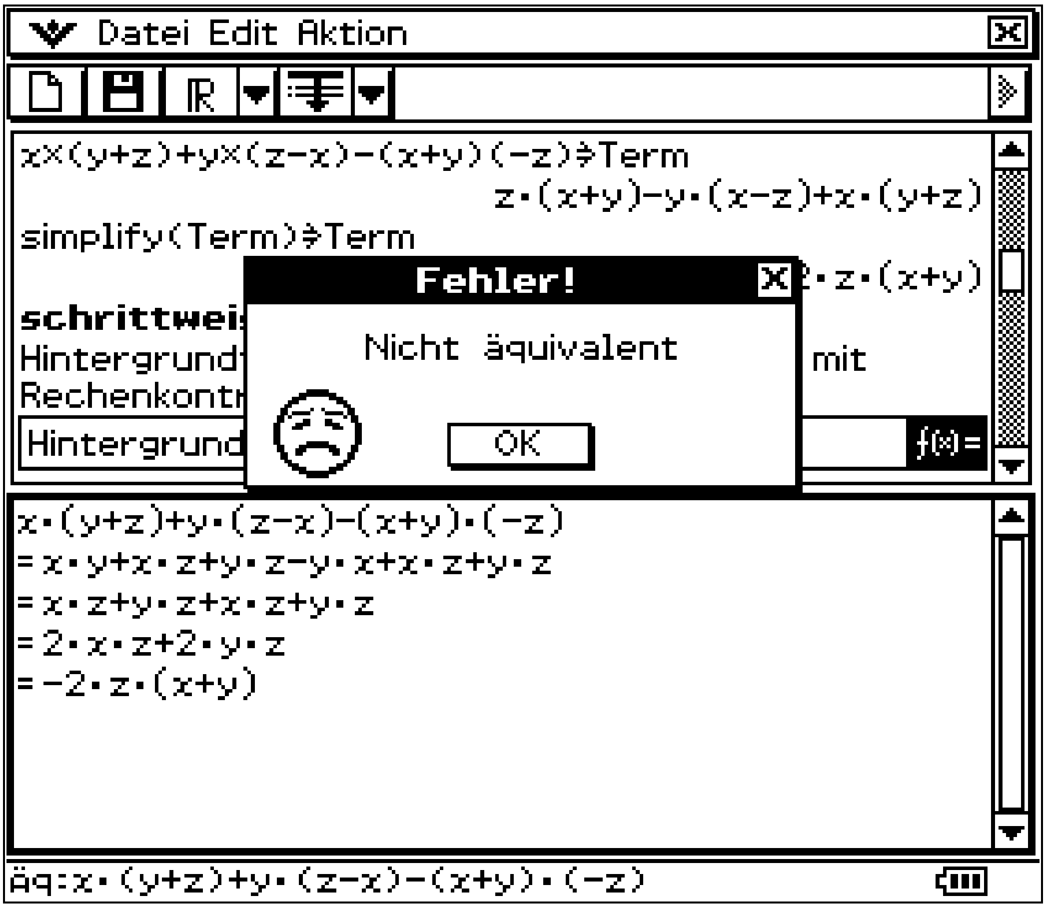
$$\{1,4,9\}$$

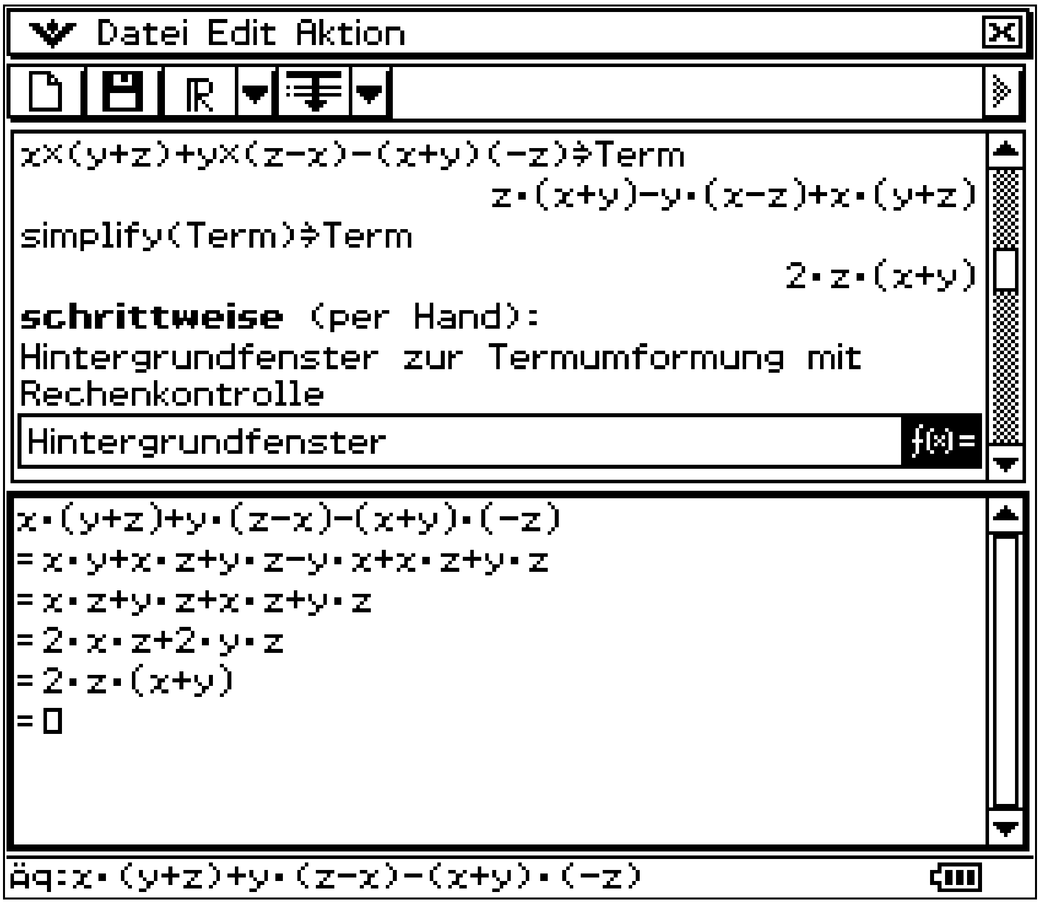
prod(ans)

$$36$$

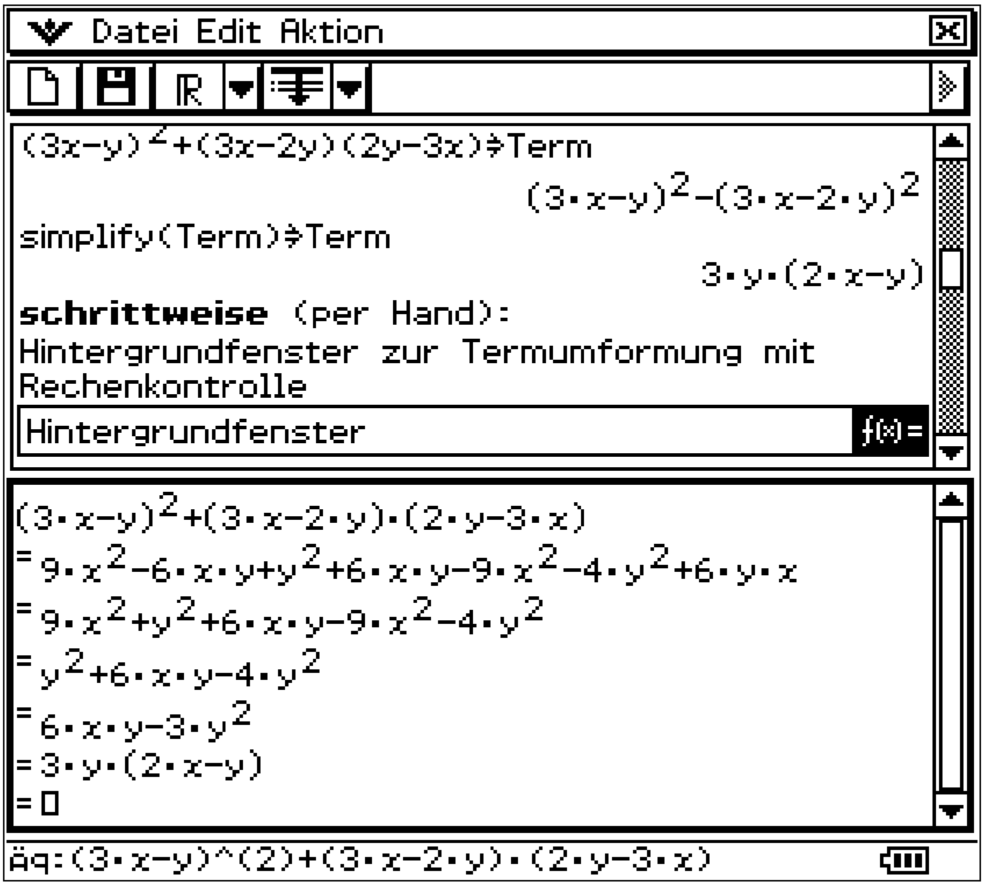
30×36=1080

Hintergrundfenster „Nachprüfen“ zu Aufg. 2a (Termvereinfachung)

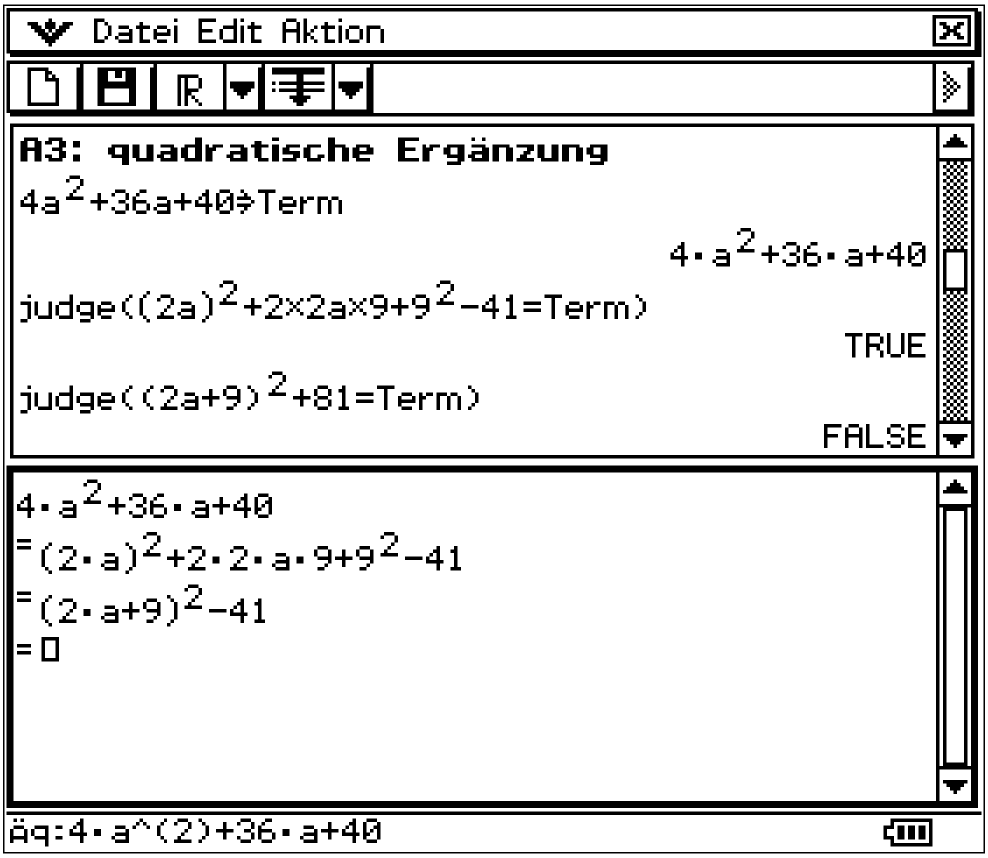




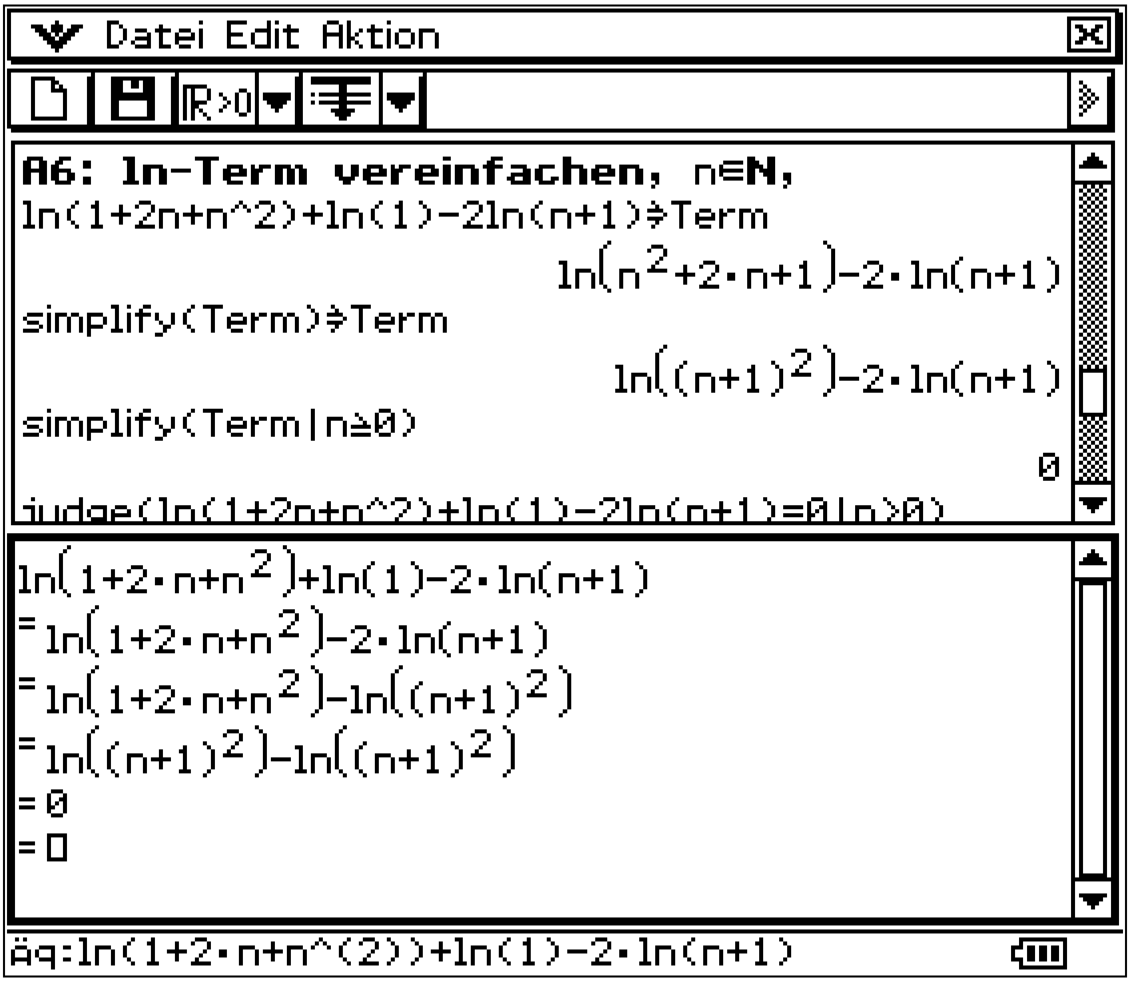
Hintergrundfenster „Nachprüfen“ zu Aufg. 2b (Termvereinfachung)



Hintergrundfenster „Nachprüfen“ zu Aufg. 3(quadr. Ergänzung)



Hintergrundfenster „Nachprüfen" zu Aufg. 6 (ln-Term)



AddIn „Real Sets" (Aufg. A1 b)