Prof. Dr. Ludwig Paditz (25.09.2015)

Einsatz eines CAS in der Lehre (Analysis)
==

CAS-GTR: ClassPad II (OS 02.00.4000, Stand Sept.2015)
(Empfohlenes Tool für Studenten, in Prüfungen zugelassen)

ClassPad-Manager Subscription für ClassPad II (OS 02.00.4000)
(PC-Emulator Hochschullizenz - kostenfrei für Studierende und Mitarbeiter der HTW Dresden nutzbar)

Internet: http://edu.casio.com

Beispiel aus der Analysis
======================

Man berechne die Schwerpunktskoordinaten eines Körpers mit der Dichte $\rho=\rho(x,y,z)=y^2$, der von folgenden Flächen begrenzt wird:
$z=x^2+y^2$ und $x+y+z=0$.

Lösung:
Das nach oben geöffnete Rotationsparaboloid und eine schräg liegende Ebene schneiden sich.
Der Körper liegt unterhalb der Ebene und oberhalb des

Paraboloids.

Define $z1(x,y)=x^2+y^2$

done

Define $z2(x,y)=-x-y$

done

Veranschaulichung:

3D-Grafik1 Paraboloid-Ebene (parameterfrei)

Define $xst3(s,t)=s*\cos(t)$

done

Define $yst3(s,t)=s*\sin(t)$

done

Define $zst3(s,t)=s^2$

done

3D-Grafik2 Paraboloid-Ebene (mit einer Parameterdarstell

Schnittkurve Ebene-Paraboloid:

solve($\{z=x^2+y^2, x+y+z=0\}, \{x,y,z\}$)

$$\left\{\left\{x=x, y=\frac{-\left(\sqrt{-4\cdot x^2-4\cdot x+1}+1\right)}{2}, z=-x+\frac{\sqrt{-4\cdot x^2-4\cdot x+1}}{2}+\frac{1}{2}\right\}, \left\{x=x\right.\right.$$

Die mehrdeutige CAS-Lösung ist wenig hilfreich (x frei wählbar).

per Hand:

$z1(x,y)=z2(x,y)$

$z1(x,y)=-x-y$

Für die Schnittkurve gilt

$x^2+x+y^2+y=0$

Mit quadratischer Ergänzung:

$x^2+2*\frac{1}{2}*x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+2*\frac{1}{2}*y+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2*\left(\frac{1}{2}\right)^2$, d.h.

die Schnittkurve liegt über dem Kreis mit dem Radius

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und dem Mittelpunkt $M\left(-\frac{1}{2}\middle|-\frac{1}{2}\right)$:

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Damit liegt der Körper in einem Kreiszylinder über der Kreisfläche des beschriebenen Kreises.

Define $xst4(s,t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}*\cos(t)$

done

Define $yst4(s,t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}*\sin(t)$

done

Define $zst4(s,t)=s$

done

3D-Grafik3 Paraboloid-Ebene-Zylinder Z1:… Z2:…

Beschreibung des Raumstückes in angepassten Zylinderkoordinaten:

Define $x(r,\varphi)=-\frac{1}{2}+r*\cos(\varphi)$

done

Define $y(r,\varphi)=-\frac{1}{2}+r*\sin(\varphi)$

done

mit $0 \le r \le \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$

sowie $(x(r,\varphi))^2+(y(r,\varphi))^2 \le z \le -x(r,\varphi)-y(r,\varphi)$

Damit ergibt sich folgender Integralansatz für die Gesamtmasse m, wobei die **Funktionaldeterminante r** der Koordinatentransformation zu beachten ist:

$$m:=\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{(x(r,\varphi))^2+(y(r,\varphi))^2}^{-x(r,\varphi)-y(r,\varphi)} (y(r,\varphi))^2 * r\,dz\,d\varphi\,dr$$

$$\frac{\pi}{24}$$

Das CAS liefert sofort das Ergebnis, welches nun in Einzelschritten dokumentiert werden soll:

Die inneren Grenzen:

$$(x(r,\varphi))^2+(y(r,\varphi))^2$$

$$\left(r\cdot\cos(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$-x(r,\varphi)-y(r,\varphi)$$

$$-r\cdot\cos(\varphi)-r\cdot\sin(\varphi)+1$$

Der Integrand, von z unabhängig:

$$(y(r,\varphi))^2 * r$$

$$r\cdot\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2$$

Das innere Integral:

$$\int_{(x(r,\varphi))^2+(y(r,\varphi))^2}^{-x(r,\varphi)-y(r,\varphi)} (y(r,\varphi))^2 * r\,dz =$$

$$r\cdot\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2 * \int_{\left(r\cdot\cos(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2}^{-r\cdot\cos(\varphi)-r\cdot\sin(\varphi)+1} 1\,dz \;=$$

$$r\cdot\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2 *$$

$$\left((z|z=-r\cdot\cos(\varphi)-r\cdot\sin(\varphi)+1)-\left(z|z=\left(r\cdot\cos(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\cdot\sin(\varphi)\right.\right.\right.$$

Vereinfachung mit den eingesetzten Grenzen:

$$(z|z=-r\cdot\cos(\varphi)-r\cdot\sin(\varphi)+1)-\left(z|z=\left(r\cdot\cos(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\cdot\sin(\varphi)-\right.\right.$$

$$-\left(r\cdot\cos(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2-\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2-r\cdot\cos(\varphi)-r\cdot\sin(\varphi)+1$$

simplify(ans)

$$-r^2+\frac{1}{2}$$

Der Integrand für das mittlere Integral:

$$r\cdot\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2 * \left(-r^2+\frac{1}{2}\right)$$

$$-r\cdot\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(r^2-\frac{1}{2}\right)$$

Die Integration:

$$\int_0^{2\pi} r\cdot\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2 * \left(-r^2+\frac{1}{2}\right)d\varphi \;=$$

$$r\cdot\left(-r^2+\frac{1}{2}\right) * \int_0^{2\pi}\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2 d\varphi$$

das Integral:

$$\int_0^{2\pi}\left(r\cdot\sin(\varphi)-\frac{1}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$\frac{4\cdot r^2\cdot\pi+4\cdot r+2\cdot\pi}{4}-r$$

factor(ans)

$$\frac{(2\cdot r^2+1)\cdot\pi}{2}$$

Der Integrand für das äußere Integral:

$$r\cdot\left(-r^2+\frac{1}{2}\right)*\frac{(2\cdot r^2+1)\cdot\pi}{2}$$

$$\frac{-r\cdot\left(r^2-\frac{1}{2}\right)\cdot(2\cdot r^2+1)\cdot\pi}{2}$$

simplify(ans)

$$-r^5\cdot\pi+\frac{r\cdot\pi}{4}$$

Der letzte Integrationsschritt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} -r^5\cdot\pi+\frac{r\cdot\pi}{4}dr$$

$$\frac{\pi}{24}$$

Die Schwerpunktskoordinaten ergeben sich nun wie folgt:

von oben:

Define $x(r,\varphi)=-\frac{1}{2}+r*\cos(\varphi)$

done

Define $y(r,\varphi)=-\frac{1}{2}+r*\sin(\varphi)$

done

$$xs:=\frac{1}{m}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{(x(r,\varphi))^2+(y(r,\varphi))^2}^{-x(r,\varphi)-y(r,\varphi)} x(r,\varphi)(y(r,\varphi))^2 r dz$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$ys:=\frac{1}{m}\int_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{(x(r,\varphi))^2+(y(r,\varphi))^2}^{-x(r,\varphi)-y(r,\varphi)} y(r,\varphi)(y(r,\varphi))^2 r dz$$

$$-\frac{3}{4}$$

$$zs:=\frac{1}{m}\int_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{(x(r,\varphi))^2+(y(r,\varphi))^2}^{-x(r,\varphi)-y(r,\varphi)} z\cdot(y(r,\varphi))^2 r\,dz\,d\varphi\,dr$$

$$\frac{35}{32}$$

Die Teilschritte sind entsprechend der Masseberechnung auszuführen.

Ergebnis:

Schwerpunkt $S\left(-\frac{1}{2}\,|\,-\frac{3}{4}\,|\,\frac{35}{32}\right)$

Didaktik:

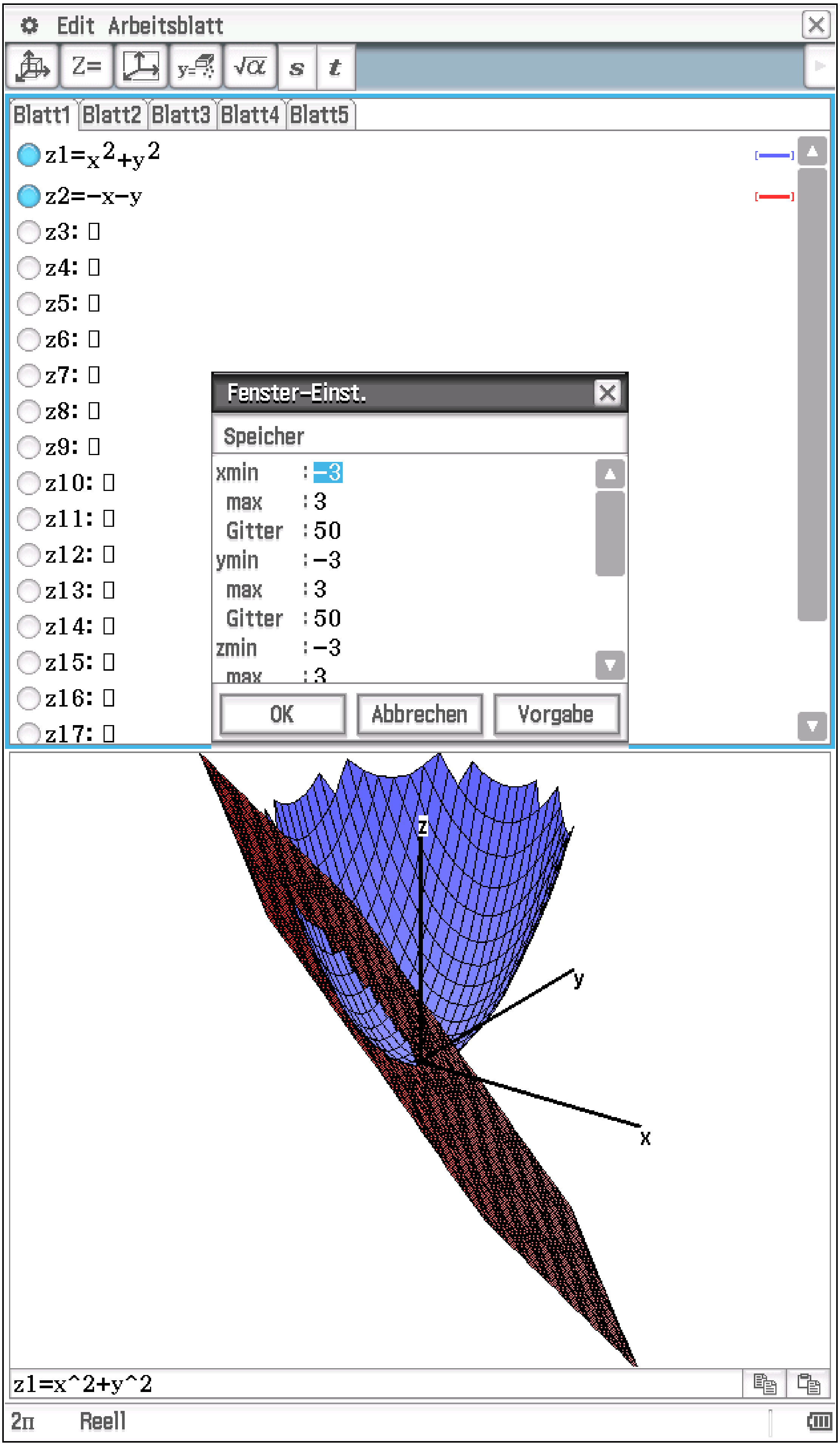
Durch das CAS besteht eine gute Rechenkontrolle der Teilschritte und führt zum fehlerfreien Rechnen. Durch die 3D-Grafik wird das räumliche Verständnis gefestigt. Gleichzeitig werden die Formeln für die passende Parameterdarstellung geübt. Die Arbeit mit CAS-Software bzw. CAS-GTR wurde mit einer Lehrplanreform (2004) in den sächsischen Gymnasien verankert. Die Arbeit mit diesen Tools wird dort, wo es sinnvoll erscheint, in der Hochschule fortgesetzt.

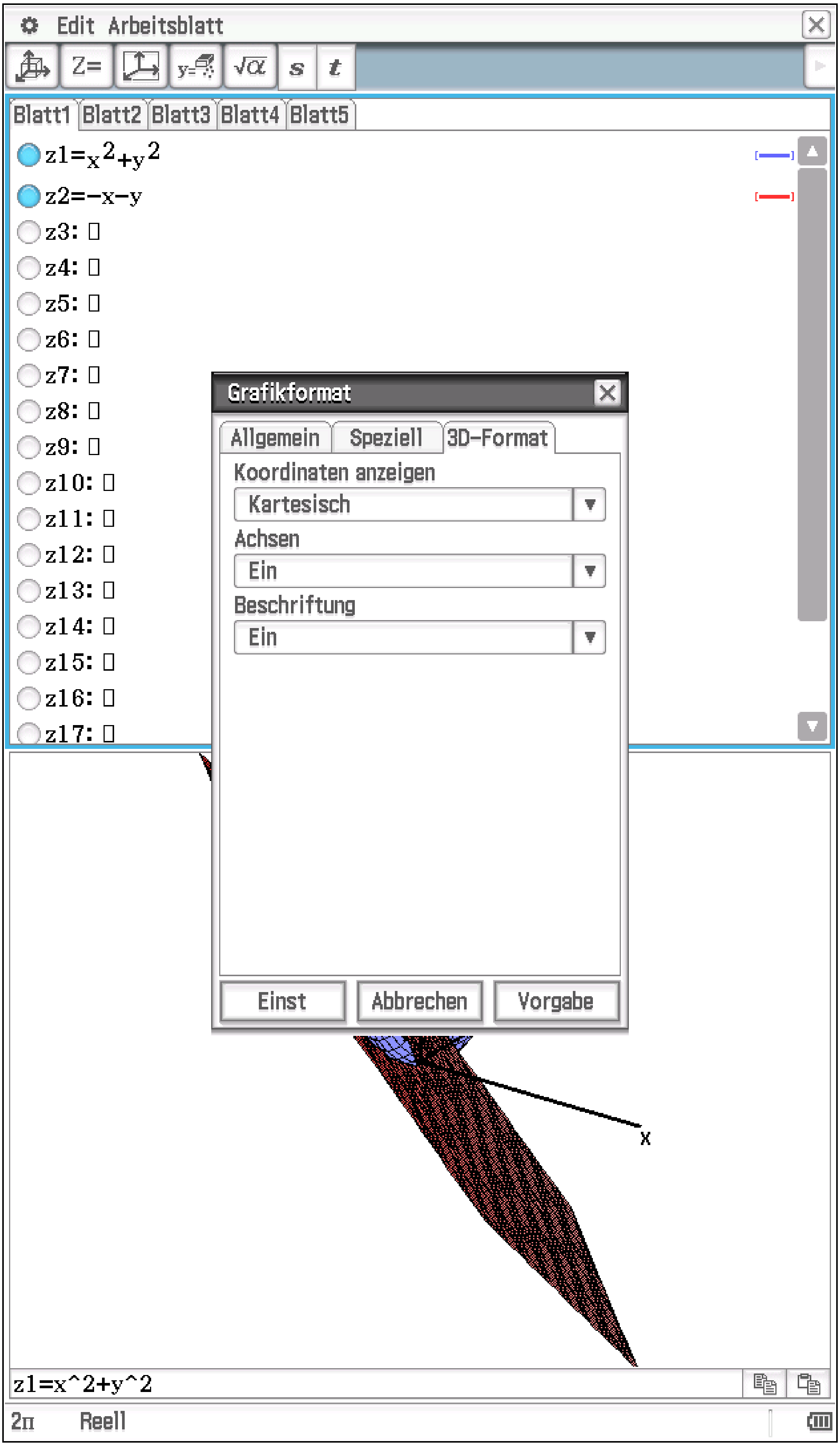
Die eActivity ist ein spezielles Arbeitsfenster, in dem wechselseitig Textverarbeitung und mathematische Berechnungen ausgeführt werden können. Zusätzlich können verschiedenartige Hintergrundfenster eingebunden werden, z.B. 3D-Grafiken (mit Grafik-Editor und eigentlicher 3D-Grafik). Das Gesamtdokument kann als pdf generiert werden (z.B. mit der Freeware PDFCreator 2.1), um es den Studenten als Handout oder zum Download zu geben. Die eActivity kann direkt als vcp-File für die Studenten bereitgestellt werden, welches dann unkompliziert per USB in den CAS-GTR importiert werden kann.

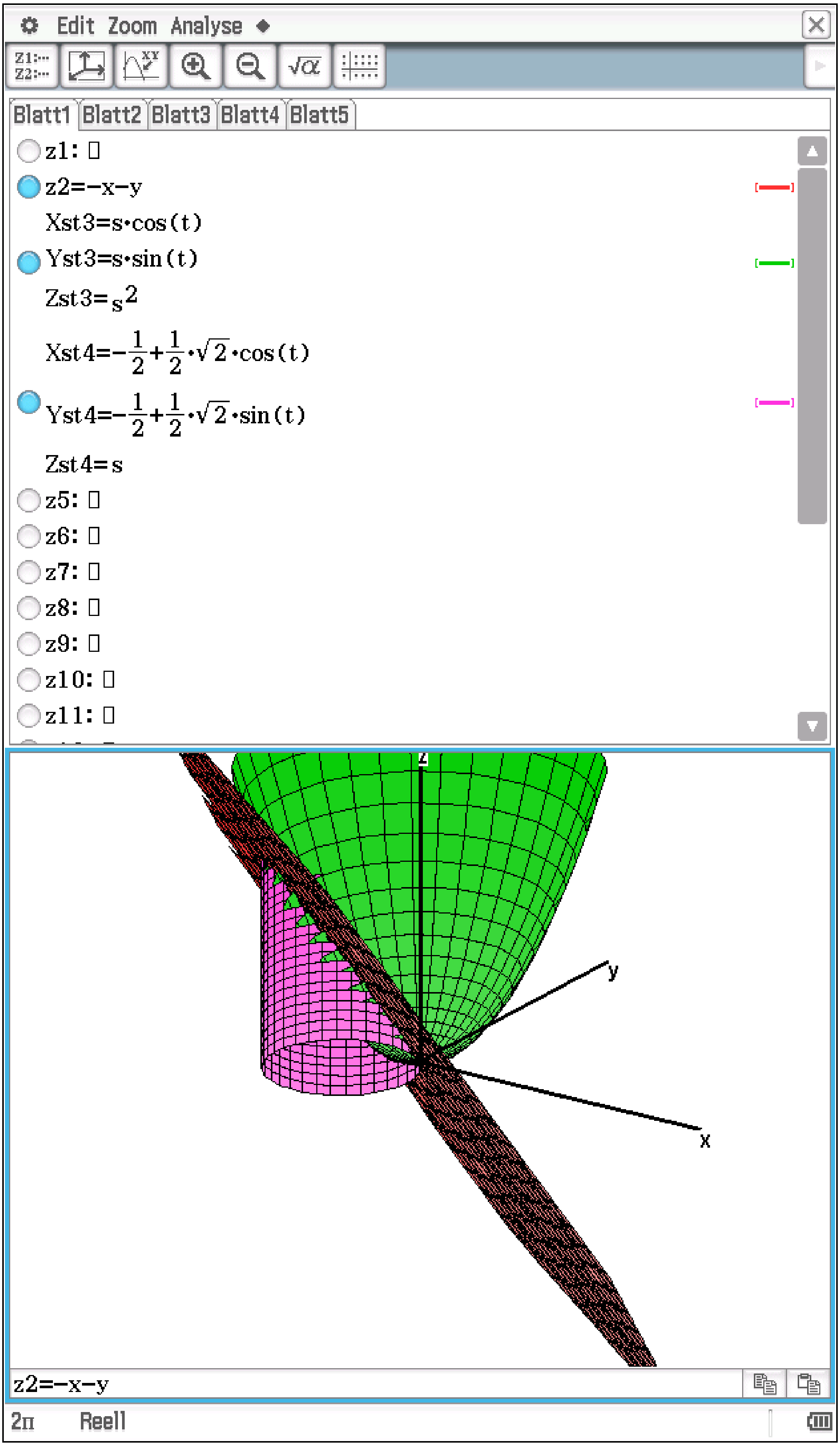
Download pdf
http://www.htw-dresden.de/~paditz/Karlsruhe2015-1.pdf

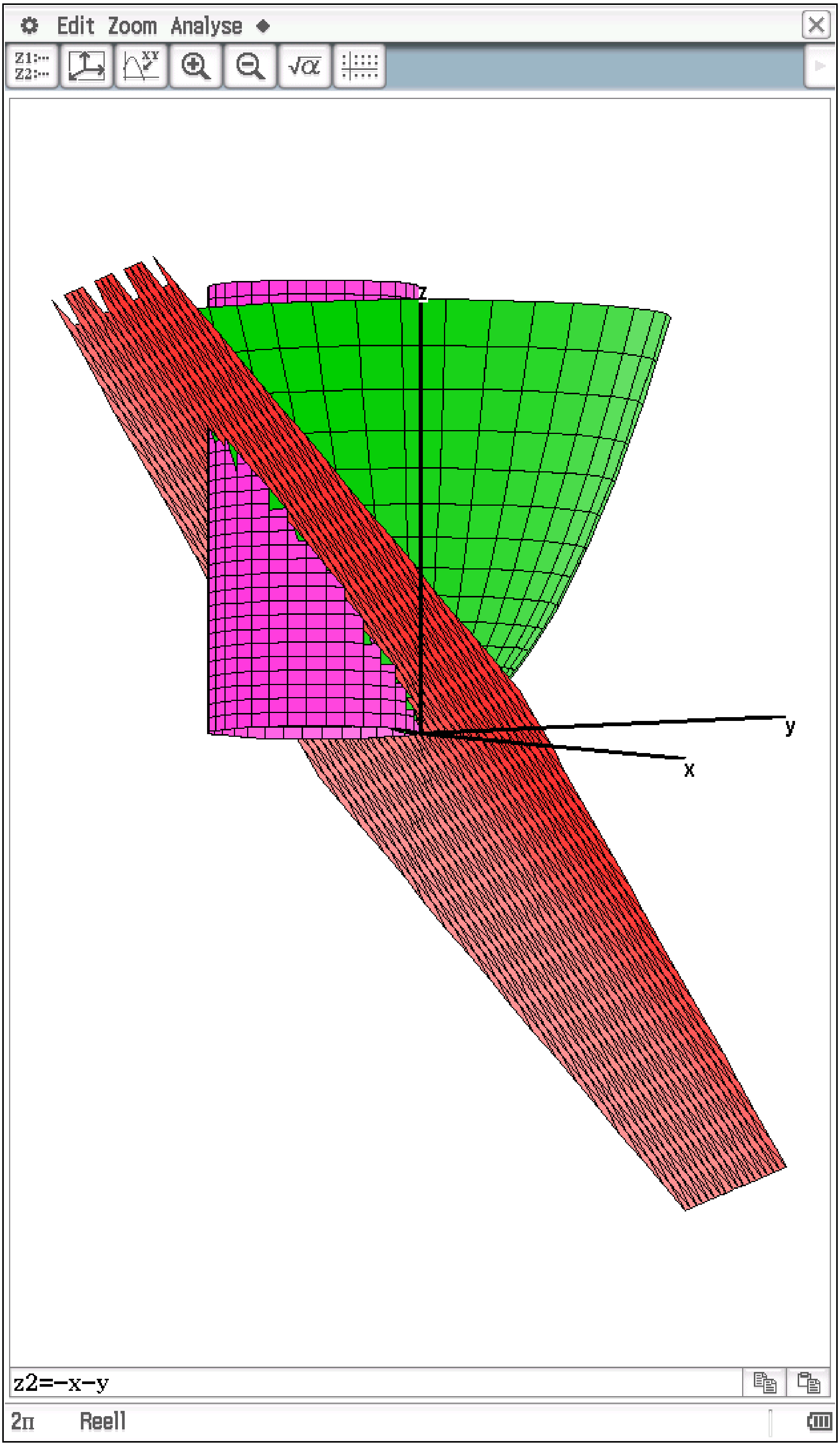
Download vcp
http://www.htw-dresden.de/~paditz/Karlsruhe2015-1.vcp

Das vcp-File kann mit der kostenfreien Testversion (90 Tage) des **ClassPad-Manager** Subscription für ClassPad II (OS 02.00.4000) geöffnet und bearbeitet werden.
Download ClassPad-Manager
https://edu.casio.com/freetrial/en/freetrial_list.php


Edit Arbeitsblatt
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=x^2+y^2
z2=−x−y
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
z12:
z13:
z14:
z15:
z16:
z17:
Fenster-Einst.
Speicher
xmin : −3
max : 3
Gitter : 50
ymin : −3
max : 3
Gitter : 50
zmin : −3
max : 3
OK
Abbrechen
Vorgabe
z
y
x
z1=x^2+y^2
2π Reell


Edit Arbeitsblatt
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=x^2+y^2
z2=−x−y
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
z12:
z13:
z14:
z15:
z16:
z17:
Grafikformat
Allgemein
Speziell
3D-Format
Koordinaten anzeigen
Kartesisch
Achsen
Ein
Beschriftung
Ein
Einst
Abbrechen
Vorgabe
x
z1=x^2+y^2
2π
Reell


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1:
z2=−x−y
Xst3=s·cos(t)
Yst3=s·sin(t)
Zst3=s2
Xst4=−1/2+1/2·√2·cos(t)
Yst4=−1/2+1/2·√2·sin(t)
Zst4=s
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
z
y
x
z2=−x−y
2π Reell


Edit Zoom Analyse
z
y
x
z2=−x−y
2π Reell