

**Einsatz eines CAS in der Lehre (Analysis)**

=====

**CAS-GTR:** ClassPad II (OS 02.00.4000, Stand Sept.2015)  
(Empfohlenes Tool für Studenten, in Prüfungen zugelassen)

**ClassPad-Manager** Subscription für ClassPad II (OS  
02.00.4000)  
(PC-Emulator Hochschullizenz – kostenfrei für  
Studierende und Mitarbeiter der HTW Dresden nutzbar)

**Internet:** <http://edu.casio.com>

**Beispiel aus der Analysis**

=====

Man berechne die Schwerpunktskoordinaten eines Körpers mit  
der Dichte  $\rho=\rho(x,y,z)=y^2$ , der von folgenden Flächen begrenzt  
wird:

$$z=x^2+y^2 \text{ und } x+y+z=0.$$

**Lösung:**

Das nach oben geöffnete Rotationsparaboloid und eine schräg  
liegende Ebene schneiden sich.

Der Körper liegt unterhalb der Ebene und oberhalb des

Paraboloids.

$$\text{Define } z1(x, y) = x^2 + y^2$$

done

$$\text{Define } z2(x, y) = -x - y$$

done

Veranschaulichung:

3D-Grafik1 Paraboloid-Ebene (parameterfrei)

Z1: ...  
Z2: ...

$$\text{Define } xst3(s, t) = s * \cos(t)$$

done

$$\text{Define } yst3(s, t) = s * \sin(t)$$

done

$$\text{Define } zst3(s, t) = s^2$$

done

3D-Grafik2 Paraboloid-Ebene (mit einer Parameterdarstellung)

Z1: ...  
Z2: ...

**Schnittkurve Ebene-Paraboloid:**

$$\text{solve}(\{z = x^2 + y^2, x + y + z = 0\}, \{x, y, z\})$$

$$\left\{ \left\{ x = x, y = \frac{-\left(\sqrt{-4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1} + 1\right)}{2}, z = -x + \frac{\sqrt{-4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1}}{2} + \frac{1}{2} \right\}, \left\{ x = x \right. \right\}$$

Die mehrdeutige CAS-Lösung ist wenig hilfreich (x frei wählbar).

per Hand:

$$z1(x, y) = z2(x, y)$$

$$z1(x, y) = -x - y$$

Für die Schnittkurve gilt

$$x^2 + x + y^2 + y = 0$$

Mit quadratischer Ergänzung:

$$x^2 + 2 * \frac{1}{2} * x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 2 * \frac{1}{2} * y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 * \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ d. h.}$$

die Schnittkurve liegt über dem Kreis mit dem Radius

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ und dem Mittelpunkt } M\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2}\right):$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Damit liegt der Körper in einem Kreiszyylinder über der Kreisfläche des beschriebenen Kreises.

$$\text{Define } xst4(s, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} * \cos(t)$$

done

$$\text{Define } yst4(s, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} * \sin(t)$$

done

$$\text{Define } zst4(s, t) = s$$

done

3D-Grafik3 Paraboloid-Ebene-Zylinder

Z1:…  
Z2:…

Beschreibung des Raumstückes in angepassten  
Zylinderkoordinaten:

$$\text{Define } x(r, \varphi) = -\frac{1}{2} + r * \cos(\varphi)$$

done

$$\text{Define } y(r, \varphi) = -\frac{1}{2} + r * \sin(\varphi)$$

done

mit  $0 \leq r \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$  und  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

sowie  $(x(r, \varphi))^2 + (y(r, \varphi))^2 \leq z \leq -x(r, \varphi) - y(r, \varphi)$

Damit ergibt sich folgender Integralansatz für die Gesamtmasse  $m$ , wobei die **Funktionaldeterminante**  $r$  der Koordinatentransformation zu beachten ist:

$$m := \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{(x(r, \varphi))^2 + (y(r, \varphi))^2}{z}}^{-x(r, \varphi) - y(r, \varphi)} (y(r, \varphi))^2 * r dz d\varphi dr$$

$\frac{\pi}{24}$

Das CAS liefert sofort das Ergebnis, welches nun in Einzelschritten dokumentiert werden soll:

Die inneren Grenzen:

$$(x(r, \varphi))^2 + (y(r, \varphi))^2$$

$$\left(r \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$-x(r, \varphi) - y(r, \varphi)$$

$$-r \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\varphi) + 1$$

Der Integrand, von  $z$  unabhängig:

$$(y(r, \varphi))^2 * r$$

$$r \cdot \left(r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2}\right)^2$$

Das innere Integral:

$$\int_{\frac{(x(r, \varphi))^2 + (y(r, \varphi))^2}{z}}^{-x(r, \varphi) - y(r, \varphi)} (y(r, \varphi))^2 * r dz =$$

$$r \cdot \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \int_{\left( r \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2}^{-r \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\varphi) + 1} 1 dz =$$

$$r \cdot \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot$$

$$\left( z \mid z = -r \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\varphi) + 1 \right) - \left( z \mid z = \left( r \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 \right)$$

Vereinfachung mit den eingesetzten Grenzen:

$$\left( z \mid z = -r \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\varphi) + 1 \right) - \left( z \mid z = \left( r \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 \right) - \left( r \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 - r \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\varphi) + 1$$

simplify (ans)

$$-r^2 + \frac{1}{2}$$

Der Integrand für das mittlere Integral:

$$r \cdot \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left( -r^2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$-r \cdot \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left( r^2 - \frac{1}{2} \right)$$

Die Integration:

$$\int_0^{2\pi} r \cdot \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left( -r^2 + \frac{1}{2} \right) d\varphi =$$

$$r \cdot \left( -r^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot \int_0^{2\pi} \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 d\varphi$$

das Integral:

$$\int_0^{2\pi} \left( r \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right)^2 d\varphi$$

$$\frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi + 4 \cdot r + 2 \cdot \pi}{4} - r$$

factor (ans)

$$\frac{(2 \cdot r^2 + 1) \cdot \pi}{2}$$

Der Integrand für das äußere Integral:

$$r \cdot \left(-r^2 + \frac{1}{2}\right) * \frac{(2 \cdot r^2 + 1) \cdot \pi}{2}$$

$$\frac{-r \cdot \left(r^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot (2 \cdot r^2 + 1) \cdot \pi}{2}$$

simplify (ans)

$$-r^5 \cdot \pi + \frac{r \cdot \pi}{4}$$

Der letzte Integrationsschritt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} -r^5 \cdot \pi + \frac{r \cdot \pi}{4} dr$$

$$\frac{\pi}{24}$$

Die Schwerpunktskoordinaten ergeben sich nun wie folgt:

von oben:

$$\text{Define } x(r, \varphi) = -\frac{1}{2} + r \cdot \cos(\varphi)$$

done

$$\text{Define } y(r, \varphi) = -\frac{1}{2} + r \cdot \sin(\varphi)$$

done

$$xs := \frac{1}{m} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{-x(r, \varphi) - y(r, \varphi)}{(x(r, \varphi))^2 + (y(r, \varphi))^2} x(r, \varphi) (y(r, \varphi))^2 r d\varphi dr$$



$$y_s := \frac{1}{m} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{-x(r, \varphi) - y(r, \varphi)}{(x(r, \varphi))^2 + (y(r, \varphi))^2} y(r, \varphi) (y(r, \varphi))^2 r dz$$

$-\frac{1}{2}$

$$z_s := \frac{1}{m} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{-x(r, \varphi) - y(r, \varphi)}{(x(r, \varphi))^2 + (y(r, \varphi))^2} z \cdot (y(r, \varphi))^2 r dz d\varphi dr$$

$-\frac{3}{4}$

$\frac{35}{32}$

Die Teilschritte sind entsprechend der Masseberechnung auszuführen.

### Ergebnis:

Schwerpunkt  $S\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{3}{4} \mid \frac{35}{32}\right)$

### Didaktik:

Durch das CAS besteht eine gute Rechenkontrolle der Teilschritte und führt zum fehlerfreien Rechnen. Durch die 3D-Grafik wird das räumliche Verständnis gefestigt. Gleichzeitig werden die Formeln für die passende Parameterdarstellung geübt. Die Arbeit mit CAS-Software bzw. CAS-GTR wurde mit einer Lehrplanreform (2004) in den sächsischen Gymnasien verankert. Die Arbeit mit diesen Tools wird dort, wo es sinnvoll erscheint, in der Hochschule fortgesetzt.

Die eActivity ist ein spezielles Arbeitsfenster, in dem wechselseitig Textverarbeitung und mathematische Berechnungen ausgeführt werden können. Zusätzlich können verschiedenartige Hintergrundfenster eingebunden werden, z.B. 3D-Grafiken (mit Grafik-Editor und eigentlicher 3D-Grafik). Das Gesamtdokument kann als pdf generiert werden (z.B. mit der Freeware PDFCreator 2.1), um es den Studenten als Handout oder zum Download zu geben. Die eActivity kann direkt als vcp-File für die Studenten bereitgestellt werden, welches dann unkompliziert per USB in den CAS-GTR importiert werden kann.

#### **Download pdf**

<http://www.htw-dresden.de/~paditz/InnovativeLehre2015.pdf>

#### **Download vcp**

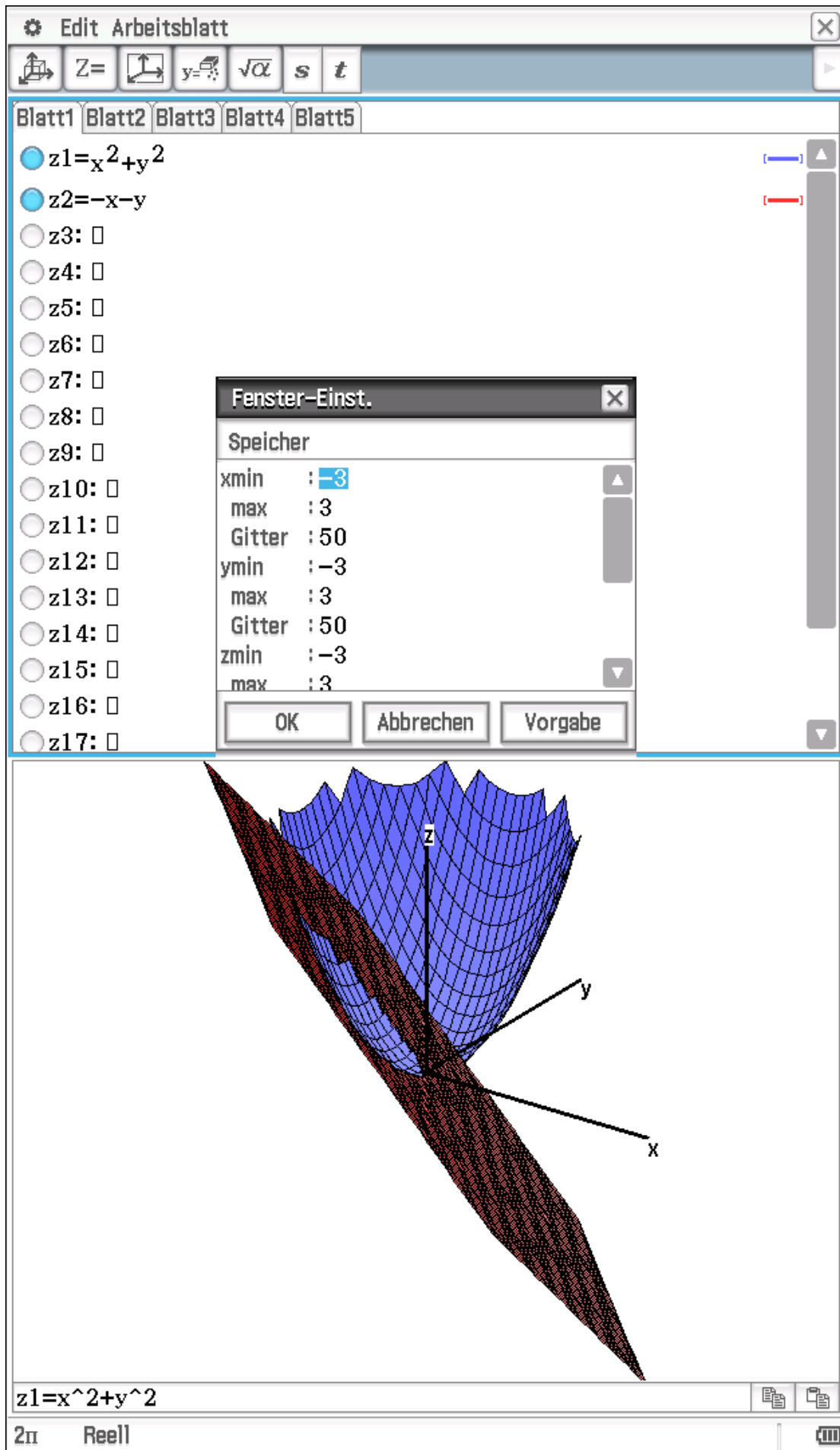
<http://www.htw-dresden.de/~paditz/InnovativeLehre2015.vcp>

Das vcp-File kann mit der kostenfreien Testversion (90 Tage) des **ClassPad-Manager** Subscription für ClassPad II (OS 02.00.4000) geöffnet und bearbeitet werden.

#### **Download ClassPad-Manager**

[https://edu.casio.com/freetrial/en/freetrial\\_list.php](https://edu.casio.com/freetrial/en/freetrial_list.php)





Edit Arbeitsblatt

$Z=$   $y=$   $\sqrt{\alpha}$   $s$   $t$

Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5

- $z1=x^2+y^2$
- $z2=-x-y$
- $z3: \square$
- $z4: \square$
- $z5: \square$
- $z6: \square$
- $z7: \square$
- $z8: \square$
- $z9: \square$
- $z10: \square$
- $z11: \square$
- $z12: \square$
- $z13: \square$
- $z14: \square$
- $z15: \square$
- $z16: \square$
- $z17: \square$

**Grafikformat**

Allgemein **Speziell** 3D-Format

Koordinaten anzeigen  
Kartesisch

Achsen  
Ein

Beschriftung  
Ein

Einst Abbrechen Vorgabe

$z1=x^2+y^2$

2π Reell

