Prof. Dr. L. Paditz 28.01.2014

Mathe1 (Jan. 2014)

==================

13.Ü

Heft C1. 1-4 (Grenzwerte, Beschränktheit, Konv.-kriterien)

1. 1.a)

Define $a(n)=\frac{5n\hat{}2-10n}{8n\hat{}2-5n+3}$

done

$\lim\limits_{n\to\infty}(a(n))$

$$\frac{5}{8}$$

1. Lösungsweg:

Termumformung n^2 kürzen:

$\frac{\text{numerator}(a(n))}{n\hat{}2}$

$$\frac{5\cdot n^2-10\cdot n}{n^2}$$

simplify(ans)

$$\frac{-10}{n}+5$$

$\frac{\text{denominator}(a(n))}{n\hat{}2}$

$$\frac{8\cdot n^2-5\cdot n+3}{n^2}$$

simplify(ans)

$$\frac{-5}{n}+\frac{3}{n^2}+8$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{-10}{n}+5}{\frac{-5}{n}+\frac{3}{n^2}+8}\right)=\dfrac{5}{8}$ sofort erkennbar.

2. Lösungsweg: R.v.B. /l'H.

Define f(n)=numerator(a(n))

done

Define g(n)=denominator(a(n))

done

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{5\cdot x^2-10\cdot x}{8\cdot x^2-5\cdot x+3}$$

$$\frac{\text{diff}(f(x),x,1)}{\text{diff}(g(x),x,1)}$$

$$\frac{10\cdot x-10}{16\cdot x-5}$$

$$\frac{\text{diff}(f(x),x,2)}{\text{diff}(g(x),x,2)}$$

$$\frac{5}{8}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\text{diff}(f(x),x,2)}{\text{diff}(g(x),x,2)}\right)=\dfrac{5}{8}$, somit $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{5}{8}$

1. 1b)

Define $a(n)=\dfrac{\sqrt{4n^3+n}}{3n+1}$

done

$\lim_{n\to\infty} (a(n))$

∞

1. Lösungsweg:

divergente Minorante $a(n) > \frac{\sqrt{4n^3}}{3n+n} > \frac{2n\sqrt{n}}{4n} = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ -> ∞

2. Lösungsweg: R.v.B. /l'H.

Define f(n)=numerator(a(n))

done

Define g(n)=denominator(a(n))

done

$\frac{f(x)}{g(x)}$

$\frac{\sqrt{4\cdot x^3+x}}{3\cdot x+1}$

$\frac{\text{diff}(f(x),x,1)}{\text{diff}(g(x),x,1)}$

$\frac{12\cdot x^2+1}{6\cdot\sqrt{4\cdot x^3+x}}$

führt so nicht zur Entscheidung!

gemeinsame Wurzel nutzen:

Define $a(n)=\sqrt{\frac{4n^3+n}{(3n+1)^2}}$

done

und unter der Wurzel die Entscheidung herbeiführen:

Define $b(n)=\frac{4n^3+n}{(3n+1)^2}$

done

Define f(n)=numerator(b(n))

done

Define g(n)=denominator(b(n))

done

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{4\cdot x^3+x}{(3\cdot x+1)^2}$$

$$\frac{\text{diff}(f(x),x,1)}{\text{diff}(g(x),x,1)}$$

$$\frac{12\cdot x^2+1}{6\cdot(3\cdot x+1)}$$

$$\frac{\text{diff}(f(x),x,2)}{\text{diff}(g(x),x,2)}$$

$$\frac{4\cdot x}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\text{diff}(f(x),x,2)}{\text{diff}(g(x),x,2)}\right)=\infty, \quad \text{somit} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}\right)=\infty$$

1. 1c)

Define $a(n)=\dfrac{\sqrt{4n\hat{\ }2+3n}}{\sqrt[3]{27n\hat{\ }3-9n\hat{\ }2}}$

done

$$\lim_{n\to\infty}(a(n))$$

$$\frac{2}{3}$$

1. Lösungsweg: Termumformung (höchste Potenzen ausklammern)

$$a(n)=\frac{2n*\sqrt{1+\frac{3n}{4n\text{^}2}}}{3n*\sqrt[3]{1-\frac{9n\text{^}2}{27n\text{^}3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2*\sqrt{1+\frac{3n}{4n\text{^}2}}}{3*\sqrt[3]{1-\frac{9n\text{^}2}{27n\text{^}3}}}\right)=\frac{2}{3}$$ sofort ersichtlich!

2. Lösungsweg: gemeinsame Wurzel nutzen

$$a(n)=\frac{(4n\text{^}2+3n)^{\frac{3}{6}}}{(27n\text{^}3-9n\text{^}2)^{\frac{2}{6}}}=\sqrt[6]{\frac{(4n\text{^}2+3n)^3}{(27n\text{^}3-9n\text{^}2)^2}}$$

Define $f(n)=\text{numerator}\left(\frac{(4n\text{^}2+3n)^3}{(27n\text{^}3-9n\text{^}2)^2}\right)$

done

Define $g(n)=\text{denominator}\left(\frac{(4n\text{^}2+3n)^3}{(27n\text{^}3-9n\text{^}2)^2}\right)$

done

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{(4\cdot x^2+3\cdot x)^3}{(27\cdot x^3-9\cdot x^2)^2}$$

$$\frac{\text{diff}(f(x),x,5)}{\text{diff}(g(x),x,5)}$$

$$\frac{16\cdot(8\cdot x+3)}{9\cdot(162\cdot x-18)}$$

$$\frac{\text{diff}(f(x),x,6)}{\text{diff}(g(x),x,6)}$$

$$\frac{64}{729}$$

$\sqrt[6]{ans}$

$$\frac{2}{3}$$

Die R.v.B./l'H. bringt nach der 6.Abl. die Entscheidung.

3. Lösungsweg: unter der Wurzel n^6 kürzen

expand(f(n)/n^6)

$$64+\frac{27}{n^3}+\frac{108}{n^2}+\frac{144}{n}$$

expand(g(n)/n^6)

$$729+\frac{81}{n^2}-\frac{486}{n}$$

$$a(n)=\sqrt[6]{\frac{64+\frac{27}{n^3}+\frac{108}{n^2}+\frac{144}{n}}{729+\frac{81}{n^2}-\frac{486}{n}}} \;->\; \sqrt[6]{\frac{64}{729}}=\frac{2}{3}$$

1. 1d) divergente Minorante nutzen

Define a(n)=(2+1/n)^n

done

$\lim\limits_{n\to\infty}(a(n))$

∞

a(n)>2^n -> ∞

1. 1e) $\sum\limits_{i=1}^{n}(i)=\frac{n*(n+1)}{2}$ nutzen (Summationsidee nach

C.F.Gauß)

Summe vorwärts und rückwärts addieren:

1+2+...+n + n+(n−1)+...+1 = n*(n+1)

einfache Summe somit $\frac{n*(n+1)}{2}$

Define $a(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}\right)$

done

$\lim_{n\to\infty}(a(n))$

$\frac{1}{2}$

denn $\frac{n*(n+1)}{2n^2}=\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1+1/n}{2}$ (n kürzen usw.)

1.1f) geometr. Reihe mit $q=\frac{1}{4}$

Define $a(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^i\right)$

done

$\lim_{n\to\infty}(a(n))$

$\frac{1}{3}$

denn $\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^i\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^i\right)-1=\frac{1}{1-q}-1$ (vgl. Vorl.)

q:=1/4

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{1-q}-1$

$$\frac{1}{3}$$

1.1g)

Define $a(n)=\frac{\sin(n\hat{\ }2)}{3n}$

done

$\lim_{n\to\infty}(a(n))$

$$0$$

denn Zähler beschränkt und Nenner unbeschränkt.

1.2a)

Define $x(n)=\frac{1}{n\hat{\ }3}\sum_{i=1}^{n}(i\hat{\ }2)$

done

$\lim_{n\to\infty}(x(n))$

$$\frac{1}{3}$$

denn (vgl. Hinw.)

$\sum_{i=1}^{n}(i\hat{\ }2)$

$$\frac{2\cdot n^{3}+3\cdot n^{2}+n}{6}$$

factor(ans)

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$$

in x(n) nunmehr n^3 herauskürzen usw.

1.2b) mit binom. Formel ausquadrieren

DelVar a

done

Define $x(a,n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(a+\frac{i}{n}\right)^2\right)$

done

$\lim_{n\to\infty}(x(a,n))$

$$\frac{6\cdot a^2+6\cdot a+2}{6}$$

expand(ans)

$$a^2+a+\frac{1}{3}$$

expand$\left(\left(a+\frac{i}{n}\right)^2\right)$

$$a^2+\frac{2\cdot a\cdot i}{n}+\frac{i^2}{n^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(a+\frac{i}{n}\right)^2\right) = (n-1)a\char`^2 + \frac{2a}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(i) + \frac{1}{n\char`^2}\sum_{i=1}^{n-1}(i\char`^2)$$

Für die Teilsummen gelten die oben genannten Formeln (mit n−1 statt n in der oberen Summationsgrenze:

factor$\left(\sum_{i=1}^{n-1}(i)\right)$

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

factor$\left(\sum_{i=1}^{n-1}(i\char`^2)\right)$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(2\cdot n-1)}{6}$$

damit ist $x(n)=\frac{n-1}{n}*\left(a^2+\frac{2a}{n}*\frac{n}{2}+\frac{1}{n^2}*\frac{n\cdot(2\cdot n-1)}{6}\right)$, usw.

simplify$\left(\frac{n-1}{n}*\left(a^2+\frac{2a}{n}*\frac{n}{2}+\frac{1}{n^2}*\frac{n\cdot(2\cdot n-1)}{6}\right)\right)$

$$\frac{\left(a^2+a-\frac{1}{6\cdot n}+\frac{1}{3}\right)\cdot(n-1)}{n}$$

expand(ans)

$$a^2-\frac{a^2}{n}+a-\frac{a}{n}-\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{6\cdot n^2}+\frac{1}{3}$$

lim(ans, n, ∞)

$$a^2+a+\frac{1}{3}$$

1. 3a) Produkte als Fakultäten notieren

$x(n)=\frac{(n+9)!}{9!}*\frac{2*4*...*(2n-2)}{(2n-1)!}=\frac{(n+9)!}{9!}*\frac{2^{n-1}*(n-1)!}{(2n-1)!}$

Define $x(n)=\frac{(n+9)!}{9!}*\frac{2^{n-1}*(n-1)!}{(2n-1)!}$

done

$\lim_{n\to\infty}(x(n))$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n-1}\cdot(n+9)!\cdot(n-1)!}{362880\cdot(2\cdot n-1)!}\right)$$

seq(x(n), n, 1, 1000, 100)

Fehler:Überlauf

seq(x(n), n, 1, 100, 10)

{10, 487.6190476, 55.7432964, 1.261645363, 0.0129701199▶

listToMat(ans)

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 487.6190476 \\ 55.7432964 \\ 1.261645363 \\ 0.01297011996 \\ 8.330315378E-5 \\ 3.912347068E-7 \\ 1.469400964E-9 \\ 4.666787394E-12 \\ 1.300846408E-14 \end{bmatrix}$$

Vermutung: Es handelt sich um eine Nullfolge mit $0<x(n)<S<\infty$

seq(x(n),n,1,20,1)

{10,36.66666667,88,163.4285714,254.2222222,346.6666

listToMat(ans)

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 36.66666667 \\ 88 \\ 163.4285714 \\ 254.2222222 \\ 346.6666667 \\ 426.6666667 \\ 483.5555556 \\ 512 \\ 512 \\ 487.6190476 \\ 445.2173913 \\ 391.7913043 \\ 333.7481481 \\ 276.205364 \\ 222.7462613 \\ 175.4970543 \\ 135.3834419 \\ 102.4523344 \\ 76.18250509 \end{bmatrix}$$

Damit ist die kleinste obere Schranke S=512 (für n=9 oder n=

Bem.: Produkt mit dem Produktzeichen notieren:

Define $x(n)=\dfrac{\prod_{i=10}^{n+9}(i)}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}$

done

seq(x(n),n,1,20,1)

$$\left\{\frac{5\cdot(-0.5)!}{0.5!}, \frac{27.5\cdot(-0.5)!}{1.5!}, \frac{165\cdot(-0.5)!}{2.5!}, \frac{1072.5\cdot(-0.5)!}{3.5!}\right.$$

Darstellung der Fakultäten über die Gammafunktion (Bartsch S. 563o.):

Es gilt $\Gamma(x+1)=x!$

$\Gamma(-0.5)$

$$-2\cdot\sqrt{\pi}$$

$$\prod_{i=10}^{n+9}(i)$$

$$\frac{(n+9)!}{362880}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$$

$$\frac{2^n\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)!}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}$$

Damit ist

Define $x(n)=\frac{\Gamma(n+10)}{9!}*\frac{\Gamma(1/2)}{2^n\cdot\Gamma(n+1/2)}$

done

seq(x(n),n,1,20,1)

{10, 36.66666667, 88, 163.4285714, 254.2222222, 346.6666

usw.

1.3b) alle Faktoren sind pos. und kleiner als 1:

$0<x(n)<1$ (z.B.)

1.3c) alle Faktoren sind pos. und größer als 1, d.h. $x(n)>1$

Untersuchung von $\ln(x(n))$:

$x(n)=e^{\ln(x(n))}=e^{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(1+\frac{1}{2^i})\right)}<e^{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}\right)}$, denn $\ln(1+x)<x$ für $x>0$

$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}\right)$

$$\frac{2^n-1}{2^n}$$

Somit $x(n) < e^{1-\frac{1}{2\^n}} < e = 2.71828...$

done

d.h. $e = 2.71828...$ ist eine obere Schranke.

Define $x(n)=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^i}\right)$

done

seq(x(n),n,1,100,10)

{1.5,2.383067233,2.384229892,2.384231028,2.38423102▶

listToMat(ans)

$$\begin{bmatrix}1.5\\2.383067233\\2.384229892\\2.384231028\\2.384231029\\2.384231029\\2.384231029\\2.384231029\\2.384231029\\2.384231029\end{bmatrix}$$

x(500)

$$\prod_{i=1}^{500}\left(\frac{1}{2^i}+1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{500}\left(\ln(1+\frac{1}{2^i})\right)$$

Fehler:Unzureichender Speicher

Hier erreicht die (einfache TR-)Software ihre Grenzen.

1. 3d) Die Beschränktheit ist unschwer erkennbar:

$0<x(n)<1$