Prof. Dr. L. Paditz, Vorl. am 16.04.2014

Lösung der Aufgabe C8.8d mithilfe der Integraltafel Bartsch S. 760, Nr. (450)

geg. $f(x)=\dfrac{1}{5-4\cdot\sin(x)+3\cdot\cos(x)}$

ges. $\int_{\square}^{\square} f(x)\,dx$

Lösung: Integral (450) lautet mit a=1, b=5, c=3, d=−4

$$\int_{\square}^{\square}\frac{1}{b+c\times\cos(ax)+d\times\sin(ax)}dx=\int_{\square}^{\square}\frac{1}{b+\sqrt{c^2+d^2}\sin(ax+\tau)}d(x+\tau/a)$$

mit $\tan(\tau)=\dfrac{c}{d}$, τ ist eine zusätzliche Konstante,

d.h. $0 > \tau = \arctan\left(\dfrac{c}{d}\right) = \arctan\left(\dfrac{3}{-4}\right) = -\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right) >$

$-\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{4}$ und damit $\mathbf{\sin(\tau) < 0}$.

Wegen $\sin(\tau)=\dfrac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}$,

d. h. $\mathbf{\sin(\tau) = \frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{3}{5} > 0,}$

ist damit die $\sin(\tau)$-Bedingung im Integral (450) nicht erfüllt!
(Welches Vorzeichen soll $\sin(\tau)$ haben?)

Ausweg: $\int_{\square}^{\square} f(x)\,dx = (-1)\times\int_{\square}^{\square}\frac{1}{-5+4\cdot\sin(x)-3\cdot\cos(x)}\,dx$

betrachten:
mit a=1, b=−5, c=−3, d=4

$$\tau = -\arctan\left(\frac{3}{4}\right), \quad \sin(\tau) = \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} = -\frac{3}{5}$$

Subst.: $t=x+\tau/a=x+\tau$, $dt=dx$

$$(-1)\times\int_{\square}^{\square}\frac{1}{-5+4\cdot\sin(x)-3\cdot\cos(x)}\,dx = (-1)\times\int_{\square}^{\square}\frac{1}{-5+5\cdot\sin(t)}\,dt =$$

$$\frac{1}{5}\times\int_{\square}^{\square}\frac{1}{1-\sin(t)}\,dt$$

Weiter mit Bartsch S. 751, Nr. (337):

$$\frac{1}{5}\times\int_{\square}^{\square}\frac{1}{1-\sin(t)}\,dt = \frac{1}{5}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{5}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{\arctan(3/4)}{2}\right)+C$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{\tan^{-1}(3/4)}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\left(\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2+1}{10}$$

simplify(ans)

$$\frac{1}{3\cdot\cos(x)-4\cdot\sin(x)+5}$$

alternative Überlegung zur Rettung der $\sin(\tau)$-Bedingung:

geg. $f(x)=\dfrac{1}{5-4\cdot\sin(x)+3\cdot\cos(x)}=\dfrac{1}{5+4\cdot\sin(-x)+3\cdot\cos(-x)}$

ges. $\displaystyle\int_{\square}^{\square}\frac{1}{5+4\cdot\sin(-x)+3\cdot\cos(-x)}dx$

Lösung: Integral (450) kann sofort angewendet werden:

$a=-1$, $b=5$, $c=3$, $d=4$, $\tan(\tau)=3/4$, d.h. $\tau=\arctan(3/4)$

und $\sin(\tau)=3/5$ passt sofort:

$\sin(\tau)\,|\,\tau=\tan^{-1}(3/4)$

$$\frac{3}{5}$$

Subst.: $t=x-\tau$

$$\int_{\square}^{\square}\frac{1}{5+5\cdot\sin(-x+\tau)}d(x-\tau)=\int_{\square}^{\square}\frac{1}{5-5\cdot\sin(t)}d(t)$$

$$\int_{\square}^{\square} \frac{1}{5-5\cdot\sin(t)}\, d(t)$$

$$\frac{-2}{5\cdot\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)-1\right)}$$

Ergebnis: $\frac{-2}{5\cdot\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)-1\right)}+C$ mit $t=x-\arctan(3/4)$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-2}{5\cdot\left(\tan\left(\frac{x-\tan^{-1}(3/4)}{2}\right)-1\right)}\right)$$

$$\frac{\left(\tan\left(\frac{x-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{2}\right)\right)^2+1}{5\cdot\left(\tan\left(\frac{x-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{2}\right)-1\right)^2}$$

simplify(ans)

$$\frac{1}{3\cdot\cos(x)-4\cdot\sin(x)+5}$$