6.HA E3.9,10,17,18,20 SS2014

==============================

Aufg. E3.9:

============

Lösung nach Bartsch (22.Aufl.) S.592

PDG vom Typ **$P*u_x+Q*u_y=R$**

a) mit $P=x^2$, $Q=-y^2$, $R=u$

aus der Proportion **dx:dy:du=P:Q:R**

gewinnt man zwei **charakteristische Dgln:**

z.B.

dy/dx=Q/P und du/dx=R/P

dSolve(y'=-y^2/x^2,x,y)

$$\left\{y=\frac{x}{x\cdot \mathrm{const}(1)-1}\right\}$$

d.h. $y=\frac{x}{x\cdot C_1-1}$ (**Charakteristik** der ersten Dgl.)

und

dSolve(u'=u/x^2,x,u)

$$\left\{u=e^{-x^{-1}}\cdot \mathrm{const}(1)\right\}$$

d.h. $u=e^{-1/x}*C_2$ (**Charakteristik** der zweiten Dgl.)

Hieraus folgt:

$C_1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ und $C_2=u*e^{1/x}$.

Sei nun $w=w(C_1,C_2)$ eine beliebige Funktion von C_1 und C_2 mit stetiger Ableitung.

Dann ist $w(C_1,C_2)=w\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},u*e^{1/x}\right)=0$ die implizite Darstellung der Lösung.

explizit: $u(x,y)*e^{1/x}=v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, $v=v(C_1)$ beliebige Funktion von C_1 mit stetiger Ableitung.

Zusatzbedingung:

================

$$\begin{bmatrix}x\\y\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\t\\t^2\end{bmatrix},\ t\in\mathbf{R},\ \text{ergibt:}$$

$t^2*e^1=v\left(1+\frac{1}{t}\right)$, d.h. mit $s=1+\frac{1}{t}$ hat man $v(s)=\frac{1}{(s-1)^2}*e$.

Damit ist

$$u(x,y)*e^{1/x}=v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^2}*e$$

und schließlich

$$u(x,y)=e^{1-1/x}*\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^2}=e^{1-1/x}*\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^{-2}.$$

=======   ==================

Probe:

======

Define $u(x,y)=e^{1-1/x}*\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^{-2}$

done

u(1,t)

t^2

$x^2\times\frac{d}{dx}(u(x,y))-y^2\times\frac{d}{dy}(u(x,y))=u(x,y)$

$$\frac{2\cdot x^3\cdot y^3\cdot e^{-x^{-1}+1}}{(x\cdot y-x-y)^3}-\frac{x^2\cdot\left(x\cdot y^3+y^3+x\cdot y^2\right)\cdot e^{-x^{-1}+1}}{(x\cdot y-x-y)^3}=\frac{e^{-x^{-1}+1}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^2}$$

simplify(ans)

$$\frac{x^2\cdot y^2\cdot e^{-x^{-1}+1}}{(x\cdot y-x-y)^2}=\frac{e^{-x^{-1}+1}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^2}$$

judge(ans)

TRUE

b) mit P=y, Q=-x, R=2xyu

aus der Proportion **dx:dy:du=P:Q:R**
gewinnt man zwei **charakteristische Dgln:**

z.B.
dy/dx=Q/P und du/dx=R/P

dSolve(y'=-x/y,x,y)

$$\left\{y=-\sqrt{-x^2+2\cdot \mathrm{const}(1)},\ y=\sqrt{-x^2+2\cdot \mathrm{const}(1)}\right\}$$

d.h. $y^2=-x^2+2\cdot C=-x^2+C_1$

dSolve(u'=2x×u, x, u)

$$\left\{u=e^{x^2}\cdot \mathrm{const}(1)\right\}$$

d.h. $u=e^{x^2}\cdot C_2$

Dann ist $w(C_1,C_2)=w\left(y^2+x^2,\ u*e^{-x^2}\right)=0$ die implizite Darstellung der Lösung.

explizit: $u(x,y)*e^{-x^2}=v\left(y^2+x^2\right)$, $v=v(C_1)$ beliebige Funktion von C_1 mit stetiger Ableitung.

Zusatzbedingung:

================

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$, ergibt:

$t*e^{-t^2}=v\left(2\times t^2\right)$, d.h. mit $s=2\times t^2$ hat man

$v(s)=\pm\sqrt{s/2}*e^{-s/2}$.

Damit ist

$u(x,y)*e^{-x^2}=v\left(x^2+y^2\right)=\pm\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/2}*e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}$

und schließlich

$u(x,y)=\pm\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/2}*e^{x^2}*e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}$

$=\pm\sqrt{(x^2+y^2)/2}*e^{(x^2-y^2)/2}$.
==================================

Probe:
=======

Define $u(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)/2}*e^{(x^2-y^2)/2}$

done

$u(t,t)$

$|t|$

$y\times\frac{d}{dx}(u(x,y))-x\times\frac{d}{dy}(u(x,y))=2x\times y\times u(x,y)$

$$\frac{y\cdot\left(\sqrt{2}\cdot x\cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}}+x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\cdot\sqrt{2\cdot(x^2+y^2)}\right)}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x\cdot\left(\sqrt{2}\cdot y\right.}{}$$

simplify(ans)

$$x\cdot y\cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\cdot\sqrt{2\cdot(x^2+y^2)}=x\cdot y\cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\cdot\sqrt{2\cdot(x^2+y^2)}$$

judge(ans)

TRUE

Aufg. E3.10
============

das **vollständige Integral** wird aus einem Tabellenbuch entnommen:

Polyanin/Zaitsev/Moussiaux:

Handbook of first order partial differential equations

ISBN 0-415-27267-X (2002)

S.396, PDG 14.4.2.8

$(u_x)^k (u_y)^n - f(x)g(y)h(u) = 0$ mit $k=1$, $n=2$, $f(x)=1$, $g(y)=1$, $h(u)= u^3$

$$\int \frac{1}{k+n\sqrt{h(u)}}du = (C_1)^n \int k\sqrt{f(x)}\,dx + \frac{1}{(C_1)^k}\int n\sqrt{g(y)}\,dy + C_2$$

d.h.

Define $h(u)=u^3$

done

Define $f(x)=1$

done

Define $g(y)=1$

done

$1 \Rightarrow k$

1

$2 \Rightarrow n$

2

DelVar u

done

$$\int \frac{1}{k+n\sqrt{h(u)}}du = (C1)^n \int k\sqrt{f(x)}\,dx + \frac{1}{(C1)^k}\int n\sqrt{g(y)}\,dy + C2$$

$$\ln(|u|) = C1^2 \cdot x + C2 + \frac{y}{C1}$$

solve$(\ln(|u|)=C1^2\cdot x+C2+\frac{y}{C1}, u)$

$$\left\{u=-e^{C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y}, u=e^{C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y}\right\}$$

Lösung:

$u(x,y)=\pm e^{C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y}$

Probe:

Define $u(x,y)=e^{C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y}$

done

$(u(x,y))^3-\frac{d}{dx}(u(x,y))\times\left(\frac{d}{dy}(u(x,y))\right)^2=0$

$$e^{3\cdot(C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y)}-e^{C1^2\cdot x+2\cdot(C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y)+C2+C1}$$

simplify(ans)

$$e^{3\cdot(C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y)}-e^{3\cdot C1^2\cdot x+3\cdot C2+3\cdot C1^{-1}\cdot y}=0$$

judge(ans)

TRUE

Aufg. E3.17

============

a) $a=1$, $b=-\sin(x)$, $c=-(\cos(x))^2$

ergibt: $b^2-ac=1>0$, **hyperbol. PDG**

charakteristische Dgl.:

$y'=-\sin(x)\pm1$ ergibt die **Charakteristiken**

$y(x)=\cos(x)+x+C_1$ und $y(x)=\cos(x)-x+C_2$

Koord.-Transf. mit $g(x,y)=\text{const.}$ und $h(x,y)=\text{const.}$ ergibt
$x^*=\cos(x)+x-y$ und $y^*=\cos(x)-x-y$

Ableitungen:
$u_x=U_{x^*}\cdot(-\sin(x)+1)+U_{y^*}\cdot(-\sin(x)-1)$
$u_y=U_{x^*}\cdot(-1)+U_{y^*}\cdot(-1)$

hieraus:
$u_{xx}=U_{x^*x^*}\cdot(-\sin(x)+1)^2+2U_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)+1)*(-\sin(x)-1)+U$
$\quad +U_{x^*}\cdot(-\cos(x))+U_{y^*}\cdot(-\cos(x))$
$u_{xy}=U_{x^*x^*}\cdot(-\sin(x)+1)*(-1)+U_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)+1)*(-1)$
$\quad +U_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)-1)*(-1)+U_{y^*y^*}\cdot(-\sin(x)-1)*(-1)$
$u_{yy}=U_{x^*x^*}\cdot(-1)^2+2U_{x^*y^*}\cdot(-1)^2+U_{y^*y^*}\cdot(-1)^2$

Einsetzen:
$u_{xx}-2\sin(x)u_{xy}-(\cos(x))^2u_{yy}-\cos(x)u_y=$
$U_{x^*x^*}\cdot(-\sin(x)+1)^2+2U_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)+1)*(-\sin(x)-1)+U_{y^*y^*}$
$+U_{x^*}\cdot(-\cos(x))+U_{y^*}\cdot(-\cos(x))$
$+2\sin(x)*(U_{x^*x^*}\cdot(-\sin(x)+1)+U_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)+1)+U_{x^*y^*}\cdot(-\mathrm{si}$
$((\sin(x))^2-1)*(U_{x^*x^*}+2U_{x^*y^*}+U_{y^*y^*})$
$+\cos(x)(U_{x^*}+U_{y^*})=$
$0\cdot U_{x^*x^*}+0\cdot U_{y^*y^*}+(-2+2(\sin(x))^2-4(\sin(x))^2+2(\sin(x))^2-2$

d.h.

$-4U_{x^* y^*}=0$ bzw. $U_{x^* y^*}=0.$

========

Integration nach y^*:

$U_{x^*}=C(x^*)$

hieraus:

$$U(x^*, y^*)=\int C(x^*)\,dx^*+B(y^*)=A(x^*)+B(y^*)$$

Rücktransformation: A, B bel. wählbare 2mal diff.-bare Funktionen:

$$u(x, y)=A(\cos(x)+x-y)+B(\cos(x)-x-y)$$

====================================

Beispiel: $A(t)=t*e^t$, $B(t)=\sqrt{t}$

Define $u(x,y)=(\cos(x)+x-y)*e^{\cos(x)+x-y}+\sqrt{\cos(x)-x-y}$

done

$$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))-2*\sin(x)*\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)-(\cos(x))^2*\frac{d^2}{dy^2}(u($$

$$(\cos(x)+x-y)\cdot(\sin(x)-1)^2\cdot e^{\cos(x)+x-y}+2\cdot(\sin(x)-1)^2\cdot e^{\cos(}$$

expand(ans)

$$-(\cos(x))^3\cdot e^{\cos(x)+x-y}-x\cdot(\cos(x))^2\cdot e^{\cos(x)+x-y}+y\cdot(\cos(x$$

simplify(ans)

0=0

b) $a=x^2$, $b=-xy$, $c=y^2$

ergibt: $b^2-ac=0$, **parabol. PDG**

charakteristische Dgl.:

$x^2\cdot(y')^2+2x\cdot y\cdot y'+y^2=0$, d.h. $(x\cdot y'+y)^2=0$

dSolve(x•y'+y=0, x, y)

$$\left\{y=\frac{\text{const}(1)}{|x|}\right\}$$

ergibt eine **Charakteristik**

$y(x)=\frac{1}{x}\cdot C_1$ und $y(x)=C_2$ (frei gewählt)

Koord.-Transf. mit $g(x,y)=\text{const.}=x\cdot y$ und $h(x,y)=\text{const.}=y$:

$x^*=x\cdot y$ und $y^*=y$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(x\cdot y) & \frac{d}{dy}(x\cdot y) \\ \frac{d}{dx}(y) & \frac{d}{dy}(y) \end{bmatrix}\right)$$

$$y$$

Mit der frei gewählten Charakteristik muss die det-Bedingung (2.2) überprüft werden, die die umkehrbare Eindeutigkeit der Transformation sichert.

Bem. Oft ist $h(x,y)=x$ oder $h(x,y)=y$ eine geeignete zweite Charakteristik.

Ableitungen:

$u_x=U_{x^*}\cdot y+U_{y^*}\cdot 0=U_{x^*}\cdot y$

$u_y=U_{x^*}\cdot x+U_{y^*}\cdot 1=U_{x^*}\cdot x+U_{y^*}$

hieraus:

$u_{xx}=U_{x^*x^*}\cdot y^2+U_{x^*y^*}\cdot 0$

$u_{xy}=U_{x^*x^*}\cdot y\cdot x+U_{x^*y^*}\cdot y+U_{x^*}$

$u_{yy}=U_{x^*x^*}\cdot x^2+2U_{x^*y^*}\cdot x+U_{y^*y^*}$

Einsetzen:

$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=$

$x^2\cdot U_{x^*x^*}\cdot y^2-2xy\cdot(U_{x^*x^*}\cdot y\cdot x+U_{x^*y^*}\cdot y+U_{x^*})$

$+y^2\cdot(U_{x^*x^*}\cdot x^2+2U_{x^*y^*}\cdot x+U_{y^*y^*})$

$+x\cdot U_{x^*}\cdot y+y\cdot(U_{x^*}\cdot x+U_{y^*})=$

$y^2\cdot U_{y^*y^*}+y\cdot U_{y^*}=0$, d.h.

$U_{y^*y^*}+\frac{1}{y^*}U_{y^*}=0$

Integration als gewönhliche Dgl.

$\mathrm{dSolve}(U''+\frac{1}{y}*U'=0, y, U)$

$\{U=\ln(y)\cdot \mathrm{const}(2)+\mathrm{const}(1)\}$

Somit

$U(x^*, y^*)=\ln(y^*)\cdot C_1(x^*)+C_2(x^*)$ und

$\mathbf{u(x, y)=\ln(|y|)\cdot C_1(xy)+C_2(xy)}$

Beispiel: $C_1(t)=t*e^t$, $C_2(t)=\sqrt{t}$

Define $u(x, y)=\ln(y)\cdot x\cdot y\cdot e^{x\cdot y}+\sqrt{x\cdot y}$

done

$$x^2\cdot\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))-2\cdot x\cdot y\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)+y^2\cdot\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))+x \blacktriangleright$$

$$\frac{x^2\cdot\left(4\cdot x\cdot y^3\cdot(x\cdot y)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln(y)\cdot e^{x\cdot y}+8\cdot y^2\cdot(x\cdot y)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln(y)\cdot e^{x\cdot y}-y^2\right)}{4\cdot(x\cdot y)^{\frac{3}{2}}}\cdot \blacktriangleright$$

expand(ans)

$0=0$

c) $a=1$, $b=-1$, $c=1$ ergibt $b^2-ac=0$, **parabol. PDG**

charakteristische Dgl.:

$(y')^2+2y'+1=0$, d.h. $(y'+1)^2=0$

dSolve(y'+1=0, x, y)

{y=−x+const(1)}

ergibt eine **Charakteristik**

$y(x)=-x+C_1$ und $x=C_2$ (frei gewählt)

Koord.-Transf. mit $g(x,y)=\text{const.}=x+y$ und $h(x,y)=\text{const.}=x$:

$x^*=x+y$ und $y^*=x$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\frac{d}{dx}(x+y) & \frac{d}{dy}(x+y)\\ \frac{d}{dx}(x) & \frac{d}{dy}(x)\end{bmatrix}\right)$$

-1

Mit der frei gewählten Charakteristik muss die det-Bedingung (2.2) überprüft werden, die die umkehrbare Eindeutigkeit der Transformation sichert.

Ableitungen:

$u_x=U_{x^*}\cdot 1+U_{y^*}\cdot 1=U_{x^*}+U_{y^*}$

$u_y=U_{x^*}\cdot 1+U_{y^*}\cdot 0=U_{x^*}$

hieraus:

$u_{xx}=U_{x^*x^*}+2U_{x^*y^*}+U_{y^*y^*}$

$u_{xy}=U_{x^*x^*}+U_{x^*y^*}$

$u_{yy}=U_{x^*x^*}$

Einsetzen:

$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=$

$U_{x^*x^*}+2U_{x^*y^*}+U_{y^*y^*}-2\cdot(U_{x^*x^*}+U_{x^*y^*})+U_{x^*x^*}=$

$U_{y^*y^*}=0$

Integration:

$U_{y^*}=C(x^*)$

erneute Integration:

$U(x^*,y^*)=y^*\cdot C(x^*)+D(x^*)$

und

$u(x,y)=x\cdot C(x+y)+D(x+y)$

=======================

Beispiel: $C_1(t)=t*e^t$, $C_2(t)=\sqrt{t}$

Define $u(x,y)=x\cdot(x+y)\cdot e^{x+y}+\sqrt{x+y}$

done

$$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))-2\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)+\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))=0$$

$$\frac{4\cdot x^2\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{x+y}+4\cdot x\cdot y\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{x+y}+16\cdot x\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{x+y}+8}{4\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}}$$

expand(ans)

0=0

Aufg. E3.18

============

a=1, b=1, c=−3 ergibt $b^2-ac=4>0$, **hyperbol. PDG**

charakteristische Dgl.:

$(y')^2-2y'-3=0$, d.h. $y'=1\pm 2$

dSolve(y'=3, x, y)

{y=3·x+const(1)}

dSolve(y'=−1, x, y)

{y=−x+const(1)}

x*=x+y und y*=3x−y

Ableitungen:

$u_x=U_{x^*}\cdot 1+U_{y^*}\cdot 3=U_{x^*}+3U_{y^*}$

$u_y=U_{x^*}\cdot 1+U_{y^*}\cdot(-1)=U_{x^*}-U_{y^*}$

hieraus:

$u_{xx}=U_{x^*x^*}+2U_{x^*y^*}\cdot 3+U_{y^*y^*}\cdot 9$

$u_{xy}=U_{x^*x^*}+U_{x^*y^*}\cdot(-1)+3U_{y^*x^*}+3U_{y^*y^*}\cdot(-1)$

$u_{yy}=U_{x^*x^*}+2U_{x^*y^*}\cdot(-1)+U_{y^*y^*}$

Einsetzen:

$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=$

$U_{x*x*}+6U_{x*y*}+9U_{y*y*}+2\cdot(U_{x*x*}+2U_{x*y*}-3U_{y*y*})$

$-3(U_{x*x*}-2U_{x*y*}+U_{y*y*})=$

$16U_{x*y*}=0$

Integration nach y*, dann nach x*:

$U_{x*}=C(x*)$ und $U=A(x*)+B(y*)$, d.h.

$u(x,y)=A(x+y)+B(3x-y)=A(x+y)+D(x-y/3)$

Anpassung an die Anfangsbedingungen:

$u(x,0)=A(x)+D(x)=3x^2$

$u_y(x,0)=A'(x+y)+D'(x-y/3)*(-1/3)|y=0$

$\quad\quad =A'(x)-D'(x)/3=0$

dSolve({A'+D'=6x, A'-D'/3=0}, x, {A, D})

$$\left\{A=\frac{3\cdot x^2}{4}+\text{const}(2), D=\frac{9\cdot x^2}{4}+\text{const}(1)\right\}$$

$A(x+y)=\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}+C1$, $D(x-y/3)=\frac{9\cdot(x-y/3)^2}{4}+C2$,

Define $u(x,y)=\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}+C1+\frac{9\cdot(x-y/3)^2}{4}+C2$

done

$u(x,0)=3\cdot x^2$

$$3\cdot x^2+C1+C2=3\cdot x^2$$

C1+C2=0 setzen.

$\frac{d}{dy}(u(x,y))|y=0$

$$0$$

$\text{simplify}\left(\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}+\frac{9\cdot(x-y/3)^2}{4}\right)$

$$3\cdot x^2+y^2$$

Ergebnis: $\mathbf{u(x,y)=3\cdot x^2+y^2}$

================

Aufg. E3.20

============

$(x^2u_x)_x=x^2u_{yy}$ mit den AB $u(x,0)=x$ und $u_y(x,0)=1$

Transformation der PDG mit der Subst. $v(x,y)=x*u(x,y)$:

$u_x=\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{x}\right)=\frac{v_x x-v}{x^2}$ ergibt $x^2u_x=v_x x-v$

Weiter:

$\frac{d}{dx}(v_x x-v)=v_{xx}x+v_x-v_x=v_{xx}x.$

Nun

$u_y=\frac{d}{dy}\left(\frac{v}{x}\right)=\frac{v_y}{x}$ ergibt $u_{yy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{v_y}{x}\right)=\frac{v_{yy}}{x}$, d.h. $x^2u_{yy}=x*v_{yy}$

Damit ergibt sich die hyperbolische PDG: $v_{xx}-v_{yy}=0$.

charakteristische Dgl. mit $a=1$, $b=0$ und $c=-1$:

$(y')^2=1$, d.h. $y'=\pm1$.

$y=x+C_1$ bzw. $y=-x+C_2$ ergeben z.B. die Transformationen

$x*=g(x,y)=x-y$ und $y*=h(x,y)=x+y$

Umrechnung der Ableitungen:

$u_x=V_{x*}+V_{y*}$

$u_y=-V_{x*}+V_{y*}$

und

$u_{xx}=V_{x*x*}+V_{x*y*}+V_{y*x*}+V_{y*y*}$

$u_{yy}=V_{x*x*}-V_{x*y*}-V_{y*x*}+V_{y*y*}$

Hieraus ergibt sich die Normalform $V_{x*y*}=0$

Integration: $V_{x*}=C(x*)$ und

$$V=\int C(x*)\,dx*+B(y*)=A(x*)+B(y*)$$

Rücktransformation: $v(x,y)=A(x-y)+B(x+y)$

schließlich die **allgemeine Lösung der PDG:**

$$u(x,y)=\frac{1}{x}*(A(x-y)+B(x+y))$$

==========================

Berücksichtigung der AB:

$$u(x,0)=\frac{1}{x}*(A(x)+B(x))=x$$

und

$$u_y(x,0)=\frac{1}{x}*(-A'(x-y)+B'(x+y))\,|y=0$$

$$=\frac{1}{x}*(-A'(x)+B'(x))=1$$

Damit ergibt sich die Hilfsaufgabe $A+B=x^2$ und $-A'+B'=x$

dSolve({A'+B'=2x, −A'+B'=x}, x, {A, B})

$$\left\{A=\frac{x^2}{4}+\text{const}(2),\ B=\frac{3\cdot x^2}{4}+\text{const}(1)\right\}$$

Somit

$$\frac{1}{x}*(A(x-y)+B(x+y))=\frac{1}{x}*\left(\frac{(x-y)^2}{4}+\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}+C\right)$$

Define $u(x,y)=\frac{1}{x}*\left(\frac{(x-y)^2}{4}+\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}+C\right)$

done

$u(x,0)=x$

$$\frac{x^2+C}{x}=x$$

Somit $C=0$

Ergebnis:

Define $u(x,y)=\frac{1}{x}*\left(\frac{(x-y)^2}{4}+\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}\right)$

done

simplify(u(x,y))

$$\frac{y^2}{x}+x+y$$

Die gesuchte Funktion lautet: $u(x,y)=x+y+\frac{y^2}{x}$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2*\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)=x^2*\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))$$

$$2\cdot x=2\cdot x$$

$u(x,0)$

$$x$$

$\frac{d}{dx}(u(x,y))|y=0$

$$1$$