5.HA E3.6,12-16,19 - SS2013

Aufg. E3.6:

Koordinatentransformation, vgl. [1] S.244u.

$x^* = g(x,y) = x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)$
$y^* = h(x,y) = -x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)$

mit $\alpha=\frac{\pi}{4}=45°$.

in Vektorform mit Matrix **A**:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

det(**A**) ist die **Funktionaldeterminate** der Koordinatentransformation:

$$\det(\mathbf{A}) = \left\| \begin{bmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{bmatrix} \right\| = (\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2 = 1 \neq 0$$

Umkehrtransformation bei det(**A**)≠0 vorhanden:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2} & \frac{-\sin(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2} \\ \frac{\sin(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2} & \frac{\cos(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x* \\ y* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x* \\ y* \end{bmatrix}$$

Umrechnung der Ableitungen von u(x,y) in die neuen Koordinaten $u(x(x*,y*),y(x*,y*))=\mathbf{U}(x*,y*)$:

$u_x=\mathbf{U}_x*\cdot\cos(\alpha)+\mathbf{U}_y*\cdot(-\sin(\alpha))$
$u_y=\mathbf{U}_x*\cdot\sin(\alpha)+\mathbf{U}_y*\cdot\cos(\alpha)$

Gleichsetzen $u_x=u_y$ ergibt mit $\cos(\alpha)=\sin(\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$\mathbf{U}_x*\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}-\mathbf{U}_y*\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=\mathbf{U}_x*\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}+\mathbf{U}_y*\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$, d.h.

$\mathbf{U}_y*=0$ (vereinfachte PDG nach Koordinatentransformation)

Lösung:

$\mathbf{U}(x*,y*)=C(x*)=C\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(x+y)\right)=w(x+y)$,

d.h. **$u(x,y)=w(x+y)$.**

Aufg. E3.12:
==============

$u_{xx}=0$ ergibt $u(x,y)=C1(y)\cdot x+C2(y)+C$
$u_{xy}=0$ ergibt

$$u(x,y)=\int_{\square}^{\square} D1(x)\,dx+D2(y)=F1(x)+C+D2(y)$$

$u_{yy}=0$ ergibt $u(x,y)=E1(x)\cdot y+E2(x)+C$

wobei die auftretenden Funktionen C1,C2,F1,D2,E1,E2 zusammenpassen müssen, d.h.

$C2(y)=D2(y)=E1(x)\cdot y$ mit E1=const.
und $E2(x)=F1(x)=C1(y)\cdot x$ mit C1=const.

Ergebnis:
$u(x,y)=C1\cdot x+E1\cdot y+C$, wobei C1,E1 und C Integrationskonstanten sind.

Aufg. E3.13:
=============
Ausgangspunkt Formel (2.1) der V:
$a\cdot u_{xx}+2b\cdot u_{xy}+c\cdot u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$

a)
$a=x^2$, $b=x\cdot y$, $c=y^2$ ergeben (Def.1 der V):
$b^2-ac=0$, d.h. **parabolische** PDG

b)
3.5a) $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=0$ ergeben
$b^2-ac>0$, d.h. **hyperbolische** PDG

3.5d) $a=1$, $b=0$, $c=0$ ergeben
$b^2-ac=0$, d.h. **parabolische** PDG

3.5e) $a=0$, $b=0$, $c=1$ ergeben
$b^2-ac=0$, d.h. **parabolische** PDG

c)
$a=1$, $b=x$, $c=y$ ergeben
$b^2-ac=x^2-y>0$, d.h. **hyperbolische** PDG für $y<x^2$
$b^2-ac=x^2-y=0$, d.h. **parabolische** PDG für $y=x^2$
$b^2-ac=x^2-y>0$, d.h. **elliptische** PDG für $y>x^2$

d), vgl. a)
$a=x^2$, $b=x\cdot y$, $c=y^2$ ergeben
$b^2-ac=0$, d.h. **parabolische** PDG

Aufg. E3.14:
=============
a) $u_{xx}+x\cdot y\cdot u_{yy}=0$ mit $x<0$ und $y>0$, d.h.
$a=1$, $b=0$, $c=x\cdot y$ und $b^2-ac=-x\cdot y>0$,
d.h. **hyperbolische** PDG

Eine passende Koordinatentransformation
$x^*=g(x,y)$, $y^*=h(x,y)$ für die hyperbolische PDG
führt auf die Normalform

$\mathbf{U}_{x^*y^*}=F^{**}(x^*,y^*,\mathbf{U},\mathbf{U}_{x^*},\mathbf{U}_{y^*})$ (vereinfachte PDG
nach Koordinatentransformation)

oder mit **nochmaliger** Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

(Drehung um $\alpha=45°$, vgl. **E3.**6) auf die andere
Normalform einer hyperbolischen PDG
$\tilde{\mathbf{u}}_{mm}-\tilde{\mathbf{u}}_{nn}=\tilde{F}(m,n,\tilde{u},\tilde{u}_m,\tilde{u}_n)$

Zur Ermittlung der passenden Koordinatentransformation
$x^*=g(x,y)$, $y^*=h(x,y)$ wird die **charakteristische Dgl.**
$a\cdot(y')^2-2b\cdot y'+c=0$ gelöst:
==================

$$y'=\frac{1}{a}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-a\cdot c}\right)=\pm\sqrt{-x\cdot y}\text{, d.h.}$$

$$\text{dSolve}\left(y'=\sqrt{-x\cdot y},x,y\right)|x<0 \text{ and } y>0$$
$$\left\{y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x\cdot \text{const}(1)\cdot\sqrt{-x}-9\cdot(\text{const}(1))^2\right)}{36}\right\}$$

$$\text{dSolve}\left(y'=-\sqrt{-x\cdot y},x,y\right)|x<0 \text{ and } y>0$$
$$\left\{y=\frac{-\left(4\cdot x^3+12\cdot x\cdot \text{const}(1)\cdot\sqrt{-x}-9\cdot(\text{const}(1))^2\right)}{36}\right\}$$

Die Lösungen

$$y=\frac{-\left(4\cdot x^3\pm 12\cdot x\cdot C\cdot\sqrt{-x}-9\cdot C^2\right)}{36}$$

=============================

heißen **Charakteristiken.**

Die impliziten Lösungsdarstellungen $C=g(x,y)$ bzw. $C=h(x,y)$

$$\text{solve}\left(y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x\cdot C\cdot\sqrt{-x}-9\cdot C^2\right)}{36},C\right)$$
$$\left\{C=\frac{-2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}-2\cdot\sqrt{y},C=\frac{-2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}+2\cdot\sqrt{y}\right\}$$

$$\text{solve}\left(y=\frac{-\left(4\cdot x^3+12\cdot x\cdot C\cdot\sqrt{-x}-9\cdot C^2\right)}{36},C\right)$$

$$\left\{C=\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}-2\cdot\sqrt{y},C=\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}+2\cdot\sqrt{y}\right\}$$

sind passende Koordinatentransformationen:

$$x^*=g(x,y)=\frac{-2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}+2\cdot\sqrt{y}=\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+2\cdot\sqrt{y}$$

==

$$y^*=h(x,y)=\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}+2\cdot\sqrt{y}=-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+2\cdot\sqrt{y}$$

==

(Auch andere Transformationen lassen sich aus den obigen Charakteristiken gewinnen, die sich jedoch nur in den Vorzeichen oder Variablen unterscheiden.)

Umrechnung der Ableitungen von $u(x,y)$ in die neuen Koordinaten $u(x(x^*,y^*),y(x^*,y^*))=\mathbf{U}(x^*,y^*)$, vgl. **E3.6**,

$$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\sqrt{-x}\cdot(-1)+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\sqrt{-x}=(-\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\sqrt{-x},$$

$$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=(\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$$

hieraus:

$$u_{xx}=(\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot\sqrt{-x}-\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot\sqrt{-x}+\mathbf{U}_{y^*x^*}\cdot\sqrt{-x}\cdot(-1)+$$

$$\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot\sqrt{-x})\cdot\sqrt{-x}+(-\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}\cdot(-1)$$

$$u_{yy}=(U_{x^*x^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+U_{x^*y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+U_{y^*x^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+$$

$$U_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}})\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+(U_{x^*}+U_{y^*})\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot y^{-\frac{3}{2}}$$

mit der PDG folgt mit $U_{x^*y^*}=U_{y^*x^*}$ (Satz von Schwarz)

$u_{xx}+x\cdot y\cdot u_{yy}=$

$$(U_{x^*x^*}\cdot\sqrt{-x}-2\cdot U_{x^*y^*}\cdot\sqrt{-x}+U_{y^*y^*}\cdot\sqrt{-x})\cdot\sqrt{-x}+$$

$$(U_{x^*}-U_{y^*})\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}+$$

$$x\cdot y\cdot(U_{x^*x^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+2\cdot U_{x^*y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+U_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}})\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+$$

$$x\cdot y\cdot(U_{x^*}+U_{y^*})\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot y^{-\frac{3}{2}}=$$

$$(U_{x^*}-U_{y^*})\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}+4x\cdot U_{x^*y^*}-(U_{x^*}+U_{y^*})\cdot\frac{x}{2\sqrt{y}}=0$$

Hieraus ergibt sich

$$U_{x^*y^*}=(U_{x^*}-U_{y^*})\cdot\frac{1}{8}\cdot(-x)^{-\frac{3}{2}}+(U_{x^*}+U_{y^*})\cdot\frac{1}{8\sqrt{y}},$$

d.h.

$$U_{x^*y^*}=U_{x^*}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+(-x)^{-\frac{3}{2}}\right)+U_{y^*}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-(-x)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

==

und mit der ursprünglichen Koordinatentransformation

$$\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+2\cdot\sqrt{y}=x^* \quad (1)$$

$$-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+2\cdot\sqrt{y}=y^* \quad (2)$$

folgt

(1)+(2): $\sqrt{y}=\frac{x^*+y^*}{4}$, d.h. $\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{4}{x^*+y^*}$ und

mit (1) nun

$$(-x)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(x^*-2\cdot\sqrt{y}\right)=\frac{3}{2}x^*-\frac{3}{4}(x^*+y^*)=\frac{3}{4}(x^*-y^*),$$

d.h. $(-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3(x^*-y^*)}$

Damit $\frac{1}{\sqrt{y}}-(-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{x^*+y^*}-\frac{4}{3(x^*-y^*)}=$

$$\frac{12(x^*-y^*)-4(x^*+y^*)}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=\frac{8x^*-16y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}$$

und $\frac{1}{\sqrt{y}}+(-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{x^*+y^*}+\frac{4}{3(x^*-y^*)}=$

$$\frac{12(x^*-y^*)+4(x^*+y^*)}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=\frac{16x^*-8y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}$$

Endergebnis:

$$\mathbf{U}_{x^*y^*}=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{2x^*-y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{x^*-2y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}$$

==

übergang in die andere Normalform mit neuen Koordinaten $(x^{**},y^{**})=(m,n)$

$$m=\frac{x^*+y^*}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad n=\frac{-x^*+y^*}{\sqrt{2}}$$

Umrechnung der Ableitungen von $\mathbf{U}(x^*,y^*)$ in die neuen Koordinaten $\mathbf{U}(x^*(m,n),y^*(m,n))=\tilde{u}(m,n)$, vgl. **E3.**6,

$$\mathbf{U}_{x^*}=\tilde{u}_m\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\tilde{u}_n\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=(\tilde{u}_m-\tilde{u}_n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{U}_{y^*}=\tilde{u}_m\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\tilde{u}_n\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=(\tilde{u}_m+\tilde{u}_n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

linke Seite der obigen PDG:

$$\mathbf{U}_{x^*y^*}=\left(\tilde{u}_{mm}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\tilde{u}_{mn}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\tilde{u}_{nm}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\tilde{u}_{nn}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=(\tilde{u}_{mm}-\tilde{u}_{nn})\cdot\frac{1}{2}$$

Weiter:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \quad \text{denn}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Somit $x^*=(m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y^*=(m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hieraus:

$$\frac{x^*-2y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=$$

$$\frac{(m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-2(m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{3\left(\left((m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left((m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot(m+n)-\frac{\sqrt{2}\cdot(m-n)}{2}}{3\cdot\left(\frac{(m+n)^2}{2}-\frac{(m-n)^2}{2}\right)}$$

simplify(ans)

$$\frac{\sqrt{2}\cdot(m+3\cdot n)}{12\cdot m\cdot n}$$

$$\frac{2x^*-y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=$$

$$\frac{2(m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-(m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{3\left(\left((m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left((m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(m+n)}{2}-\sqrt{2}\cdot(m-n)}{3\cdot\left(\frac{(m+n)^2}{2}-\frac{(m-n)^2}{2}\right)}$$

simplify(ans)

$$\frac{-\sqrt{2}\cdot(m-3\cdot n)}{12\cdot m\cdot n}$$

rechte Seite der obigen PDG:

$$\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{2x^*-y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{x^*-2y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=$$

$$(\breve{u}_m-\breve{u}_n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{2}\cdot(m-3\cdot n)}{12\cdot m\cdot n}+(\breve{u}_m+\breve{u}_n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot(m+}{12\cdot m\cdot}\blacktriangleright$$

$$\frac{(m+3\cdot n)\cdot(\breve{u}_m+\breve{u}_n)}{12\cdot m\cdot n}-\frac{(m-3\cdot n)\cdot(\breve{u}_m-\breve{u}_n)}{12\cdot m\cdot n}$$

simplify(ans)

$$\frac{\breve{u}_m}{2\cdot m}+\frac{\breve{u}_n}{6\cdot n}$$

Endergebnis (andere Normalform):

$$\breve{u}_{mm}-\breve{u}_{nn}=\frac{\breve{u}_m}{m}+\frac{\breve{u}_n}{3n}$$

================

b) $u_{xx}+x\cdot y\cdot u_{yy}=0$ mit $x>0$ und $y>0$, d.h.

$a=1$, $b=0$, $c=x\cdot y$ und $b^2-ac=-x\cdot y<0$,

d.h. **elliptische** PDG

Zur Ermittlung der passenden Koordinatentransformation $x^*=g(x,y)$, $y^*=h(x,y)$ wird die **charakteristische Dgl.**

$\mathbf{a\cdot(y')^2-2b\cdot y'+c=0}$ gelöst:

===================

$y'=\frac{1}{a}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-a\cdot c}\right)=\pm\sqrt{-x\cdot y}=\pm i\cdot\sqrt{x\cdot y}$, d.h. die

Lösung der Dgl. ist dann ebenfalls komplex:

$$\text{dSolve}\left(y'=i\sqrt{x\cdot y},x,y\right)|x>0 \text{ and } y>0$$

$$\left\{y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot \text{const}(1)\cdot i-9\cdot(\text{const}(1))^2\right)}{36}\right\}$$

Die Lösung

$$y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot C\cdot i-9\cdot C^2\right)}{36}$$

==============================

heißt **Charakteristik.**

Die implizite Lösungsdarstellung ist
$C=g(x,y)+i\cdot h(x,y)$

$$\text{solve}\left(y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot C\cdot i-9\cdot C^2\right)}{36},C\right)$$

$$\left\{C=-2\cdot\sqrt{y}-\frac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot i}{3},C=2\cdot\sqrt{y}-\frac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot i}{3}\right\}$$

d.h. z.B. auch $C\cdot i=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+i\cdot 2\cdot\sqrt{y}$

Realteil und Imaginärteil ergeben die erforderliche Koordinatentransformation:

$x^*=g(x,y)=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$ und $y^*=h(x,y)=2\cdot\sqrt{y}$

================ ================

(Auch andere Transformationen lassen sich aus den obigen Charakteristiken gewinnen, die sich jedoch nur in den Vorzeichen oder Variablen unterscheiden.)

Umrechnung der Ableitungen von $u(x,y)$ in die neuen Koordinaten $u(x(x^*,y^*),y(x^*,y^*))=\mathbf{U}(x^*,y^*)$, vgl. **E3.6**,

$$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\sqrt{x}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot 0=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\sqrt{x}\ ,$$

$$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot 0+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$$

hieraus:

$$u_{xx}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot \mathbf{x}+\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot 0+\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot x+\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$u_{yy}=\mathbf{U}_{y^*x^*}\cdot 0+\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{y}-\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}=\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{y}$$
$$-\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}$$

mit der PDG folgt

$$u_{xx}+x\cdot y\cdot u_{yy}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot x+\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\cdot y\cdot\Big(\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{y}$$
$$-\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}\Big)=0,$$

d.h.

$$U_{x^*}x^*+U_{y^*}y^*=-U_{x^*}\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}}+U_{y^*}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$, d.h.

Endergebnis:

$$U_{x^*}x^*+U_{y^*}y^*=-U_{x^*}\cdot\frac{1}{3x^*}+U_{y^*}\cdot\frac{1}{y^*}$$

==============================

Aufg. E3.15:

==============

$u_{xx}+y\cdot u_{yy}=0$ mit $a=1$, $b=0$ und $c=y$

a) hyperbolisch für $b^2-ac=-y>0$, d.h. $y<0$ (untere Halbebene)

b) parabolisch für $b^2-ac=-y=0$, d.h. $y=0$ (x-Achse)

c) elliptisch für $b^2-ac=-y<0$, d.h. $y>0$ (obere Halbebene)

d) $y<0$ ergibt die charakteristische Gleichung:

$y'=\frac{1}{a}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-a\cdot c}\right)=\pm\sqrt{-y}$, d.h.

$\text{dSolve}\left(y'=\sqrt{-y},x,y\right)|y<0$

$$\left\{y=\frac{-(x-\text{const}(1))^2}{4}\right\}$$

$\text{dSolve}\left(y'=-\sqrt{-y},x,y\right)|y<0$

$$\left\{y=\frac{-(x+\text{const}(1))^2}{4}\right\}$$

Die Lösungen

$$y=\frac{-(x+C)^2}{4}$$

==========

heißen **Charakteristiken.**

$$\text{solve}\left(y=\frac{-(x-C)^2}{4},C\right)$$

$$\left\{C=x-2\cdot\sqrt{-y},C=x+2\cdot\sqrt{-y}\right\}$$

$$\text{solve}\left(y=\frac{-(x+C)^2}{4},C\right)$$

$$\left\{C=-x-2\cdot\sqrt{-y},C=-x+2\cdot\sqrt{-y}\right\}$$

Die impliziten Lösungsdarstellungen C=g(x,y)
bzw. C=h(x,y)
sind passende Koordinatentransformationen:

$$x^*=g(x,y)=x+2\cdot\sqrt{-y}$$

===================

$$y^*=h(x,y)=-x+2\cdot\sqrt{-y}$$

====================

(Auch andere Transformationen lassen sich aus den obigen Charakteristiken gewinnen, die sich jedoch nur in den Vorzeichen oder Variablen unterscheiden.)

Umrechnung der Ableitungen von u(x,y) in die neuen Koordinaten $u(x(x^*,y^*),y(x^*,y^*))=\mathbf{U}(x^*,y^*)$, vgl. **E3.**6,

$u_x = \mathbf{U}_{x^*} \cdot 1 + \mathbf{U}_{y^*} \cdot (-1) = \mathbf{U}_{x^*} - \mathbf{U}_{y^*}$,

$$u_y = \mathbf{U}_{x^*} \cdot \frac{-1}{\sqrt{-y}} + \mathbf{U}_{y^*} \cdot \frac{-1}{\sqrt{-y}} = (\mathbf{U}_{x^*} + \mathbf{U}_{y^*}) \cdot \frac{-1}{\sqrt{-y}}$$

Weiter

$$u_{xx} = \mathbf{U}_{x^*x^*} - \mathbf{U}_{x^*y^*} - \mathbf{U}_{y^*x^*} + \mathbf{U}_{y^*y^*}$$

$$u_{yy} = (\mathbf{U}_{x^*x^*} + \mathbf{U}_{x^*y^*} + \mathbf{U}_{y^*x^*} + \mathbf{U}_{y^*y^*}) \cdot \frac{1}{-y} +$$

$$(\mathbf{U}_{x^*} + \mathbf{U}_{y^*}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)(-y)^{-\frac{3}{2}}$$

mit der PDG folgt mit $\mathbf{U}_{x^*y^*} = \mathbf{U}_{y^*x^*}$ (Satz von Schwarz)

$u_{xx} + y \cdot u_{yy} =$

$$\mathbf{U}_{x^*x^*} - 2 \cdot \mathbf{U}_{x^*y^*} + \mathbf{U}_{y^*y^*} - (\mathbf{U}_{x^*x^*} + 2 \cdot \mathbf{U}_{x^*y^*} + \mathbf{U}_{y^*y^*}) +$$

$$(\mathbf{U}_{x^*} + \mathbf{U}_{y^*}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-y) \cdot (-y)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

Endergebnis:

$$\mathbf{U}_{x^*y^*} = (\mathbf{U}_{x^*} + \mathbf{U}_{y^*}) \cdot \frac{1}{8 \cdot \sqrt{-y}}, \text{ d.h.}$$

$$\mathbf{U}_{x^*y^*} = (\mathbf{U}_{x^*} + \mathbf{U}_{y^*}) \cdot \frac{1}{2 \cdot (x^* + y^*)}$$

============================

e) $y \cdot u_{xx} + 2y \cdot u_{xy} + (x+y) \cdot u_{yy} = 0$ mit $a=y$, $b=y$ und $c=x+y$

hyperbolisch für $b^2 - ac = y^2 - y \cdot (x+y) = -x \cdot y > 0$,
d.h. **$x \cdot y < 0$ (II. oder IV. Quadrant)**

parabolisch für $b^2-ac=-x\cdot y=0$,
d.h. **$x\cdot y=0$ (x-Achse oder y-Achse: $x=0$ oder $y=0$)**

elliptisch für $b^2-ac=-x\cdot y<0$,
d.h. **$x\cdot y>0$ (I. oder III. Quadrant)**

Aufg. E3.16:
=============

$a=1,\ b=2,\ c=5$ bedeutet: $b^2-ac=-1<0$ elliptisch.

$y'=\frac{1}{a}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-a\cdot c}\right)=2\pm i$ ergibt $y=(2\pm i)\cdot x+C$, d.h.
$C=-2x+y\pm i\cdot x$

$x^*=g(x,y)=-2x+y,\ y^*=h(x,y)=x$

$u_x=U_{x^*}\cdot(-2)+U_{y^*}\cdot 1=-2\cdot U_{x^*}+U_{y^*}$,
$u_y=U_{x^*}\cdot 1+U_{y^*}\cdot 0=U_{x^*}$

$u_{xx}=-2\cdot U_{x^*x^*}\cdot(-2)-2\cdot U_{x^*y^*}\cdot 1+U_{y^*x^*}\cdot(-2)+U_{y^*y^*}\cdot 1$
$=4\cdot U_{x^*x^*}-4\cdot U_{x^*y^*}+U_{y^*y^*}$
$u_{xy}=-2\cdot U_{x^*x^*}\cdot 1-2\cdot U_{x^*y^*}\cdot 0+U_{y^*x^*}\cdot 1+U_{y^*y^*}\cdot 0=$
$-2\cdot U_{x^*x^*}+U_{x^*y^*}$
$u_{yy}=U_{x^*x^*}\cdot 1+U_{x^*y^*}\cdot 0=U_{x^*x^*}$

Einsetzen in die PDG:
$u_{xx}+4\cdot u_{xy}+5\cdot u_{yy}+u_x+2\cdot u_y=$
$4\cdot U_{x^*x^*}-4\cdot U_{x^*y^*}+U_{y^*y^*}+4\cdot(-2\cdot U_{x^*x^*}+U_{x^*y^*})+$
$5\cdot U_{x^*x^*}-2\cdot U_{x^*}+U_{y^*}+2\cdot U_{x^*}=$

$U_{x^*x^*}+U_{y^*y^*}+U_{y^*}=0$

Endergebnis:
$U_{x^*x^*}+U_{y^*y^*}=-U_{y^*}$
=================

Aufg. E3.19:
$(x-y)\cdot u_{xy}-u_x+u_y=0$ ist offensichtlich eine hyperbolische PDG für $x\neq y$.

Subst. $v(x,y)=(x-y)\cdot u(x,y)$ ergibt $u=\dfrac{v}{x-y}$

Hieraus folgt:

$$u_x=\frac{v_x\cdot(x-y)-v\cdot 1}{(x-y)^2}=(v_x\cdot(x-y)-v)\cdot(x-y)^{-2}$$

$$u_y=\frac{v_y\cdot(x-y)-v\cdot(-1)}{(x-y)^2}$$

$$u_{xy}=(v_{xy}\cdot(x-y)-v_x-v_y)\cdot(x-y)^{-2}+$$
$$(v_x\cdot(x-y)-v)\cdot(-2)\cdot(x-y)^{-3}\cdot(-1)$$

Somit:

$$(x-y)\cdot u_{xy}-u_x+u_y=$$
$$\frac{v_{xy}\cdot(x-y)-v_x-v_y}{x-y}+2\cdot\frac{v_x\cdot(x-y)-v}{(x-y)^2}-\frac{v_x\cdot(x-y)-v}{(x-y)^2}+$$
$$\frac{v_y\cdot(x-y)+v}{(x-y)^2}=v_{xy}=0$$

Integration: $v_x=C(x)$ und

$$v=\int C(x)dx+D(y)=E(x)+D(y)$$

Endergebnis:

$u(x,y)=\frac{E(x)+D(y)}{x-y}$, wobei D und E beliebige differenzierbare Funktionen sind.