

4.HA F5.3, 8-11, 14 (SS2013)

=====

Aufg. 5.3

=====

Einstellung: Grundformat Variable reell

Zerlegung des Integranden in 2 Partialbrüche

$$\text{expand}\left(\frac{1}{3z^2+27}, z\right)$$

$$\frac{j}{18 \cdot (3 \cdot j - z)} + \frac{j}{18 \cdot (3 \cdot j + z)}$$

Damit gilt für die geschlossene Kurve C (math. pos. Umlaufsinn)

$$\int_C \frac{1}{3z^2+27} dz = -\frac{j}{18} \times \int_C \frac{1}{z-3j} dz + \frac{j}{18} \times \int_C \frac{1}{z+3j} dz$$

Sei $z_1=3j$ und $z_2=-3j$ (Die Singularitäten!)

Jeder Summand ist für sich gesehen eine Laurententwicklung, die jeweils nur aus einem Summanden besteht!

$$c_{-1} = \text{res}\left(-\frac{j}{18} \times \frac{1}{z-3j}, z_1\right) = -\frac{j}{18} \quad \text{und}$$

$$c_{-1} = \text{res}\left(\frac{j}{18} \times \frac{1}{z-(-3j)}, z_2\right) = \frac{j}{18}$$

1. Falls weder z_1 und z_2 im Innengebiet von C liegen,

ist $f(z) = \frac{1}{3z^2+27}$ holomorph in C und es gilt:

$$\square \int_C \frac{1}{3z^2+27} dz = 0 \quad (\text{CIS})$$

2. Falls z_1 und z_2 im Innengebiet von C liegen, gilt

$$\square \int_C \frac{1}{3z^2+27} dz = -\frac{j}{18} \times \int_{C_1} \frac{1}{z-3j} dz + \frac{j}{18} \times \int_{C_2} \frac{1}{z+3j} dz,$$

wobei C_1 und C_2 kleine Kreise um z_1 bzw. z_2 bedeuten:

$$\square \int_{C_1} \frac{1}{z-z_1} dz = 2\pi j \quad \text{und} \quad \int_{C_2} \frac{1}{z-z_2} dz = 2\pi j, \quad \text{d.h.}$$

$$\square \int_C \frac{1}{3z^2+27} dz = -\frac{j}{18} \times 2\pi j + \frac{j}{18} \times 2\pi j = 0$$

3. Falls nur z_1 im Innengebiet von C liegt, gilt

$$\square \int_C \frac{1}{3z^2+27} dz = -\frac{j}{18} \times 2\pi j + \frac{j}{18} \times 0 = \frac{\pi}{9}$$

4. Falls nur z_2 im Innengebiet von C liegt, gilt

$$\int_C \frac{1}{3z^2+27} dz = -\frac{j}{18} \times 0 + \frac{j}{18} \times 2\pi j = -\frac{\pi}{9}$$

5. Falls z_1 oder z_2 auf dem Rand von C liegen,

existiert das Integral nicht (Integration über eine Polstelle hinweg.)

Aufg. 5.8

=====

Vorbetrachtung für Aufgaben mit der In-Funktion in der Stammfunktion:

Statt z wird die Variable ζ benutzt (griech. zeta, klingt phonetisch fast wie z).

Integration von $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ entlang eines Weges C

(links der Polstelle $\zeta_0=0$) mit Blattwechsel:

Der Blattwechsel entsteht dadurch, dass bei unbestimmter Integration gilt:

$$\int_C \frac{1}{\zeta} d\zeta = \ln_k(\zeta) = \ln(|\zeta|) + j \arg(\zeta) + k2\pi j \quad \text{und} \quad -\pi < \arg(\zeta) \leq \pi$$

jetzt bei Kurvenverlauf über die neg. reelle Achse hinweg (von $\zeta_1 = -1+j$ nach $\zeta_2 = -1-j$) der Winkel $-\pi$ (bei $\zeta = -1$) aus Stetigkeitsgründen noch negativer wird und damit das Intervall

$-\pi < \arg(\zeta) \leq \pi$ verlassen wird. Das kann abgefangen werden, indem man z.B. von Blatt 0 in Blatt -1 mit dem Winkelbereich $\arg(\zeta) + (-1) \cdot 2\pi$ übergeht:

$$-3\pi < \arg(\zeta) + (-1) \cdot 2\pi \leq -\pi$$

z.B.

C: Geradenstück von $\zeta_1 = -1 + j$ nach $\zeta_2 = -1 - j$,
d.h. $\zeta(t) = -1 + j + t \times (-2j)$, $0 \leq t \leq 1$. $\zeta'(t) = -2j$

$$\int_C \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_0^1 \frac{1 \times (-2j)}{-1 + j + t \times (-2j)} dt =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t - \frac{-1+j}{2j}} dt = \ln \left(t - \frac{-1+j}{2j} \right) \text{ mit unterer Grenze } t=0 \text{ und}$$

oberer Grenze $t=1$

$$= \ln \left(1 - \frac{-1+j}{2j} \right) - \ln \left(0 - \frac{-1+j}{2j} \right)$$

$$\frac{\pi \cdot j}{2}$$

Nebenrechnung: beide Zahlen im gleichen Blatt

(Endpunkt $1 - \frac{-1+j}{2j}$ im IV. Quadranten, Anfangspunkt

$0 - \frac{-1+j}{2j}$ im III. Quadranten)

$$1 - \frac{-1+j}{2j}$$

$$\frac{-j}{2} + \frac{1}{2}$$

$$0 - \frac{-1+j}{2j}$$

$$\frac{-j}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\ln\left(1 - \frac{-1+j}{2j}\right) = \ln\left|\frac{-j}{2} + \frac{1}{2}\right| + j \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\ln\left(\theta - \frac{-1+j}{2j}\right) = \ln\left|\frac{-j}{2} - \frac{1}{2}\right| + j \times \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Somit

$$\ln\left(1 - \frac{-1+j}{2j}\right) - \ln\left(\theta - \frac{-1+j}{2j}\right) = \ln\left|\frac{-j}{2} + \frac{1}{2}\right| + j \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) -$$

$$\left(\ln\left|\frac{-j}{2} - \frac{1}{2}\right| + j \times \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi \cdot j}{2}$$

Nun direkte Integration von $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ mit

Stammfunktion:

$$\int_{-1+j}^{-1-j} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

$$\frac{-3 \cdot \pi \cdot j}{2}$$

Das Ergebnis ist falsch wegen Nichtbeachtung eines
Blattwechsels

$$\int_{\square} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

$$\ln(\zeta)$$

Es gilt also korrekt:

$$\ln_1(-1-j) - \ln_0(-1+j) =$$

$$\ln(-1-j) + 1 \times 2\pi j - \ln(-1+j)$$

$$\frac{\pi \cdot j}{2}$$

Weitergehende Erläuterung

(vgl. Merkblatt Grundstudium Mathematik 1):

Die $\ln(\zeta)$ -Funktion erzeugt \ln -Werte in einem festen Parallelstreifen der Breite $2\pi j$ (z.B. Parallelstreifen D_0 von $-\pi j$ bis πj für den Imaginärteil),

d.h. verläuft in einer ζ -Ebene die Integrationskurve C nicht über die negative reelle Achse ($\text{Re}(\zeta)$ -Achse),

so entstehen für die Kurvenpunkte $\zeta = r \times e^{jt}$ keine Winkel über $t = \pi$ hinaus (bzw. kleiner als $t = -\pi$) und die $\ln(\zeta)$ -Werte liegen in einem festen Parallelstreifen.

Verläuft jedoch die Kurve vom II. Quadranten in den III. Quadranten hinein, bedeutet dies ein Blattwechsel (z.B. von Blatt 0 nach Blatt 1) und damit für die $\ln(\zeta)$ -Werte ein Wechsel in den benachbarten Parallelstreifen nach oben (z.B. von D_0 nach D_1), weil der Winkel $t = \pi$ überschritten wird.

Verläuft hingegen die Kurve vom III. Quadranten in den II. Quadranten hinein, bedeutet dies ein Blattwechsel (z.B. von Blatt 0 nach Blatt -1) und damit für die $\ln(\zeta)$ -Werte ein Wechsel in den benachbarten Parallelstreifen nach unten (z.B. von D_0 nach D_{-1}), weil der Winkel $t = -\pi$ unterschritten wird.

Wir kommen nun zur eigentlichen Aufg. 5.8

=====

und treffen die Fallunterscheidung wie folgt
 (die Polstellen liegen nicht auf C, vgl.
 Aufgabenstellung!)

Wir betrachten dazu die **geschlossene** Kurve
 aus C und der Strecke von 1 bis 0 auf der reellen
 Achse: Skizze! math. pos. Orientierung beachten

**1. C und die Strecke von 1 bis 0 umschließen
 keine Polstelle (CIS):**

$$\square \int_C f(z) dz + \int_1^0 \frac{1}{t^2+1} dt = 0, \text{ d.h.}$$

$$\square \int_C f(z) dz = - \int_1^0 \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{4}$

**2. C und die Strecke von 1 bis 0 umschließen
 die Polstelle $z_1=j$: Skizze!**

PBZ:

$$\text{expand}\left(\frac{1}{t^2+1}, t\right)$$

$$\frac{j}{2 \cdot (t+j)} - \frac{j}{2 \cdot (t-j)}$$

$$\square \int_C f(z) dz + \int_1^0 \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\int_C \frac{j}{2 \cdot (z+j)} - \frac{j}{2 \cdot (z-j)} dz + \int_1^{\theta} \frac{j}{2 \cdot (t+j)} - \frac{j}{2 \cdot (t-j)} dt =$$

$$\left(\int_C \frac{j}{2 \cdot (z+j)} dz + \int_1^{\theta} \frac{j}{2 \cdot (t+j)} dt \right) + \left(\int_C \frac{-j}{2 \cdot (z-j)} dz + \int_1^{\theta} \frac{-j}{2 \cdot (t-j)} dt \right)$$

$$\theta + \frac{-j}{2} \times 2\pi j$$

π

die θ entsteht, da der linke Anteil bei j keine Polstelle hat!

d.h.

$$\int_C f(z) dz =$$

$$\pi - \int_1^{\theta} \frac{1}{t^2+1} dt$$

$\frac{5 \cdot \pi}{4}$

3. C und die Strecke von 1 bis θ umschließen die Polstelle $z_2 = -j$: Skizze!

$$\int_C f(z) dz + \int_1^{\theta} \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\int_C \frac{j}{2 \cdot (z+j)} - \frac{j}{2 \cdot (z-j)} dz + \int_1^{\theta} \frac{j}{2 \cdot (t+j)} - \frac{j}{2 \cdot (t-j)} dt =$$

$$\left(\int_C \frac{j}{2 \cdot (z+j)} dz + \int_1^{\theta} \frac{j}{2 \cdot (t+j)} dt \right) + \left(\int_C \frac{-j}{2 \cdot (z-j)} dz + \int_1^{\theta} \frac{-j}{2 \cdot (t-j)} dt \right)$$

$$\frac{j}{2} \times 2\pi j + \theta$$

$-\pi$

die θ entsteht, da der rechte Anteil bei $-j$ keine Polstelle hat!

d.h.

$$\square \int_C f(z) dz =$$

$$-\pi - \int_1^\theta \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$\frac{-3 \cdot \pi}{4}$$

4. C und die Strecke von 1 bis θ umschließen beide Polstellen $z_1=j$ und $z_2=-j$: Skizze!

$$\square \int_C f(z) dz + \int_1^\theta \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\square \int_C \frac{j}{2 \cdot (z+j)} - \frac{j}{2 \cdot (z-j)} dz + \int_1^\theta \frac{j}{2 \cdot (t+j)} - \frac{j}{2 \cdot (t-j)} dt =$$

$$\left(\int_C \frac{j}{2 \cdot (z+j)} dz + \int_1^\theta \frac{j}{2 \cdot (t+j)} dt \right) + \left(\int_C \frac{-j}{2 \cdot (z-j)} dz + \int_1^\theta \frac{-j}{2 \cdot (t-j)} dt \right)$$

$$\frac{j}{2} \times 2\pi j - \frac{j}{2} \times 2\pi j$$

\emptyset

jetzt werden die Residuen aus linkem und rechten Anteil wirksam!

$$\text{d.h. } \int_C^{\square} f(z) dz =$$

$$0 - \int_1^{\emptyset} \frac{1}{t^2+1} dt$$

 $\frac{\pi}{4}$

Aufg. 5.9

=====

$$\text{a) } \int_{C_1}^{\square} \frac{1}{z-z_1} dz = 2\pi j, \text{ da die Polstelle } z_1=2j$$

(Singularität) innerhalb von C_1 liegt (Skizze!)

(C_1 im math. pos. Sinn orientiert, Skizze!)

Bem.: $|z_1-z_0|=|j-1|=\sqrt{2} < 4=r$, d.h. Abstand von z_1 zu z_0 kleiner als der Radius r .

$$\int_{C_2}^{\square} \frac{1}{z-z_1} dz = 0 \text{ nach dem CIS, da die Polstelle}$$

außerhalb der Ellipse C_2 liegt (Skizze!), d.h.

$f(z)=\frac{1}{z-z_1}$ ist innerhalb von C_2 holomorph.

b) PBZ:

$$\text{expand}\left(\frac{z}{(z-1-2j)\times(z-1)}, z\right)$$

$$\frac{j}{2 \cdot (z-1)} + \frac{1-\frac{j}{2}}{z-1-2 \cdot j}$$

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_1} \frac{j}{2} \times \frac{1}{z-1} + \left(1 - \frac{j}{2}\right) \times \frac{1}{z-(1+2 \cdot j)} dz =$$

$$\frac{j}{2} \times \int_{C_1} \frac{1}{z-1} dz + \left(1 - \frac{j}{2}\right) \times \int_{C_1} \frac{1}{z-(1+2 \cdot j)} dz =$$

$$\frac{j}{2} \times 2\pi j + \left(1 - \frac{j}{2}\right) \times 2\pi j = 2\pi j, \quad (\text{Residuensatz})$$

da beide Polstellen innerhalb des Kreises liegen
(Skizze!):

$$|1-(1+j)|$$

1

$$|1+2 \cdot j-(1+j)|$$

1

c) PBZ:

$$\text{expand} \left(\frac{1}{(z^2+4) \times (z+1)}, z \right)$$

$$\frac{1}{5 \cdot (z+1)} + \frac{-\frac{1}{10} + \frac{j}{20}}{z+2 \cdot j} + \frac{-\frac{1}{10} - \frac{j}{20}}{z-2 \cdot j}$$

C ist ein Kreis (quadratische Ergänzung!):

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9, \quad \text{d.h. } z_0 = 1+j, \quad r=3.$$

$$|-1-(1+j)|$$

$\sqrt{5}$

$$|2j-(1+j)|$$

$\sqrt{2}$

$$|-2j-(1+j)|$$

$$\sqrt{10}$$

Wegen $\sqrt{10} > 3$ liegt die Polstelle $-2j$ nicht im Kreis (Skizze!).

Mit dem verallgemeinerten CIS folgt:

$$\oint_C f(z) dz =$$

$$\frac{1}{5} \times \oint_C \frac{1}{z+1} dz + \left(-\frac{1}{10} + \frac{j}{20}\right) \times \oint_C \frac{1}{z+2j} dz + \left(-\frac{1}{10} - \frac{j}{20}\right) \times \oint_C \frac{1}{z-2j} dz$$

$$\frac{1}{5} \times 2\pi j + \left(-\frac{1}{10} + \frac{j}{20}\right) \times 0 + \left(-\frac{1}{10} - \frac{j}{20}\right) \times 2\pi j$$

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{j}{5}\right) \cdot \pi$$

Aufg. 5.10

=====

a) $F(z) = \frac{1}{2} \times z^2 + 5$ ist eine Stammfunktion zu $f(z) = z$,

denn $F'(z) = z$.

$f(z)$ ist überall holomorph. Somit gilt

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

$$\text{Define } F(z) = \frac{1}{2} \times z^2 + 5$$

done

$$F(-1+j) - F(-1-3j)$$

$$4 - 4 \cdot j$$

b) $F(z) = j \times \ln(z+j) + 5$ ist innerhalb eines Blattes
(z.B. Blatt 0) eine Stammfunktion zu $f(z) = \frac{j}{z+j}$,

denn $F'(z) = f(z) = \frac{j}{z+j}$.

Die Integrationskurve verläuft links von der
Polstelle $-j$ von $-1-3j$ über $-1-j$ nach $-1+j$ und
verläuft damit bei $-1-j$ vom vorhandenen Blatt in
ein darunter liegendes Blatt (vgl. weitergehende
Erläuterung in Aufg. F5.8).

Damit ergibt sich folgende Lösung (mit z_1 im Blatt 0
und z_2 im Blatt -1):

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) + j \times (-1) \times 2\pi j - F(z_1)$$

Wir definieren die \ln -Funktion im k -ten Blatt wie
folgt:

Define $F(z, k) = j \times (\ln(z+j) + k \times 2\pi j) + 5$

done

$F(-1+j, -1) - F(-1-3j, 0)$

$$\left(\frac{\ln(5)}{2} + \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \cdot j - 2 \cdot \pi \cdot j \right) \cdot j - \left(\frac{\ln(5)}{2} - \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \dots \right) \right)$$

cExpand(ans)

$$-2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi$$

approx(ans)

2.214297436

Das Ergebnis kann auch als $2 \times \arctan(2)$
angegeben werden:
approx(2 * tan⁻¹(2))

Es gilt die Umrechnung $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2)$.

Aufg. 5.11

=====

a) PBZ: die PBZ ergibt Anteile von Laurent-Reihen für die Polstellen 8 bzw. $-6j$

$$\text{expand}\left(\frac{4z}{(z-8)(z+6j)}, z\right)$$

$$\frac{\frac{64}{25} - \frac{48 \cdot j}{25}}{z-8} + \frac{\frac{36}{25} + \frac{48 \cdot j}{25}}{z+6 \cdot j}$$

$$|8 - (1+j)|$$

$$5 \cdot \sqrt{2}$$

$$|-6j - (1+j)|$$

$$5 \cdot \sqrt{2}$$

Wegen $5 \cdot \sqrt{2} > 6 = r$ liegen beide Polstellen außerhalb des Kreises (Skizze!). Somit ergibt sich unmittelbar

$$\int_C f(z) dz = 0, \text{ da } f(z) \text{ innerhalb des Kreises}$$

holomorph ist und hier keine Singularitäten hat.

b) Zerlegung von $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$

$$\text{expand}\left(\frac{z^2}{z-2}, z\right)$$

$$z + \frac{4}{z-2} + 2$$

$$\int_C f(z) dz = \int_C (z+2) dz + 4 \times \int_C \frac{1}{z-2} dz = 0 + 4 \times 2\pi j = 8\pi j$$

Das erste Teilintegral ist 0 wegen des CIS (z+2 ist überall holomorph.)

Aufg. 5.14

=====

a) das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+a^2} dx, \quad a > 0, \text{ ist im Reellen schwer}$$

berechenbar.

Im Bartsch S.770, Nr. (80), findet man das Integral

(Variablen umbezeichnet, Subst. $x/a=t$, $dx=a \cdot dt$, dann $\alpha=3a$)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha \times t)}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{2} \times e^{-|\alpha|}$$

und mit passender Substitution löst man die obige Aufgabe:

Es sei $\alpha > 0$ und $\frac{\alpha}{3}=a$, Subst. $\alpha \times t=3x$, d.h. $dt=\frac{3}{\alpha} dx$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x t)}{t^2+1} dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{\left(\frac{3}{\alpha}x\right)^2+1} \frac{3}{\alpha} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} \times \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 \times \frac{1}{\alpha} dx$$

Somit gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \times e^{-3a}$$

Berechnung über ein komplexes Kurvenintegral mit Übergang zu einer passenden komplexen Funktion

für die gerade Funktion $\frac{\cos(3x)}{x^2+a^2}$ wird die gesamte

reelle Achse betrachtet und dann $x=z$ gesetzt:

$$f(z) = \frac{e^{3zj}}{z^2+a^2} = \frac{\cos(3z) + j\sin(3z)}{z^2+a^2} \quad \text{und Integration über}$$

einen geschlossenen Weg C entlang der x -Achse (von $z=-R$ bis $z=R$, später $R \rightarrow \infty$), dann über den oberen Halbkreis von $z=R$ über $z=Rj$ bis $z=-R$ (Skizze!).

$f(z)$ ist innerhalb von C holomorph bis auf die Polstelle bei $z=aj$ ($a>0$):

$$\int_C f(z) dz =$$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{3xj}}{x^2+a^2} dx + \int_0^\pi \frac{e^{3R \times (\cos(t)+j\sin(t))j}}{R^2 \times e^{j2t+a^2}} \times (R \times e^{jt} \times j) dt =$$

$$2\pi j \times \left(e^{-3 \cdot a} \times \frac{1}{2ja} \right) = \frac{\pi}{a} \times e^{-3 \cdot a}$$

Im ersten Teilintegral gilt $z=x$,
im zweiten Teilintegral wird die Parameterdarstellung
 $z(t)=R \times e^{jt}=R \times (\cos(t)+j\sin(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, genutzt.

**Für den Integranden wurden die PBZ und die
Reihendarstellung genutzt:**

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{A}{z+ja} + \frac{B}{z-ja} \quad \text{mit } A=-B = \frac{-1}{2ja}$$

$$\frac{1}{(z-ja)} \times \text{taylor}(e^{j3z}, z, 2, ja)$$

$$\frac{e^{-3 \cdot a} - \frac{9 \cdot (z-a \cdot j)^2 \cdot e^{-3 \cdot a}}{2} + 3 \cdot (z-a \cdot j) \cdot e^{-3 \cdot a} \cdot j}{z-a \cdot j}$$

Nur die Potenz $\frac{1}{z-aj} = (z-aj)^{-1}$ mit dem

Koeffizienten $e^{-3 \cdot a} \times B = e^{-3 \cdot a} \times \frac{1}{2ja}$ spielt eine Rolle

(die anderen Summanden sind holomorph und ergeben
keinen Integralanteil). Der spezielle Koeffizient zur
Potenz $(z-aj)^{-1}$ heißt **Residuum**.

Abschließend ist der Halbkreis im Grenzfall
auszuwerten, vgl. b):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\pi} f(R \times e^{jt}) \times Rj \times e^{jt} dt \right) = 0.$$

Endergebnis:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \times \int_C f(z) dz = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{a} \times e^{-3 \cdot a} = \frac{\pi}{2a} \times e^{-3 \cdot a}$$

b) Das CAS (ClassPad) liefert ein numerisches Ergebnis:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x \cdot (x^2+1)} dx$$

1.358212155

Das exakte Ergebnis lautet:

$$\frac{\pi}{2} \times (1 - e^{-2})$$

1.358212161

Der Integrand ist eine gerade Funktion.

Wir betrachten eine geschlossene Kurve C (math. pos. orientiert) in der Gauß'schen Zahlenebene, die die reelle Achse enthält:

C liegt anteilig in der oberen Halbebene mit dem oberen Halbkreis von $z=R$ über $z=Rj$ nach $z=-R$ ($R>1$, später $R \rightarrow \infty$). Die reelle Achse wird noch durch einen kleinen oberen Halbkreis von $z=-r$ über $z=rj$ nach $z=r$ ($0<r<1$, später $r \rightarrow 0$) unterbrochen, um den Koordinatenursprung mit der Polstelle $z=0$ zu umgehen. Damit gibt es innerhalb von C nur die

Polstelle $z=j$.

Es gilt nun mit der ungeraden Funktion $\frac{\cos(2x)}{x \cdot (x^2+1)}$

und der geraden Funktion $\frac{\sin(2x)}{x \cdot (x^2+1)}$:

$$\int_0^R \frac{\sin(2x)}{x \cdot (x^2+1)} dx = \frac{1}{2j} \int_{-R}^R \frac{\cos(2x) + j\sin(2x)}{x \cdot (x^2+1)} dx$$

Übergang in die komplexe Zahlenebene mit

$$f(z) = \frac{1}{2j} \times \frac{e^{j2z}}{z \cdot (z^2+1)} \text{ und PBZ für } \frac{1}{z \cdot (z^2+1)}:$$

$$\text{expand}\left(\frac{1}{z \cdot (z^2+1)}, z\right)$$

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2 \cdot (z+j)} - \frac{1}{2 \cdot (z-j)}$$

$$\text{Somit } f(z) = \frac{1}{2j} \times \frac{e^{j2z}}{z} - \frac{1}{4j} \times \frac{e^{j2z}}{z+j} - \frac{1}{4j} \times \frac{e^{j2z}}{z-j} \text{ und}$$

Beachtung der Polstelle innerhalb von C :

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{j \times e^{-2}}{4 \cdot (z-j)} dz = \frac{j \times e^{-2}}{4} \times 2\pi j = -\frac{\pi}{2} e^{-2}.$$

Wir betrachten dazu die Reihenentwicklung des

Summanden $\frac{1}{2j} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{e^{j2z}}{z-j}$ nach Potenzen von

$(z-j)$, wobei dann nur die Potenz $\frac{1}{z-j} = (z-j)^{-1}$

eine Rolle spielt.

Integrale über $(z-j)^m$, $m \geq 0$, sind Null und liefern keinen Anteil (holomorphe Anteile).

$$-\frac{1}{4j \cdot (z-j)} \times \text{taylor}(e^{j2z}, z, 2, j) \\ = \frac{-(2 \cdot (z-j)^2 \cdot e^{-2} - 2 \cdot (z-j) \cdot e^{-2} \cdot j - e^{-2}) \cdot j}{4 \cdot (z-j)}$$

Abschließend sind die Halbkreise im Grenzfall auszuwerten

mit $z = z(t) = R \times e^{jt}$, $0 \leq t \leq \pi$, bzw.

$z = z(t) = r \times e^{jt}$, $\pi \geq t \geq 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^\pi f(R \times e^{jt}) \times R j \times e^{jt} dt \right) \text{ und}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_\pi^0 f(r \times e^{jt}) \times r j \times e^{jt} dt \right)$$

Es gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^\pi f(R \times e^{jt}) \times R j \times e^{jt} dt \right) = 0, \text{ denn}$$

$$\left| \int_0^\pi f(R \times e^{jt}) \times R j \times e^{jt} dt \right| \leq$$

$$\int_0^\pi \left| \frac{e^{2jR} (\cos(t) + j \sin(t))}{R \times e^{jt} \times (R^2 \times e^{2jt} + 1)} \times R j \times e^{jt} \right| dt =$$

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{e^{-2R \times \sin(t)}}{(R^2 \times e^{2j t} + 1)} \right| dt \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-2R \times \sin(t)}}{(R^2 - 1)} dt \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty$$

($\sin(t) > 0$ im betrachteten t-Intervall).

und

$$-\int_0^{\pi} f(r \times e^{j t}) \times r j \times e^{j t} dt =$$

$$\frac{-1}{2j} \times \int_0^{\pi} \frac{e^{2j r \times (\cos(t) + j \sin(t))}}{r \times e^{j t} \times (r^2 \times e^{2j t} + 1)} \times r j \times e^{j t} dt$$

$$= \frac{-1}{2j} \times \int_0^{\pi} \frac{e^{2j r \times (\cos(t) + j \sin(t))}}{r^2 \times e^{2j t} + 1} \times j dt \rightarrow$$

$$\frac{-1}{2j} \times \int_0^{\pi} \frac{e^{\theta}}{(\theta + 1)} \times j dt = -\frac{\pi}{2} \text{ für } r \rightarrow \infty.$$

Endergebnis:

$$\frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) + j \sin(2x)}{x \cdot (x^2 + 1)} dx - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} e^{-2} \text{ ergibt}$$

$$\frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) + j \sin(2x)}{x \cdot (x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2} \times (1 - e^{-2}).$$

c) reelle Integration des uneigentlichen Integrals (echt gebrochen rationale Funktion) möglich:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx =$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4}$$

Das CAS (ClassPad) liefert das exakte Ergebnis!

**Rechnung im Reellen mit PBZ ist aufwändig,
Faktorisierung des Nenners:**

$$\begin{aligned} & \text{rFactor}(1+x^4) \\ & \left(x + \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right) \\ & \text{expand}\left(\left(x + \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right)\right) \\ & \qquad \qquad \qquad x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1 \\ & \text{expand}\left(\left(x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right)\right) \\ & \qquad \qquad \qquad x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1 \end{aligned}$$

Ansatz PBZ im Reellen:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2} \cdot x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2} \cdot x+1} \quad \text{mit Hauptnenner}$$

durchmultiplizieren:

DelVar A,B,C,D

done

$$1 = (Ax+B) \cdot (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) + (Cx+D) \cdot (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1) \Rightarrow \text{equ:}$$

$$1 = (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot (C \cdot x + D) + (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot (A \cdot x + B)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{equation} | x=0 \\ \text{equation} | x=1 \\ \text{equation} | x=-1 \\ \text{equation} | x=2 \end{array} \right| A, B, C, D$$

$$\left\{ A = \frac{3 \cdot \sqrt{2} - 4}{2 \cdot (-\sqrt{2} + 2)^2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{-(\sqrt{2} - 1)}{2 \cdot (-\sqrt{2} + 2)}, D = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{-2 \cdot \sqrt{2} + 4} \right\}$$

simplify(ans)

$$\left\{ A = \frac{(3 \cdot \sqrt{2} - 4) \cdot (\sqrt{2} + 2)^2}{8}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{-\sqrt{2}}{4}, D = \frac{1}{2} \right\}$$

Stammfunktionen:

$$\frac{(3 \cdot \sqrt{2} - 4) \cdot (\sqrt{2} + 2)^2}{8} \Rightarrow A$$

$$\frac{(3 \cdot \sqrt{2} - 4) \cdot (\sqrt{2} + 2)^2}{8}$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow B$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow C$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow D$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\text{Define } F1(x) = \int \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2} \cdot x+1} dx$$

done

$$\text{Define } F2(x) = \int \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2} \cdot x+1} dx$$

done

$$\text{Define } F(x) = F1(x) + F2(x)$$

done

$$\lim_{x \rightarrow 0} (F(x))$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x))$$

0

**Rechnung mittels CIS und PBZ unter
Beachtung der Polstellen:**

$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ hat vier komplexe Polstellen z_k ,

$k=0, 1, 2, 3$:

$$\text{solve}(z^4+1=0, z)$$

$$\left\{ z = \left[-\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right] \cdot \sqrt{2}, z = \left[-\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right] \cdot \sqrt{2}, z = \left[\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right] \cdot \sqrt{2}, z = \left[\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right] \cdot \sqrt{2} \right\}$$

Hauptwurzel $z_0 = \left[\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right] \cdot \sqrt{2}$, 1. Nebenwurzel

$z_1 = \left[-\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right] \cdot \sqrt{2}$, beide oberhalb der reellen Achse.

Wir betrachten in der oberen Halbebene die Strecke von $z=-R$ bis $z=R$ (auf der reellen Achse) und dann den oberen Halbkreis von $z=R$ über $z=Rj$ nach $z=-R$

($R > 1$, später $R \rightarrow \infty$) als geschlossene Kurve C
 (math. pos. orientiert). Nach dem CIS gilt:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=0}^3 \left(\int_C \frac{A_k}{z-z_k} dz \right) = A_0 \times 2\pi j + A_1 \times 2\pi j + A_2 \times 0 + A_3 \times 0 = (A_0 + A_1) \times 2\pi j$$

rFactor(z^4+1)

$$\left(z + \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2} \right) \cdot \left(z + \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2} \right) \cdot \left(z + \left(-\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2} \right) \cdot \left(z + \left(-\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2} \right)$$

Kennt man die Koeffizienten aus der PBZ, ist die Aufgabe praktisch gelöst:

DelVar A0,A1,A2,A3

done

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{A_0}{z + \left(-\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2}} + \frac{A_1}{z + \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2}} + \frac{A_2}{z + \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2}} + \frac{A_3}{z + \left(-\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2}}$$

Hieraus (Abspeicherung der Gleichung unter dem Namen **equation**):

$$1 = \frac{A_0 \cdot (z^4+1)}{z + \left(-\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2}} + \frac{A_1 \cdot (z^4+1)}{z + \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2}} + \frac{A_2 \cdot (z^4+1)}{z + \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2}} + \frac{A_3 \cdot (z^4+1)}{z + \left(-\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \cdot \sqrt{2}}$$

Berechnung der Koeffizienten der PBZ unter Nutzung spezieller z -Werte in der **equation**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{equation} | z=0 \\ \text{equation} | z=1 \\ \text{equation} | z=-1 \\ \text{equation} | z=2 \end{array} \right| A_0, A_1, A_2, A_3$$

$$\left\{ A_0 = \left(-\frac{1}{8} - \frac{j}{8} \right) \cdot \sqrt{2}, A_1 = \left(\frac{1}{8} - \frac{j}{8} \right) \cdot \sqrt{2}, A_2 = \left(\frac{1}{8} + \frac{j}{8} \right) \cdot \sqrt{2}, A_3 = \dots \right.$$

□

$$\int_C f(z) dz =$$

$$\left[\left(-\frac{1}{8} - \frac{j}{8} \right) \cdot \sqrt{2} + \left(\frac{1}{8} - \frac{j}{8} \right) \cdot \sqrt{2} \right] \times 2\pi j$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{2}$$

Das Integral über den Halbkreis $z(t) = R \times e^{jt}$, $0 \leq t \leq \pi$, verschwindet für $R \rightarrow \infty$.

$$\left| \int_0^\pi \frac{1 \times R \times e^{jt} \times j}{(R \times e^{jt})^4 + 1} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{1 \times R \times e^{jt} \times j}{(R \times e^{jt})^4 + 1} \right| dt \leq$$

$$\int_0^\pi \frac{R}{|R \times e^{jt}|^4 - 1} dt = \frac{R}{R^4 - 1} \times \int_0^\pi 1 dt = \frac{R \times \pi}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

Das Integral über die reelle Achse ($R \rightarrow \infty$) ist somit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{2}, \text{ d.h.}$$

für die gerade Funktion im Integranden erhält man das Endergebnis:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4} .$$