**3.HA F5.1, 2, 4-7 (SS2014)**

==================================

**Aufg. 5.1**

Zerlegung des Integrals in 4 Teilintegrale über die vorgeg. Wegstücke, vgl. **F1.29**

$C_1$: $z(t)=-2+2j+t\times(1-2j)$, $0\le t\le 1$,

$C_2$: $z(t)=e^{j\pi\times(1-t)}$, $0\le t\le 1$,

$C_3$: $z(t)=1+t$, $0\le t\le 1$,

$C_4$: $z(t)=2\times(1+jt)$, $0\le t\le 1$.

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\ \ldots\ +\int_{C_4} f(z)dz$$

$$=\sum_{k=1}^{4}\left(\int_0^1 f(z(t))\times z'(t)dt\right)$$

$$=(1+j)\times\int_0^1\frac{1-2j}{-2+2j+t\times(1-2j)}dt+$$

$$(1+j)\times\int_0^1\frac{e^{j\pi\times(1-t)}\times(-j\pi)}{e^{j\pi\times(1-t)}}dt+$$

$$(1+j)\times\int_0^1\frac{1}{1+t}dt+$$

$$(1+j)\times\int_0^1\frac{2j}{2\times(1+jt)}dt$$

**NR im CAS:**

$$(1+j)\times\int_0^1 \frac{1-2j}{-2+2j+t\times(1-2j)}\,dt \Rightarrow I_1$$

$$(-1-j)\cdot\left(\frac{3\cdot\ln(2)}{2}-\frac{\pi\cdot j}{4}\right)$$

$$(1+j)\times\int_0^1 \frac{e^{j\pi\times(1-t)}\times(-j\pi)}{e^{j\pi\times(1-t)}}\,dt \Rightarrow I_2$$

$$(1-j)\cdot\pi$$

$$(1+j)\times\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt \Rightarrow I_3$$

$$(1+j)\cdot\ln(2)$$

$$(1+j)\times\int_0^1 \frac{2j}{2\times(1+jt)}\,dt \Rightarrow I_4$$

$$(1+j)\cdot\left(\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\pi\cdot j}{4}\right)$$

**Ergebnis:**

$I_1+I_2+I_3+I_4$

$$(1-j)\cdot\pi+(1+j)\cdot\ln(2)+(-1-j)\cdot\left(\frac{3\cdot\ln(2)}{2}-\frac{\pi\cdot j}{4}\right)+(1+j)\cdot\left(\frac{\ln(2)}{2}\right.$$

simplify(ans)

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$$

**Direkte Berechnung im Holomorphiegebiet** (über Stammfunktion):

$$\int_{-2+2j}^{2+2j} \frac{1+j}{z}\,dz$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$$

denn es gilt z.B. im Blatt 0 (Hauptwerte des ln(...) im Parallelstreifen $D_0$):

Define $F(z)=\int_{\square}^{\square}\frac{1+j}{z}dz$

done

$F(z)$

$(1+j)\cdot\ln(z)$

$(1+j)\times(\ln(2+2j)-\ln(-2+2j))$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$

**Aufg. 5.2,** vgl. Aufg. F1.30c)
(quadratische Ergänzung, Kreisgeichung um $1+j$ mit Radius $\sqrt{2}$)

C: $z(t)=1+j+\sqrt{2}\times e^{jt}$, $0\le t\le 2\pi$.

$$\int_C^{\square} f(z)dz= \int_0^{2\pi} f(z(t))\times z'(t)dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}\,j\times e^{jt}}{(1+j+\sqrt{2}\times e^{jt}-1)\times\left((1+j+\sqrt{2}\times e^{jt})^2+1\right)}dt$$

0

Das Ergebnis 0 ist falsch, da innerhalb des Kreisgebietes singuläre Stellen liegen: $z_1=1$ und $z_2=j$ (CIS trifft nicht zu)

**PBZ und Integration der einzelnen Partialbrüche auf Kreisen um die Singularität:**

$$\operatorname{expand}\left(\frac{1}{(z-1)\times\left((z)^2+1\right)},z\right)$$

$$\frac{1}{2\cdot(z-1)}+\frac{-\frac{1}{4}-\frac{j}{4}}{z+j}+\frac{-\frac{1}{4}+\frac{j}{4}}{z-j}$$

$$\int_0^{2\pi} f(z(t))\times z'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)}+\frac{-\frac{1}{4}-\frac{j}{4}}{z+j}+\frac{-\frac{1}{4}+\frac{j}{4}}{z-j}\right)\times z'(t)\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,j\times e^{jt}}{\left(1+\sqrt{2}\times e^{jt}-1\right)}\right)dt+$$

$$\left(-\frac{1}{4}-\frac{j}{4}\right)\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,j\times e^{jt}}{\left(1+j+\sqrt{2}\times e^{jt}+j\right)}\right)dt+$$

$$\left(-\frac{1}{4}+\frac{j}{4}\right)\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,j\times e^{jt}}{\left(j+\sqrt{2}\times e^{jt}-j\right)}\right)dt$$

**NR im CAS:**

**erstes Integral mit Kreis um $z_0=1$:**

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,j\times e^{jt}}{2\cdot\left(1+\sqrt{2}\times e^{jt}-1\right)}\right)dt$$

$$\pi\cdot j$$

Mit dem Residuensatz hat man sofort $\frac{1}{2}\times 2\pi j=\pi j$

zweites Integral verschwindet (CIS)
(hier: reines Holomorphiegebiet in C):

$$\left(-\frac{1}{4}-\frac{j}{4}\right)\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,j\times e^{jt}}{\left(1+j+\sqrt{2}\times e^{jt}+j\right)}\right)dt$$

$$0$$

**drittes Integral mit Kreis um $z_0=j$:**

$$\left(-\frac{1}{4}+\frac{j}{4}\right)\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,j\times e^{jt}}{\left(j+\sqrt{2}\times e^{jt}-j\right)}\right)dt$$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$$

Mit dem Residuensatz hat man sofort $\left(-\frac{1}{4}+\frac{j}{4}\right)\times 2\pi j=-\frac{\pi}{2}\times(1+j)$

**Ergebnis:**

$$\pi\cdot j+0+\left(-\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$$

**Aufg. 5.4**

**f(z)=z ist überall holomorph (CRD erfüllt!):**

$u(x,y)=x$, $v(x,y)=y$

$u_x=v_y=1$ und $u_y=-v_x=0$

eine Stammfunktion ist $F(z)=\frac{z^2}{2}$ (Ableitung $F'(z)=f(z)=z$)

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,dz$$

$$\frac{z_1^2}{2}-\frac{z_0^2}{2}$$

factorOut(ans, $\frac{1}{2}$)

$$\frac{-(-z_1^2+z_0^2)}{2}$$

factor(ans)

$$\frac{(z_1+z_0)\cdot(z_1-z_0)}{2}$$

oder: Parameterdarstellung $z(t)=z_0+t\times(z_1-z_0)$, $0\le t\le 1$.

$$\int_0^1 (z_0+t\times(z_1-z_0))\times(z_1-z_0)\,dt$$

$$\frac{z_1^2}{2}-\frac{z_0^2}{2}$$

**Aufg. 5.5**

Gemäß F3.13d) ist f(z) nicht holomorph,

d.h. Integration entlang der vorgeg. Kurve

a) C: $z(t)=-1+t$, $0\le t\le 2$.

$$\int_C^{\square} f(z)\,dz= \int_0^2 f(z(t))\times z'(t)\,dt=$$

$$\int_0^2 (-1+t)\times 1\,dt$$

$$0$$

b) $s_1$: $z(t)=-1+t\boldsymbol{j}$, $0\le t\le 1$.

$$\int_0^1 (-1-t\boldsymbol{j})\times \boldsymbol{j}dt$$

$$-\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}$$

$s_2$: $z(t)=t+\boldsymbol{j}$, $-1\le t\le 1$.

$$\int_{-1}^1 (t-\boldsymbol{j})\times 1dt$$

$$-2\cdot\boldsymbol{j}$$

$s_3$: $z(t)=1+\boldsymbol{j}t$, $1\ge t\ge 0$.

$$\int_1^0 (1-\boldsymbol{j}t)\times \boldsymbol{j}dt$$

$$-\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}$$

**Ergebnis** (Summe der Teilintegrale):

$$-\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}-2\cdot\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}$$

$$-4\cdot\boldsymbol{j}$$

c) C sei eine geschlossene Jordankurve mit
$z(t)=x(t)+\boldsymbol{j}y(t)$, $a\le t\le b$, im math. pos. Sinn orientiert.

$$\int_C^{\square} f(z)dz= \int_0^2 f(z(t))\times z'(t)dt=$$

$$\int_a^b (x(t)-\boldsymbol{j}y(t))\times(x'(t)+\boldsymbol{j}y'(t))dt=$$

$$\int_a^b (x(t)\times x'(t)+y(t)\times y'(t))dt\ +$$

$$\boldsymbol{j}\times\int_a^b (x(t)\times y'(t)-y(t)\times x'(t))dt$$

Das erste Teilintegral hat die Stammfunktion

$F(t)=\frac{1}{2}\times\left((x(t))^2+(y(t))^2\right)$ mit $F(a)=F(b)$.

Damit verschwindet das erste Teilintegral:

$$\int_a^b (x(t)\times x'(t)+y(t)\times y'(t))dt=F(b)-F(a)=0.$$

Das zweite Teilintegral beinhaltet die Leibniz'sche Sektorformel:

$A=\frac{1}{2}\times\int_a^b (x(t)\times y'(t)-y(t)\times x'(t))dt$, d.h.

$\oint_C f(z)dz=\ 2A\boldsymbol{j}$, wobei A den Flächeninhalt der von C umrandeten Fläche bezeichnet.

**Hinweis:**

Leibniz'sche Sektorformel als Kurvenintegral 2.Art im Vektorfeld notiert:

$$A=\frac{1}{2}\times\int_a^b (x(t)\times y'(t)-y(t)\times x'(t))dt=$$

$$\int_C \begin{bmatrix} -y/2 \\ x/2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} dt = \int_C -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy$$

vgl. Bartsch (22. Aufl.), S. 501.

**Aufg. 5.6**

$f(z)=\mathrm{Re}(z)$, vgl. F3.13a) (nicht holomorph), Integral analog 5.5a) zu bearbeiten.

Lösung: $2+j$

**Aufg. 5.7**

PBZ nutzen:

$$\mathrm{expand}\left(\frac{1}{1+z^2}, z\right)$$

$$\frac{j}{2\cdot(j-z)} + \frac{j}{2\cdot(j+z)}$$

**Lösung:**

für $C_1$: $\pi$, für $C_2$: $-\pi$, für $C_3$: 0