Prof. Paditz - **Aufg. 3.3.**24 (3.Ü)

alternativer Lösungsweg: in der 3.Ü diskutiert

$P:=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

$Q:=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

normierter Richtungsvektor der Gereden g:

$a:=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow \text{Gl1}$

$$x^2+y^2=1$$

Lotfußpunkt L bei Projektion von Q auf g:

$P+t*a$

$$\begin{bmatrix}t\cdot x-1\\t\cdot y+3\end{bmatrix}$$

$\text{norm}(Q-\text{ans})^2=16 \Rightarrow \text{Gl2}$

$$t^2\cdot(x^2+y^2)-t\cdot(6\cdot x-8\cdot y)+25=16$$

mit Gl1:

$t^2 \cdot (1) - t \cdot (6 \cdot x - 8 \cdot y) + 25 = 16 \Rightarrow Gl2$

$$t^2 - t \cdot (6 \cdot x - 8 \cdot y) + 25 = 16$$

Orthogonalität von LQ zu a:

dotP(Q−(P+t*a),a)=0 ⇒ Gl3

$$-x \cdot (t \cdot x - 3) - y \cdot (t \cdot y + 4) = 0$$

solve(Gl3,t)

$$\left\{t = \frac{3 \cdot x - 4 \cdot y}{x^2 + y^2}\right\}$$

mit Gl1:

$Gl2 | t = \frac{3 \cdot x - 4 \cdot y}{1}$

$$(3 \cdot x - 4 \cdot y)^2 - (6 \cdot x - 8 \cdot y) \cdot (3 \cdot x - 4 \cdot y) + 25 = 16$$

simplify(ans) ⇒ Gl21

$$-9 \cdot x^2 - 16 \cdot y^2 + 24 \cdot x \cdot y + 25 = 16$$

$\begin{cases} Gl1 \\ Gl21 \end{cases} \Bigg|_{x,y}$

$$\left\{\{x=-1, y=0\}, \{x=1, y=0\}, \left\{x=-\frac{7}{25}, y=-\frac{24}{25}\right\}, \left\{x=\frac{7}{25}, y= \right.\right.$$

zwei Richtungsvektoren:

$a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 7 \\ 24 \end{bmatrix}$

erste Lösung (parameterfrei):

$P + t * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} t-1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y=const=3 ($x \in \mathbb{R}$)

zweite Lösung (parameterfrei):

$P+t*\frac{1}{25}\begin{bmatrix}7\\24\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\frac{7\cdot t}{25}-1\\ \frac{24\cdot t}{25}+3\end{bmatrix}$$

$\text{solve}(x=\frac{7\cdot t}{25}-1,t)$

$$\left\{t=\frac{25\cdot x}{7}+\frac{25}{7}\right\}$$

$y=\frac{24\cdot t}{25}+3\,|\,t=\frac{25\cdot x}{7}+\frac{25}{7}$

$$y=\frac{24\cdot\left(\frac{25\cdot x}{7}+\frac{25}{7}\right)}{25}+3$$

simplify(ans)

$$y=\frac{24\cdot x}{7}+\frac{45}{7}$$

andere Lösungsidee (eines Studenten):

DelVar x,y

done

Kreis mit Radius 4 um Q betrachten:

$(x-2)^2+(y+1)^2=16$

Die gesuchten Geraden sind die Tangenten durch P an den Kreis.

Ansatz für Gerade g durch P:

$y=m*x+n=m*(x+1)+3$

$(x-2)^2+(y+1)^2=16\,|\,y=m\cdot(x+1)+3$

$$(m\cdot(x+1)+4)^2+(x-2)^2=16$$

solve(ans,x)

$$\left\{x=\frac{-\left(m^2+4\cdot m-\sqrt{7\cdot m^2-24\cdot m}-2\right)}{m^2+1}, x=\frac{-\left(m^2+4\cdot m+\sqrt{7\cdot m^2\cdot}\right.}{m^2+1}\right.$$

nur eindeutige Lösung für $\sqrt{7\cdot m^2-24\cdot m}=0$:

solve($\sqrt{7\cdot m^2-24\cdot m}=0$, m)

$$\left\{m=0, m=\frac{24}{7}\right\}$$

Die möglichen Anstiege der Tangenten sind $\left\{m=0, m=\frac{24}{7}\right\}$

$$\left\{x=\frac{-\left(m^2+4\cdot m-\sqrt{7\cdot m^2-24\cdot m}-2\right)}{m^2+1}, y=3\right\} | m=0$$

$$\{x=2, y=3\}$$

$$\left\{x=\frac{-\left(m^2+4\cdot m-\sqrt{7\cdot m^2-24\cdot m}-2\right)}{m^2+1}, y=m\cdot(x+1)+3\right\} | m=\frac{24}{7}$$

$$\left\{x=-\frac{46}{25}, y=\frac{24\cdot(x+1)}{7}+3\right\}$$

$$y=\frac{24\cdot(x+1)}{7}+3 | x=-\frac{46}{25}$$

$$y=\frac{3}{25}$$

Berührpunkte: $L(-\frac{46}{25}, \frac{3}{25})$ bzw. $L(2, 3)$

Geraden: $y=3$ bzw. $y=\frac{24\cdot(x+1)}{7}+3$

Prof. Paditz - **V-Beispiel**

Fläche 4. Ordnung

Extremwertaufgabe ohne NB

Define $z1(x,y)=\frac{x^4}{16}+\frac{y^4}{16}+\frac{x^2\cdot y^2}{8}-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}$

done

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(z1(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(z1(x,y))=0\end{cases}\right|_{x,y}$$

{{x=-1,y=0},{x=0,y=-2},{x=0,y=0},{x=0,y=2},{x=

5 extremwertverdächtige Stellen:

Define $D(x,y)=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{d^2}{dx^2}(z1(x,y)) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(z1(x,y\right.\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(z1(x,y))\right) & \frac{d^2}{dy^2}(z1(x,y))\end{bmatrix}\right.$

done

D(x,y)

$$\frac{3\cdot x^4}{16}+\frac{3\cdot y^4}{16}+\frac{3\cdot x^2\cdot y^2}{8}-\frac{13\cdot x^2}{16}-\frac{7\cdot y^2}{16}+\frac{1}{4}$$

D(x,y)|{x=-1,y=0}

$$-\frac{3}{8}$$

D(x,y)|{x=1,y=0}

$$-\frac{3}{8}$$

$D(x, y) | \{x=0, y=0\}$

$$\frac{1}{4}$$

$D(x, y) | \{x=0, y=-2\}$

$$\frac{3}{2}$$

$D(x, y) | \{x=0, y=2\}$

$$\frac{3}{2}$$

Drei Extremstellen:

$\{x=0, y=-2\}, \{x=0, y=0\}, \{x=0, y=2\}$

$\frac{d^2}{dx^2}(z1(x, y)) | \{x=0, y=0\}$

$$-\frac{1}{4}$$

$z1(x, y) | \{x=0, y=0\}$

$$0$$

Maximum bei $\{x=0, y=0, z=0\}$

$\frac{d^2}{dx^2}(z1(x, y)) | \{x=0, y=-2\}$

$$\frac{3}{4}$$

$z1(x, y) | \{x=0, y=-2\}$

$$-1$$

Minimum bei $\{x=0, y=-2, z=-1\}$

$\frac{d^2}{dx^2}(z1(x, y)) | \{x=0, y=2\}$

$$\frac{3}{4}$$

$z1(x, y) | \{x=0, y=2\}$

$$-1$$

Minimum bei {x=0, y=2, z=−1}

Define z2(x, y)= $-\frac{1}{16}$

done

3D−Grafik

zwei Sattelpunkte bei {x=−1, y=0}, {x=1, y=0}

z1(x, y)|{x=1, y=0}

$-\frac{1}{16}$

z1(x, y)|{x=−1, y=0}

$-\frac{1}{16}$

Extremwertaufg. $z=x^2+2y^2$ **mit NB** $y=x^2-1$**:**

Define xst3(s, t)=t*cos(s)

done

Define yst3(s, t)=t/2*sin(s)

done

Define zst3(s, t)= t^2

done

Define xst4(s, t)=s

done

Define yst4(s, t)= s^2-1

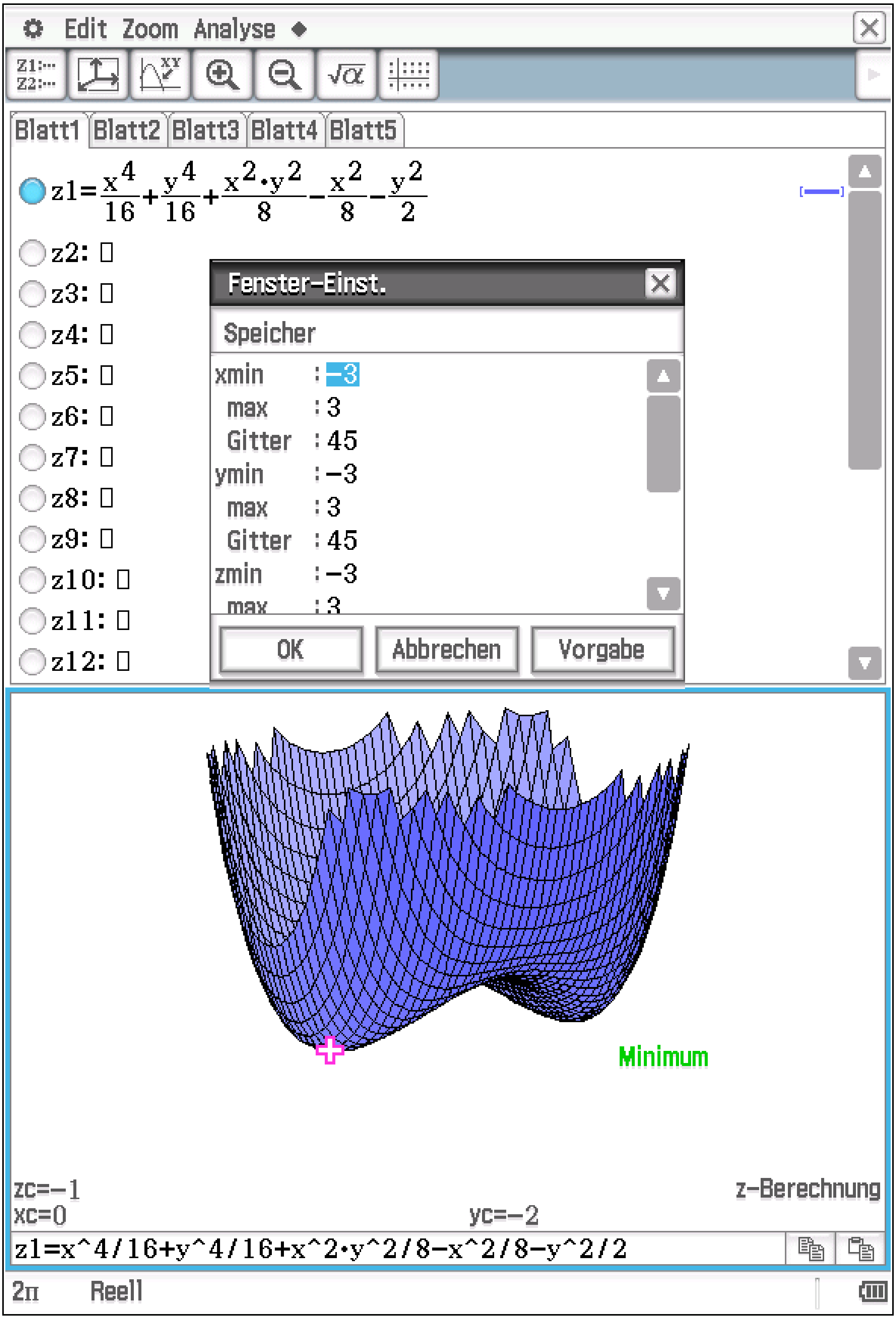
done

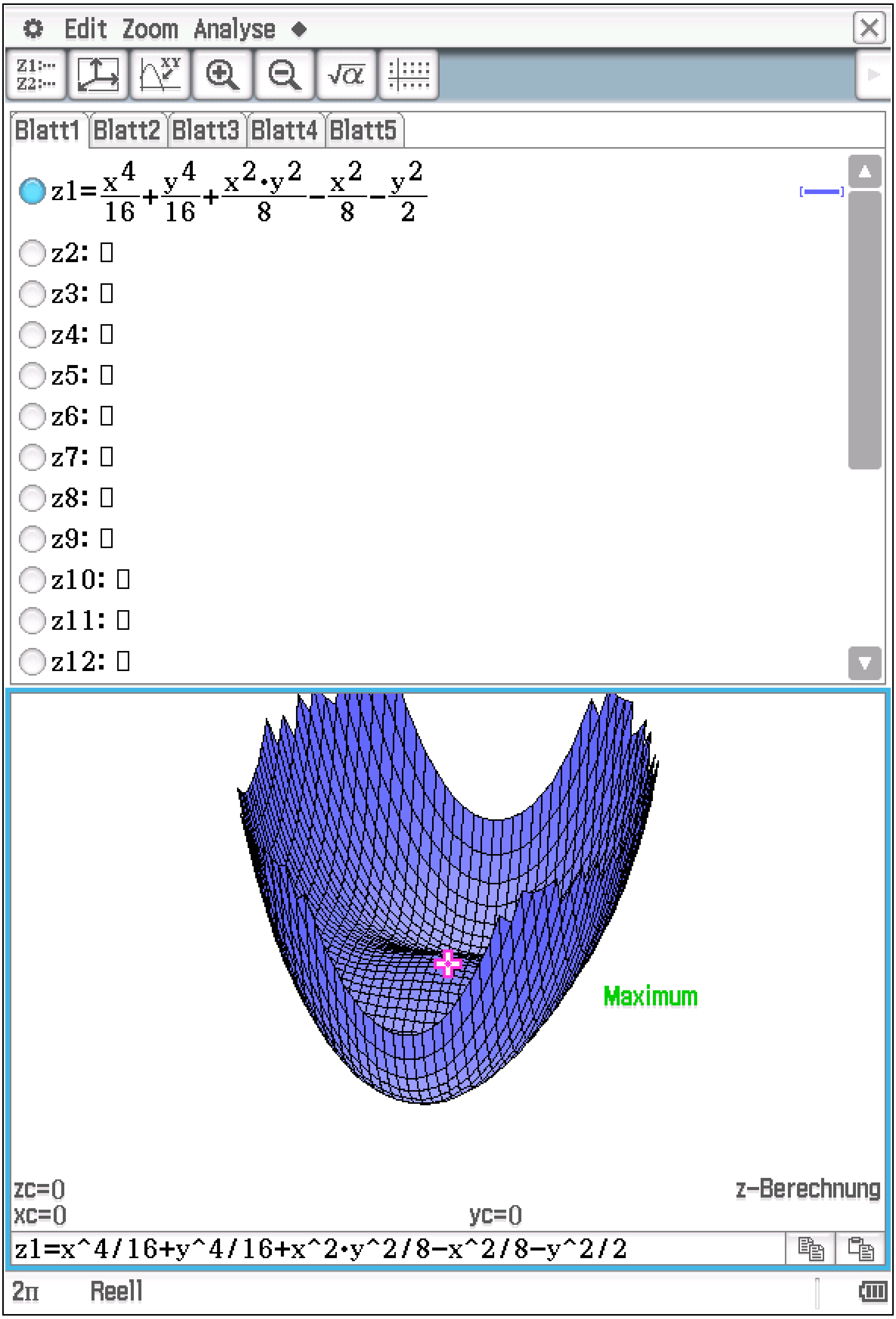
Define zst4(s, t)=t

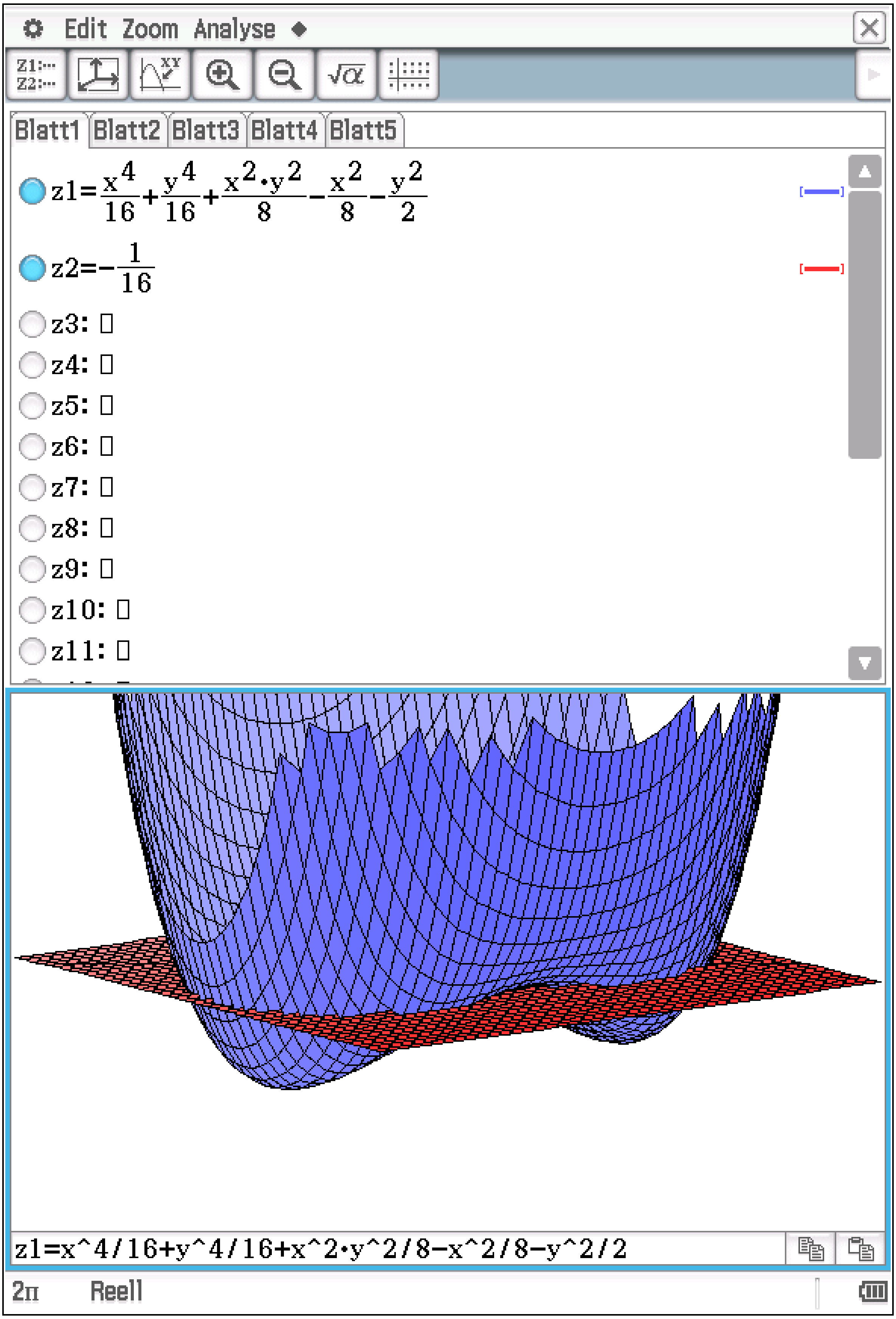
done

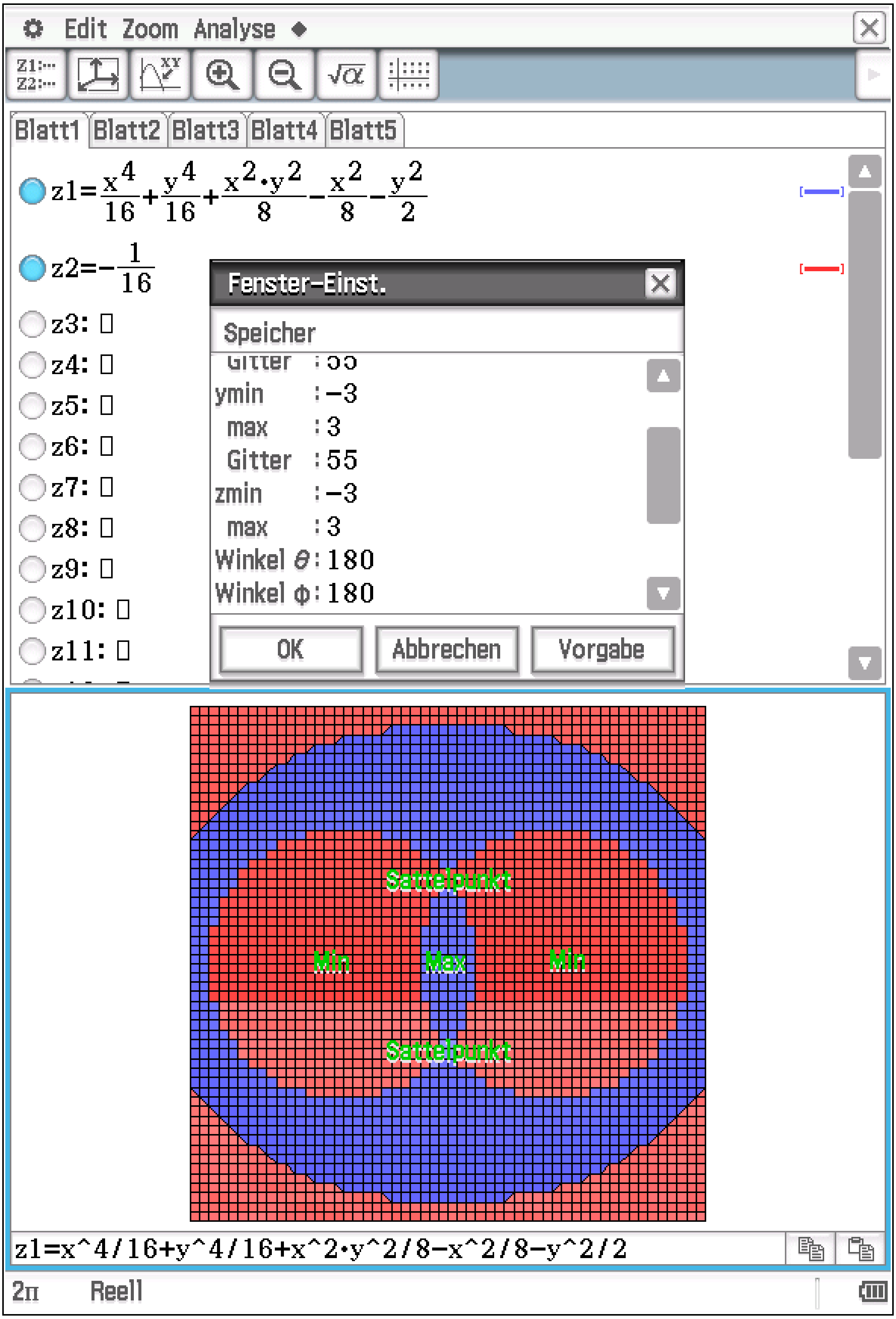
3D−Grafik

Extremwertaufg. ohne NB

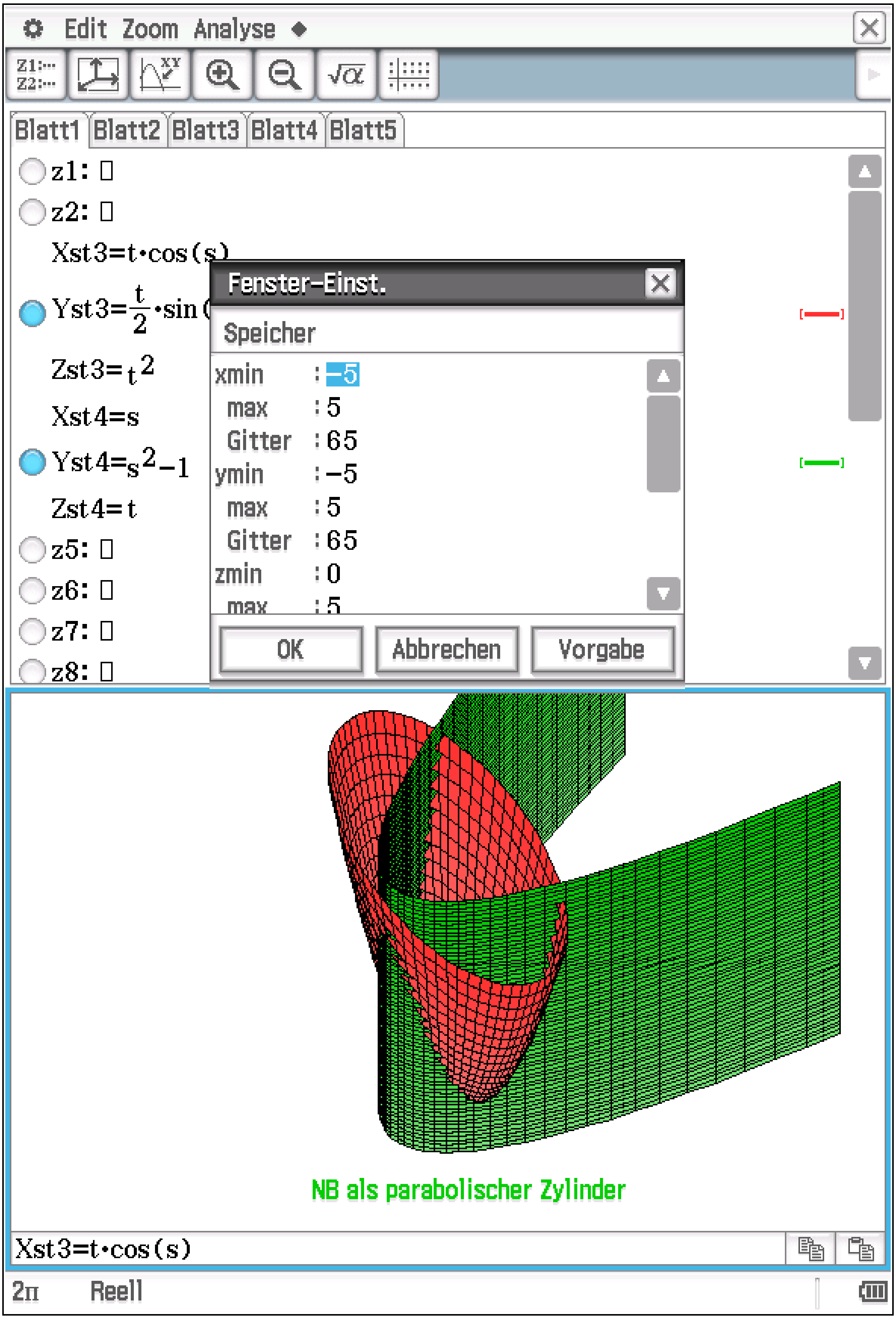


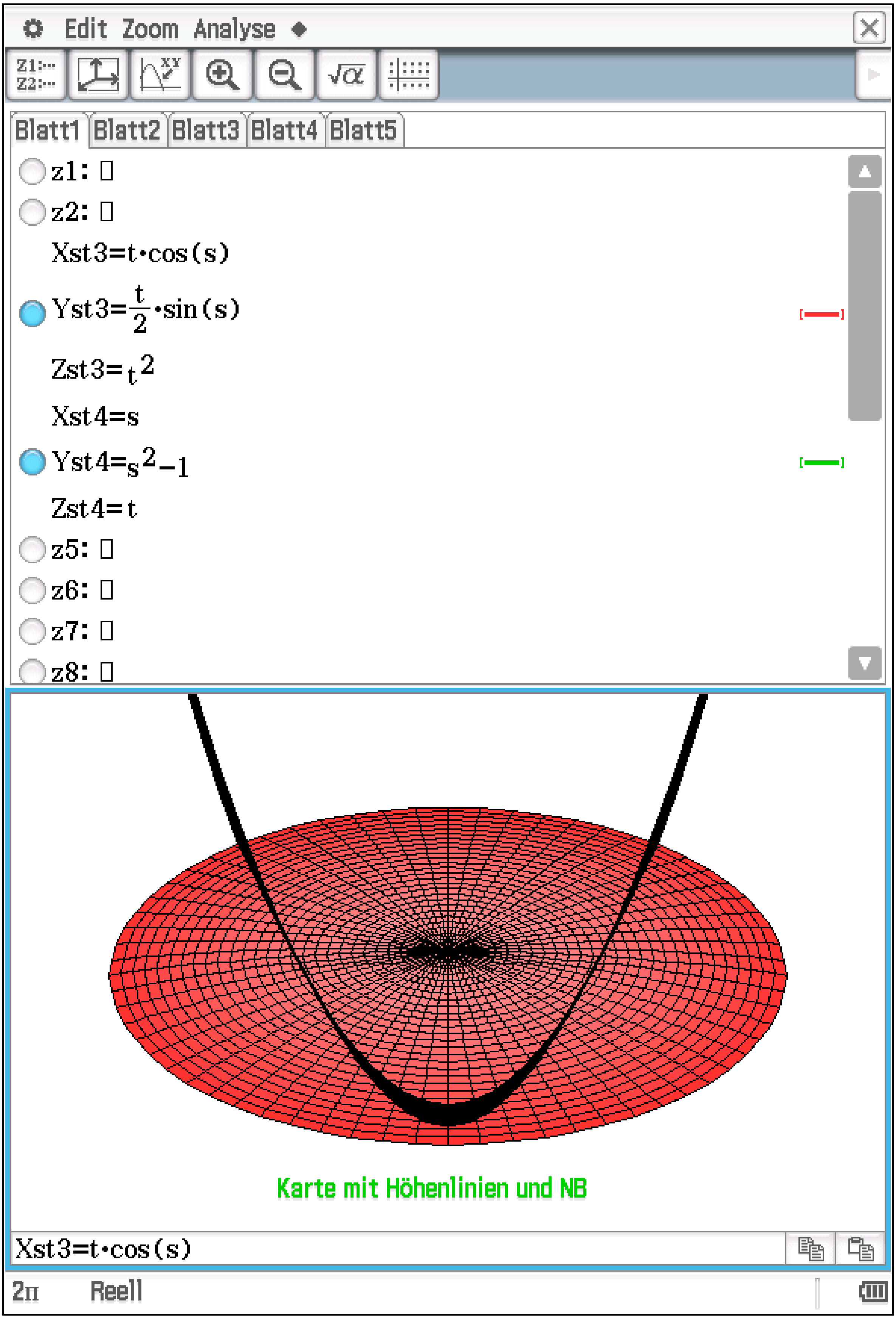

Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
$z1=\frac{x^4}{16}+\frac{y^4}{16}+\frac{x^2 \cdot y^2}{8}-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}$
z2:
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
z12:
Maximum
zc=0
z-Berechnung
xc=0
yc=0
z1=x^4/16+y^4/16+x^2•y^2/8-x^2/8-y^2/2
Reell


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=x^4/16+y^4/16+x^2·y^2/8−x^2/8−y^2/2
z2=−1/16
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
z1=x^4/16+y^4/16+x^2·y^2/8−x^2/8−y^2/2
Reell


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=x^4/16+y^4/16+x^2·y^2/8−x^2/8−y^2/2
z2=−1/16
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
Fenster-Einst.
Speicher
ymin :−3
max :3
Gitter :55
zmin :−3
max :3
Winkel θ:180
Winkel φ:180
OK
Abbrechen
Vorgabe
Sattelpunkt
Min
Max
Min
Sattelpunkt
z1=x^4/16+y^4/16+x^2·y^2/8−x^2/8−y^2/2
2π
Reell

Extremwertaufg. mit NB




Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1:
z2:
Xst3=t·cos(s)
Yst3=t/2·sin(s)
Zst3=t^2
Xst4=s
Yst4=s^2−1
Zst4=t
z5:
z6:
z7:
z8:
Karte mit Höhenlinien und NB
Xst3=t·cos(s)
2π Reell