Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Fakultät Informatik / Mathematik
Prof. Dr. L. Paditz

Dresden, im November 2010

Ergänzungsaufgaben zur Linearen Algebra (Heft K)

5. Determinanten

5.1. Man berechne die Determinanten zu folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ -4 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 13 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.2. Man bestimme sämtliche Adjunkten der Determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 14 \end{vmatrix}$ du gebe diese in einer Matrix an (Adjunktenmatrix).

5.3. Man beweise:
$$\begin{vmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1 - x_2}{2} & \frac{y_1 - y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

5.4. Man beweise für die VANDERMONDEsche Determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$$

5.5. Man berechne für nebenstehende Matrizen det $\underline{A}$, det $\underline{B}$, det($\underline{A}$ $\underline{B}$) und zeige an diesem Beispiel die Gültigkeit des Multiplikationssatzes für Determinanten.
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.6. Für welche Zahlen λ gilt $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$? (sog. Eigenwertproblem).

5.7. Welche Kurve wird durch $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x+6 \end{vmatrix} = 11$ beschrieben?

5.8. Man löse mit der CRAMERschen Regel

a)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 10x + 5y + 2z &= 6 \\ 2x - z &= 2 \\ x - 8y - 5z &= -6 \end{aligned}$$