Prof. Dr. L. Paditz   17.11.2016

inhomogene linare Dgl. mit konst. Koeffizienten

==

Aufg. E1.21a) (AWP)

$y'''-4y'=x\cdot e^{3x}$

AB: $y(0)=\frac{27}{25}$, $y'(0)=-\frac{6}{25}$, $y''(0)=\frac{12}{25}$

Lösung mit L-Transformation:

==========================

laplace($y'''-4y'=x\cdot e^{3x}$, x, y, s)

$$-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-y''(0)+Lp\cdot s^3+4\cdot(y(0)-Lp\cdot s)=\frac{1}{(s-3)^2}$$

ans|{$y(0)=\frac{27}{25}$, $y'(0)=-\frac{6}{25}$, $y''(0)=\frac{12}{25}$}

$$Lp\cdot s^3-\frac{27\cdot s^2}{25}-4\cdot\left(Lp\cdot s-\frac{27}{25}\right)+\frac{6\cdot s}{25}-\frac{12}{25}=\frac{1}{(s-3)^2}$$

solve(ans, Lp)

$$\left\{Lp=\frac{27\cdot s^4-168\cdot s^3+183\cdot s^2+522\cdot s-839}{25\cdot\left(s^3-4\cdot s\right)\cdot(s-3)^2}\right\}$$

invlaplace($\frac{27\cdot s^4-168\cdot s^3+183\cdot s^2+522\cdot s-839}{25\cdot\left(s^3-4\cdot s\right)\cdot(s-3)^2}$, s, x)

$$\frac{60\cdot x\cdot\cosh(3\cdot x)+60\cdot x\cdot\sinh(3\cdot x)-92\cdot\cosh(3\cdot x)-92\cdot\sinh(3\cdot x)+22}{900}$$

expand(ans)

$$\frac{x\cdot\cosh(3\cdot x)}{15}+\frac{x\cdot\sinh(3\cdot x)}{15}-\frac{23\cdot\cosh(3\cdot x)}{225}-\frac{23\cdot\sinh(3\cdot x)}{225}+\frac{\cosh(2}{4}$$

trigToExp(ans)

$$\frac{x\cdot e^{3\cdot x}}{15}-\frac{23\cdot e^{3\cdot x}}{225}+\frac{e^{2\cdot x}}{8}+\frac{e^{-2\cdot x}}{8}+\frac{839}{900}$$

============================

ausführlich mit PBZ:

$$\text{expand}\left(\frac{27\cdot s^4-168\cdot s^3+183\cdot s^2+522\cdot s-839}{25\cdot\left(s^3-4\cdot s\right)\cdot(s-3)^2},s\right)$$

$$\frac{1}{8\cdot(s+2)}+\frac{1}{8\cdot(s-2)}-\frac{23}{225\cdot(s-3)}+\frac{839}{900\cdot s}+\frac{1}{15\cdot(s-3)^2}$$

$$\begin{bmatrix}\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{8\cdot(s+2)}\right)[x]\\ \mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{8\cdot(s-2)}\right)[x]\\ \mathcal{L}_s^{-1}\left(-\frac{23}{225\cdot(s-3)}\right)[x]\\ \mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{839}{900\cdot s}\right)[x]\\ \mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{15\cdot(s-3)^2}\right)[x]\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{e^{-2\cdot x}}{8}\\ \frac{e^{2\cdot x}}{8}\\ \frac{-23\cdot e^{3\cdot x}}{225}\\ \frac{839}{900}\\ \frac{x\cdot e^{3\cdot x}}{15}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}\left(\mathrm{ans},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{x\cdot e^{3\cdot x}}{15}-\frac{23\cdot e^{3\cdot x}}{225}+\frac{e^{2\cdot x}}{8}+\frac{e^{-2\cdot x}}{8}+\frac{839}{900}$$

direkter Weg:

$$\mathrm{dSolve}\left(y'''-4y'=x\cdot e^{3x},x,y,x=0,y=\frac{27}{25},x=0,y'=-\frac{6}{25},x=0,y''=\frac{1}{2}\right.$$

$$\left\{y=\frac{x\cdot e^{3\cdot x}}{15}-\frac{23\cdot e^{3\cdot x}}{225}+\frac{e^{2\cdot x}}{8}+\frac{e^{-2\cdot x}}{8}+\frac{839}{900}\right\}$$

charakt. Gleichung:

$\mathrm{solve}(\lambda^3-4\lambda=0,\lambda)$

$$\{\lambda=-2,\lambda=0,\lambda=2\}$$

y_hom=C1*e^{-2x}+C2*e^{0x}+C3*e^{2x}

Ansatz für $r(x)=x\cdot e^{3x}$:

yp_inhom=(a*x+b)*e^{3x}

Einsetzen:

$$\frac{d^3}{dx^3}\left((a*x+b)*e^{3x}\right)-4\frac{d}{dx}\left((a*x+b)*e^{3x}\right)-x\cdot e^{3x}=0$$

$$27\cdot a\cdot x\cdot e^{3\cdot x}-x\cdot e^{3\cdot x}+27\cdot a\cdot e^{3\cdot x}+27\cdot b\cdot e^{3\cdot x}-4\cdot\left(3\cdot a\cdot x\cdot e^{3\cdot x}+a\cdot e^{3\cdot}\right.$$

ans/e^{3x}

$$-\left(x\cdot e^{3\cdot x}-27\cdot a\cdot x\cdot e^{3\cdot x}-27\cdot a\cdot e^{3\cdot x}-27\cdot b\cdot e^{3\cdot x}+4\cdot\left(3\cdot a\cdot x\cdot e^{3\cdot x}+a\cdot e\right.\right.$$

simplify(ans)

$$15\cdot a\cdot x-x+23\cdot a+15\cdot b=0$$

$$\left.\begin{cases}\mathrm{ans}\mid x=0\\ \mathrm{ans}\mid x=1\end{cases}\right|_{a,b}$$

$$\left\{a=\frac{1}{15}, b=-\frac{23}{225}\right\}$$

Define $y(x)=C1*e^{-2x}+C2*e^{0x}+C3*e^{2x}+(a*x+b)*e^{3x} \mid \left\{a=\frac{1}{15},\right.$ ▶

done

Anpassen AB:

$$y(0)=\frac{27}{25}$$

$$C1+C2+C3-\frac{23}{225}=\frac{27}{25}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x))=-\frac{6}{25} \mid x=0$$

$$\frac{-(50\cdot C1-50\cdot C3+6)}{25}=-\frac{6}{25}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))=\frac{12}{25} \mid x=0$$

$$\frac{100\cdot C1+100\cdot C3-13}{25}=\frac{12}{25}$$

$$\left\{\begin{array}{l} C1+C2+C3-\frac{23}{225}=\frac{27}{25} \\ \frac{-(50\cdot C1-50\cdot C3+6)}{25}=-\frac{6}{25} \\ \frac{100\cdot C1+100\cdot C3-13}{25}=\frac{12}{25} \end{array}\right|_{C1,C2,C3}$$

$$\left\{C1=\frac{1}{8}, C2=\frac{839}{900}, C3=\frac{1}{8}\right\}$$

$$y(x) \mid \left\{C1=\frac{1}{8}, C2=\frac{839}{900}, C3=\frac{1}{8}\right\}$$

$$\left(\frac{x}{15}-\frac{23}{225}\right)\cdot e^{3\cdot x}+\frac{e^{2\cdot x}}{8}+\frac{e^{-2\cdot x}}{8}+\frac{839}{900}$$

VdK:

yp(x)=$C1(x)*e^{-2x}+C2(x)*e^{0x}+C3(x)*e^{2x}$

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{0x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & 0 & 2e^{2x} \\ 4e^{-2x} & 0 & 4e^{2x} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \cdot e^{3x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x \cdot e^{5 \cdot x}}{8} \\ \frac{-x \cdot e^{3 \cdot x}}{4} \\ \frac{x \cdot e^{x}}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\square}^{\square} \frac{x \cdot e^{5 \cdot x}}{8} dx \\ \int_{\square}^{\square} \frac{-x \cdot e^{3 \cdot x}}{4} dx \\ \int_{\square}^{\square} \frac{x \cdot e^{x}}{8} dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5 \cdot x \cdot e^{5 \cdot x} - e^{5 \cdot x}}{200} \\ \frac{-(3 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x} - e^{3 \cdot x})}{36} \\ \frac{x \cdot e^{x} - e^{x}}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{0x} & e^{2x} \end{bmatrix} * \text{ans}$$

$$\left[\frac{(x \cdot e^{x} - e^{x}) \cdot e^{2 \cdot x}}{8} + \frac{(5 \cdot x \cdot e^{5 \cdot x} - e^{5 \cdot x}) \cdot e^{-2 \cdot x}}{200} - \frac{3 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x} - e^{3 \cdot x}}{36} \right]$$

simplify(ans)

$$\left[\frac{(15 \cdot x - 23) \cdot e^{3 \cdot x}}{225} \right]$$

$$yp(x)=\frac{(15\cdot x-23)\cdot e^{3\cdot x}}{225}$$

Prof. Dr. L. Paditz 17.11.2016

inhomogene linare Dgl. mit konst. Koeffizienten

===

Aufg. E2.4 (komplett lösen, Eliminationsverfahren)

$$\left\{\begin{array}{l} y_1''+y_2'+y_1+3y_2=4x \\ y_1' \;+y_2'+y_1\;+y_2=0 \end{array}\right|_{y_1,\,y_2}$$

a) Darstellung in Matrixform, vgl. 1.HA:

$$\mathbf{A_2*Y'' + A_1*Y' + A_0*Y = r}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}y_1''\\y_2''\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x\\0\end{bmatrix}$$

b) charakteristische Gleichung

Sei (1) $y_1''+y_2'+y_1+3y_2=4x$

und (2) $y_1' \;+y_2'+y_1\;+y_2=0$

(1)−(2) ergibt

$y_1''+3y_2-(y_1'+y_2)=4x$, d.h.

$y_1''-y_1'+2y_2=4x$

Elimination von $y_2=\dfrac{-y_1''+y_1'+4x}{2}$ (3)

Hieraus $y_2'=\dfrac{-y_1'''+y_1''+4}{2}$ (4)

(3),(4) in (2) (oder (1)):

$y_1' + \frac{-y_1''' + y_1'' + 4}{2} + y_1 + \frac{-y_1'' + y_1' + 4x}{2} = 0$

vereinfacht

$-\frac{y_1'''}{2} + \frac{3y_1'}{2} + y_1 = -2x - 2$

$y_1''' - 3y_1' - 2y_1 = 4x + 4$

char. Gl.

$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$

c) Gesamtordnung des Systems: N=3

d) Alle Lös. der char. Gl.

solve($\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0, \lambda$)

$\{\lambda = -1, \lambda = 2\}$

factor($\lambda^3 - 3\lambda - 2$)

$(\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda - 2)$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$

e) Fundamentalsystem

FS=$\{e^{-x}, xe^{-x}, e^{2x}\}$

f) allg. Lös. des hom. Systems

$y_1\_hom = C1 * e^{-x} + C2 * xe^{-x} + C3 * e^{2x}$

mit (3)

$y_2 = \frac{-y_1'' + y_1' + 4x}{2}$ (ohne $\frac{4x}{2}$)

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}(C1*e^{-x}+C2*xe^{-x}+C3*e^{2x})+\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(C1*e^{-x}+C2*xe^{-x}+C$$

$$\frac{(2\cdot C3\cdot e^{3\cdot x}-C2\cdot x-C1+C2)\cdot e^{-x}}{2}-\frac{(4\cdot C3\cdot e^{3\cdot x}+C2\cdot x+C1-2\cdot C2)\cdot e^{-x}}{2}$$

simplify(ans)

$$\frac{-(2\cdot C3\cdot e^{3\cdot x}+2\cdot C2\cdot x+2\cdot C1-3\cdot C2)\cdot e^{-x}}{2}$$

expand(ans)

$$-C3\cdot e^{2\cdot x}-C2\cdot x\cdot e^{-x}-C1\cdot e^{-x}+\frac{3\cdot C2\cdot e^{-x}}{2}$$

$$y_2\_hom=\left(-C1+\frac{3\cdot C2}{2}\right)\cdot e^{-x}-C2\cdot x\cdot e^{-x}-C3\cdot e^{2\cdot x}$$

zusammengefasst, vektoriell:

$$\begin{bmatrix} y_1\_hom \\ y_2\_hom \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2} \end{bmatrix}\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C2 \\ -C2 \end{bmatrix}\cdot x\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C3 \\ -C3 \end{bmatrix}\cdot e^{2\cdot x}$$

g) eine Partikulärlösung des inhom. Systems

dSolve($y_1'''-3y_1'-2y_1=4x+4, x, y_1$)

$$\{y_1=e^{2\cdot x}\cdot const(1)+x\cdot e^{-x}\cdot const(3)+e^{-x}\cdot const(2)-2\cdot x+1\}$$

$y_1\_p=-2\cdot x+1$

$$y_2=\frac{-y_1''+y_1'+4x}{2}$$

$$\frac{1}{2}(-0-2+4x)$$

$$\frac{4\cdot x-2}{2}$$

simplify(ans)

$$2\cdot x-1$$

$y_2\_p=2\cdot x-1$

$$\begin{bmatrix} y_1\_p \\ y_2\_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}*x+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

h) allg. Lös. des inhom. Systems

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2} \end{bmatrix}\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C2 \\ -C2 \end{bmatrix}\cdot x\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C3 \\ -C3 \end{bmatrix}\cdot e^{2\cdot x}+\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}*x+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

i) Lösung des AWP mit $y_1(0)=y_1'(0)=1$, $y_2(0)=-1$

$$\begin{bmatrix} C1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2} \end{bmatrix}\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C2 \\ -C2 \end{bmatrix}\cdot x\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C3 \\ -C3 \end{bmatrix}\cdot e^{2\cdot x}+\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}*x+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}|x=0$$

$$\begin{bmatrix} C1+C3+1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2}-C3-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2} \end{bmatrix}\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C2 \\ -C2 \end{bmatrix}\cdot x\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C3 \\ -C3 \end{bmatrix}\cdot e^{2\cdot x}+\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}*x+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C3\cdot e^{2\cdot x}+C2\cdot x\cdot e^{-x}+C1\cdot e^{-x}-2\cdot x+1 \\ -C3\cdot e^{2\cdot x}-C2\cdot x\cdot e^{-x}-\left(C1-\frac{3\cdot C2}{2}\right)\cdot e^{-x}+2\cdot x-1 \end{bmatrix}$$

ans[1,1]

$$C3\cdot e^{2\cdot x}+C2\cdot x\cdot e^{-x}+C1\cdot e^{-x}-2\cdot x+1$$

$\frac{d}{dx}(ans)|x=0$

$$-C1+C2+2\cdot C3-2$$

$$\begin{cases} C1+C3+1=1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2}-C3-1=-1 \\ -C1+C2+2\cdot C3-2=1 \end{cases}\Bigg|_{C1,C2,C3}$$

$$\{C1=-1, C2=0, C3=1\}$$

$$\begin{bmatrix} C1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2} \end{bmatrix}\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C2 \\ -C2 \end{bmatrix}\cdot x\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C3 \\ -C3 \end{bmatrix}\cdot e^{2\cdot x}+\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}* x+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\,|\,\{C$$

$$\begin{bmatrix} e^{2\cdot x}-e^{-x}-2\cdot x+1 \\ -e^{2\cdot x}+e^{-x}+2\cdot x-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot e^{2x}+\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}* x+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

j) Lösung des RWP mit $y_1(0)=1$, $y_1(1)=0$, $y_2(0)=-1$

$y_1(0)=1$, $y_2(0)=-1$ wie in i)

nur 3. Bedingung verändert.

$$C3\cdot e^{2\cdot x}+C2\cdot x\cdot e^{-x}+C1\cdot e^{-x}-2\cdot x+1\,|\,x=1$$

$$C1\cdot e^{-1}+C2\cdot e^{-1}+C3\cdot e^{2}-1$$

$$\begin{cases} C1+C3+1=1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2}-C3-1=-1 \\ C1\cdot e^{-1}+C2\cdot e^{-1}+C3\cdot e^{2}-1=0 \end{cases}\Bigg|_{C1,C2,C3}$$

$$\left\{C1=\frac{-e}{e^{3}-1}, C2=0, C3=\frac{e}{e^{3}-1}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} C1 \\ -C1+\frac{3\cdot C2}{2} \end{bmatrix}\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C2 \\ -C2 \end{bmatrix}\cdot x\cdot e^{-x}+\begin{bmatrix} C3 \\ -C3 \end{bmatrix}\cdot e^{2\cdot x}+\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}* x+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\,|\,\{C$$

$$\begin{bmatrix} \frac{e^{2\cdot x+1}}{e^3-1} - \frac{e^{-x+1}}{e^3-1} - 2\cdot x+1 \\ \frac{-e^{2\cdot x+1}}{e^3-1} + \frac{e^{-x+1}}{e^3-1} + 2\cdot x-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{e}{e^3-1} \\ \frac{e}{e^3-1} \end{bmatrix} \cdot e^{-x} + \begin{bmatrix} \frac{e}{e^3-1} \\ -\frac{e}{e^3-1} \end{bmatrix} \cdot e^{2x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} * x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ d.h.}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{e}{e^3-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (e^{-x} - e^{2x}) + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} * x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

k) Welcher Sachverhalt liegt vor,

wenn die rechte Seite des Systems $r(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x}$ lautet?

Welcher Ansatz für eine Partikulärlösung führt dann zum Ziel?

Resonanzfall! (mit m=2, Doppellösung $\lambda=-1$ in char. Gl.)

Ansatz mit quadratischen Polynomen:

$$\begin{bmatrix} a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ d\cdot x^2+f\cdot x+g \end{bmatrix} e^{-x}$$

Bem.: Im Vektoransatz ist es nicht ausreichend $x^2 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{-x}$ anzusetzen.

Lösung:

$$\begin{cases} y_1''+y_2'+y_1+3y_2=2e^{-x} \\ y_1' \ +y_2'+y_1 \ +y_2=-e^{-x} \end{cases}\Bigg|_{y_1,\,y_2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d^2}{dx^2}\left((a\cdot x^2+b\cdot x+c)e^{-x}\right)+\frac{d}{dx}\left((d\cdot x^2+f\cdot x+g)e^{-x}\right)+(a\cdot x^2+b\cdot x+c) \\ \frac{d}{dx}\left((a\cdot x^2+b\cdot x+c)e^{-x}\right)+\frac{d}{dx}\left((d\cdot x^2+f\cdot x+g)e^{-x}\right)+(a\cdot x^2+b\cdot x+c)e \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (a\cdot x^2-4\cdot a\cdot x+b\cdot x+2\cdot a-2\cdot b+c)\cdot e^{-x}+(a\cdot x^2+b\cdot x+c)\cdot e^{-x}-(d\cdot x^2-2 \\ -(a\cdot x^2-2\cdot a\cdot x+b\cdot x-b+c)\cdot e^{-x}+(a\cdot x^2+b\cdot x+c)\cdot e^{-x}-(d\cdot x^2-2\cdot d\cdot x+ \end{array}\right.$$

simplify(ans)

$$\left[\begin{array}{l} (2\cdot a\cdot x^2+2\cdot d\cdot x^2-4\cdot a\cdot x+2\cdot b\cdot x+2\cdot d\cdot x+2\cdot f\cdot x+2\cdot a-2\cdot b+2\cdot c+f+2\cdot g)\cdot \\ (2\cdot a\cdot x+2\cdot d\cdot x+b+f)\cdot e^{-x} \end{array}\right.$$

$2\cdot a\cdot x^2+2\cdot d\cdot x^2-4\cdot a\cdot x+2\cdot b\cdot x+2\cdot d\cdot x+2\cdot f\cdot x+2\cdot a-2\cdot b+2\cdot c+f+2\cdot g=2 \Rightarrow G1$

$$2\cdot a\cdot x^2+2\cdot d\cdot x^2-4\cdot a\cdot x+2\cdot b\cdot x+2\cdot d\cdot x+2\cdot f\cdot x+2\cdot a-2\cdot b+2\cdot c+f+2\cdot g=2$$

$2\cdot a\cdot x+2\cdot d\cdot x+b+f=-1 \Rightarrow G2$

$$2\cdot a\cdot x+2\cdot d\cdot x+b+f=-1$$

$$\begin{cases} G1 \mid x=0 \\ G1 \mid x=1 \\ G1 \mid x=-1 \\ G2 \mid x=0 \\ G2 \mid x=1 \\ G2 \mid x=-1 \end{cases}\Bigg|_{a,\,b,\,c,\,d,\,f,\,g}$$

$$\left\{a=-\frac{1}{3},\, b=-f-1,\, c=\frac{-(9\cdot f+6\cdot g-2)}{6},\, d=\frac{1}{3},\, f=f,\, g=g\right\}$$

ans | f=0 and g=0

$$\left\{a=-\frac{1}{3},\, b=-1,\, c=\frac{1}{3},\, d=\frac{1}{3},\, 0=0,\, 0=0\right\}$$

$$(a\cdot x^2+b\cdot x+c)e^{-x} \mid \left\{a=-\frac{1}{3},\, b=-1,\, c=\frac{1}{3},\, d=\frac{1}{3},\, f=0,\, g=0\right\}$$

$$-\left(\frac{x^2}{3}+x-\frac{1}{3}\right)\cdot e^{-x}$$

$(d\cdot x^2+f\cdot x+g)e^{-x} \mid \left\{a=-\frac{1}{3}, b=-1, c=\frac{1}{3}, d=\frac{1}{3}, f=0, g=0\right\}$

$$\frac{x^2\cdot e^{-x}}{3}$$

$$y\_p=\begin{bmatrix} -\left(\frac{x^2}{3}+x-\frac{1}{3}\right) \\ \frac{x^2}{3} \end{bmatrix}\cdot e^{-x}$$

Mit L-Transformation:

===================

$\left\{\begin{array}{l} y_1''+y_2'+y_1+3y_2=4x \\ y_1' \ +y_2'+y_1 \ +y_2=0 \end{array}\right|_{y_1, y_2}$

i) Lösung des AWP mit $y_1(0)=y_1'(0)=1$, $y_2(0)=-1$

Zerlegung der Gleichung:

laplace$(y_1''+y_1=4x, x, y_1, s)$

$$-s\cdot y_1(0)-y_1'(0)+Lp\cdot s^2+Lp=\frac{4}{s^2}$$

ans|Lp=Lp1 and $y_1(0)=1$ and $y_1'(0)=1$

$$Lp1\cdot s^2+Lp1-s-1=\frac{4}{s^2}$$

laplace$(y_2'+3y_2=0, x, y_2, s)$

$$-y_2(0)+Lp\cdot s+3\cdot Lp=0$$

ans|Lp=Lp2 and $y_2(0)=-1$

$$Lp2\cdot s+3\cdot Lp2+1=0$$

$Lp1\cdot s^{2}+Lp1-s-1+Lp2\cdot s+3\cdot Lp2+1=\frac{4}{s^{2}} \Rightarrow Gl1$

$$Lp1\cdot s^{2}+Lp2\cdot s+Lp1+3\cdot Lp2-s=\frac{4}{s^{2}}$$

$\text{laplace}(y_1'+y_1=0, x, y_1, s)$

$$-y_1(0)+Lp\cdot s+Lp=0$$

$\text{ans}|Lp=Lp1 \text{ and } y_1(0)=1$

$$Lp1\cdot s+Lp1-1=0$$

$\text{laplace}(y_2'+y_2=0, x, y_2, s)$

$$-y_2(0)+Lp\cdot s+Lp=0$$

$\text{ans}|Lp=Lp2 \text{ and } y_2(0)=-1$

$$Lp2\cdot s+Lp2+1=0$$

$Lp1\cdot s+Lp1-1+Lp2\cdot s+Lp2+1=0 \Rightarrow Gl2$

$$Lp1\cdot s+Lp2\cdot s+Lp1+Lp2=0$$

$\left.\begin{cases} Gl1 \\ Gl2 \end{cases}\right|_{Lp1, Lp2}$

$$\left\{Lp1=\frac{s^{3}+4}{s^{2}\cdot(s^{2}-s-2)}, Lp2=\frac{-(s^{3}+4)}{s^{4}-s^{3}-2\cdot s^{2}}\right\}$$

$\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{s^{3}+4}{s^{2}\cdot(s^{2}-s-2)}\right)[x]$

$$e^{2\cdot x}-e^{-x}-2\cdot x+1$$

$\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{-(s^{3}+4)}{s^{4}-s^{3}-2\cdot s^{2}}\right)[x]$

$$-e^{2\cdot x}+e^{-x}+2\cdot x-1$$

$y_1=e^{2\cdot x}-e^{-x}-2\cdot x+1$

$y_2=-e^{2\cdot x}+e^{-x}+2\cdot x-1$