Prof. Dr. L. Paditz, 13.11.2015

E2.5(2)

=======

Dgl–System mit 4 Einzelgln. 1.Ordnung, d.h.

Ordnung des Systems beträgt N=4

$y_1-y_1'-y_2'-y_3+y_3'+y_4-y_4'=e^{-x}-2$

$$-y_1'+y_1-y_2'+y_3'-y_3-y_4'+y_4=e^{-x}-2$$

$2y_1-y_1'+4y_2-2y_2'+2y_3-y_3'=0$

$$-y_1'+2\cdot y_1-2\cdot y_2'+4\cdot y_2-y_3'+2\cdot y_3=0$$

$2y_1-y_1'+y_2+y_3'=1$

$$-y_1'+2\cdot y_1+y_2+y_3'=1$$

$-y_1+2y_2+y_2'+y_3+2y_3'+2y_4-2y_4'=0$

$$-y_1+y_2'+2\cdot y_2+2\cdot y_3'+y_3-2\cdot y_4'+2\cdot y_4=0$$

AB:

$\{y_1(0)=8.5, y_2(0)=-13, y_3(0)=17.5, y_4(0)=11.5\} \Rightarrow AB$

$$\left\{y_1(0)=\frac{17}{2}, y_2(0)=-13, y_3(0)=\frac{35}{2}, y_4(0)=\frac{23}{2}\right\}$$

1.Dgl.:

$\text{laplace}(y_1-y_1'=e^{-x}-2, x, y_1, s)|Lp=Lp1 \Rightarrow G11$

$$y_1(0)-Lp1\cdot s+Lp1=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s}$$

Hinweis: Bildfunktionen werden stets mit Lp=Lp(s) bezeichnet.

Deshalb stückweise Transformation der $y_1(x)$ bis $y_4(x)$

(einschl. Ableitung)

$\text{laplace}(-y_2'=0, x, y_2, s)|Lp=Lp2 \Rightarrow G12$

$$y_2(0)-Lp2\cdot s=0$$

$\text{laplace}(-y_3+y_3'=0, x, y_3, s)\,|\,Lp=Lp3 \Rightarrow G13$

$$-y_3(0)+Lp3\cdot s-Lp3=0$$

$\text{laplace}(y_4-y_4'=0, x, y_4, s)\,|\,Lp=Lp4 \Rightarrow G14$

$$y_4(0)-Lp4\cdot s+Lp4=0$$

$G11+G12+G13+G14\,|\,AB \Rightarrow G1$

$$-Lp1\cdot s-Lp2\cdot s+Lp3\cdot s-Lp4\cdot s+Lp1-Lp3+Lp4-\frac{21}{2}=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s}$$

2. Dgl.:

$\text{laplace}(-y_1'+2\cdot y_1=0, x, y_1, s)\,|\,Lp=Lp1 \Rightarrow G21$

$$y_1(0)-Lp1\cdot s+2\cdot Lp1=0$$

$\text{laplace}(-2\cdot y_2'+4\cdot y_2=0, x, y_2, s)\,|\,Lp=Lp2 \Rightarrow G22$

$$2\cdot(y_2(0)-Lp2\cdot s)+4\cdot Lp2=0$$

$\text{laplace}(-y_3'+2\cdot y_3=0, x, y_3, s)\,|\,Lp=Lp3 \Rightarrow G23$

$$y_3(0)-Lp3\cdot s+2\cdot Lp3=0$$

$G21+G22+G23\,|\,AB \Rightarrow G2$

$$-2\cdot(Lp2\cdot s+13)-Lp1\cdot s-Lp3\cdot s+2\cdot Lp1+4\cdot Lp2+2\cdot Lp3+26=0$$

3. Dgl.: $2y_1-y_1'+y_2+y_3'=1$

$\text{laplace}(2y_1-y_1'=0, x, y_1, s)\,|\,Lp=Lp1 \Rightarrow G31$

$$y_1(0)-Lp1\cdot s+2\cdot Lp1=0$$

$\text{laplace}(y_2=0, x, y_2, s)\,|\,Lp=Lp2 \Rightarrow G32$

$$Lp2=0$$

$\text{laplace}(y_3'=1, x, y_3, s)\,|\,Lp=Lp3 \Rightarrow G33$

$$-y_3(0)+Lp3\cdot s=\frac{1}{s}$$

$G31+G32+G33\,|\,AB \Rightarrow G3$

$$-Lp1\cdot s+Lp3\cdot s+2\cdot Lp1+Lp2-9=\frac{1}{s}$$

4. Dgl.: $-y_1+2y_2+y_2'+y_3+2y_3'+2y_4-2y_4'=0$

$\text{laplace}(-y_1=0, x, y_1, s)\,|\,Lp=Lp1 \Rightarrow G41$

$-Lp1=0$

laplace$(2y_2+y_2'=0, x, y_2, s) | Lp=Lp2 \Rightarrow G42$

$-y_2(0)+Lp2\cdot s+2\cdot Lp2=0$

laplace$(y_3+2y_3'=0, x, y_3, s) | Lp=Lp3 \Rightarrow G43$

$-2\cdot(y_3(0)-Lp3\cdot s)+Lp3=0$

laplace$(2y_4-2y_4'=0, x, y_4, s) | Lp=Lp4 \Rightarrow G44$

$2\cdot(y_4(0)-Lp4\cdot s)+2\cdot Lp4=0$

$G41+G42+G43+G44 | AB \Rightarrow G4$

$$2\cdot\left(Lp3\cdot s-\frac{35}{2}\right)-2\cdot\left(Lp4\cdot s-\frac{23}{2}\right)+Lp2\cdot s-Lp1+2\cdot Lp2+Lp3+2\cdot Lp4+13$$

Lösung des inhom. LGS:

$$\begin{cases} G1 \\ G2 \\ G3 \\ G4 \end{cases}\Bigg|_{Lp1, Lp2, Lp3, Lp4}$$

$$\left\{Lp1=\frac{17\cdot s^3+24\cdot s^2+9\cdot s+8}{(s^2+1)\cdot(2\cdot s^2+2\cdot s)}, Lp2=\frac{-(13\cdot s^3+15\cdot s^2+5\cdot s+7)}{(s^2+s)\cdot(s^2+1)}, Lp3=\frac{3}{}\right.$$

Zwischenergebnis:

$$Lp1=\frac{17\cdot s^3+24\cdot s^2+9\cdot s+8}{(s^2+1)\cdot(2\cdot s^2+2\cdot s)},\quad Lp2=\frac{-(13\cdot s^3+15\cdot s^2+5\cdot s+7)}{(s^2+s)\cdot(s^2+1)},$$

$$Lp3=\frac{35\cdot s^3+36\cdot s^2+11\cdot s+20}{(s^2+1)\cdot(2\cdot s^2+2\cdot s)},\quad Lp4=\frac{23\cdot s^4+5\cdot s^3-17\cdot s^2+5\cdot s-8}{2\cdot s^5-2\cdot s}$$

Rücktransformation:

$$y_1(x)=\text{invLaplace}\left(\frac{17\cdot s^3+24\cdot s^2+9\cdot s+8}{(s^2+1)\cdot(2\cdot s^2+2\cdot s)}, s, x\right)$$

$$y_1(x)=\frac{-3\cdot e^{-x}}{2}+6\cdot\cos(x)+2\cdot\sin(x)+4$$

$$y_2(x)=\text{invLaplace}\left(\frac{-(13\cdot s^3+15\cdot s^2+5\cdot s+7)}{(s^2+s)\cdot(s^2+1)},s,x\right)$$

$$y_2(x)=2\cdot e^{-x}-8\cdot\cos(x)-7$$

$$y_3(x)=\text{invLaplace}\left(\frac{35\cdot s^3+36\cdot s^2+11\cdot s+20}{(s^2+1)\cdot(2\cdot s^2+2\cdot s)},s,x\right)$$

$$y_3(x)=\frac{-5\cdot e^{-x}}{2}+10\cdot\cos(x)-2\cdot\sin(x)+10$$

$$y_4(x)=\text{invLaplace}\left(\frac{23\cdot s^4+5\cdot s^3-17\cdot s^2+5\cdot s-8}{2\cdot s^5-2\cdot s},s,x\right)$$

$$y_4(x)=\frac{-(\cosh(x)-5\cdot\sinh(x)-16\cdot\cos(x)-8)}{2}$$

$$y_4(x)=\text{trigToExp}\left(\frac{-(\cosh(x)-5\cdot\sinh(x))}{2}\right)-\frac{(-16\cdot\cos(x)-8)}{2}$$

$$y_4(x)=\frac{-\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{5\cdot(e^x-e^{-x})}{2}\right)}{2}+\frac{16\cdot\cos(x)+8}{2}$$

simplify(ans)

$$y_4(x)=e^x-\frac{3\cdot e^{-x}}{2}+8\cdot\cos(x)+4$$

Anmerkung 1

============

Dgl-System (Ordnung N=4) in Matrixform

A_1*Y'+Ao*Y=r mit **A_1**=A1

$$A1:=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Ao := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} e^{-x}-2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Lösung in Vektorform:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x} + \begin{bmatrix} -3/2 \\ 2 \\ -5/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} e^{-x} + \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} \cos(x) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(x) + \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Anmerkung 2
===========

FS=$\{e^{x}, e^{2x}, \cos(x), \sin(x)\}$, was bei obigem Lösungsweg nicht erkennbar ist.

denn Ansatz $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = e^{\lambda * x} * \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ liefert in Dgl. das hom. LGS

$(A1*\lambda+Ao)*e^{\lambda * x}*\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit singulärer Matrix (für

nichttriv. Lösungen $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$):

det(A1*λ+Ao)=0

$$2\cdot\lambda^4-6\cdot\lambda^3+6\cdot\lambda^2-6\cdot\lambda+4=0$$

(charakt. Gleichung)

solve(ans, λ)

$$\{\lambda=1, \lambda=2, \lambda=-j, \lambda=j\}$$

In der Lösung des AWP tritt der e^{2x}-Anteil jedoch nicht mehr auf.

Weiterhin gilt:

$$Yp(x)=\begin{bmatrix} -3/2 \\ 2 \\ -5/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} e^{-x} + \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Anmerkung 3

===========

Nutzung des L-Operators anstatt der Korrespondenztabelle

z.B.: L-Transformation der Störfunktion

$\mathcal{L}_x\left(e^{-x}-2\right)[s]$

$$\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s}$$

Rücktransformation von Lp1:

$y_1(x)=\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{17\cdot s^3+24\cdot s^2+9\cdot s+8}{(s^2+1)\cdot(2\cdot s^2+2\cdot s)}\right)[x]$

$$y_1(x)=\frac{-3\cdot e^{-x}}{2}+6\cdot\cos(x)+2\cdot\sin(x)+4$$

PBZ von Lp1:

$\text{expand}\left(\frac{17\cdot s^3+24\cdot s^2+9\cdot s+8}{(s^2+1)\cdot(2\cdot s^2+2\cdot s)},s\right)$

$$\frac{2\cdot(3\cdot s+1)}{s^2+1}-\frac{3}{2\cdot(s+1)}+\frac{4}{s}$$

in Einzelanteilen:

$\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{4}{s}\right)[x]=4*\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)[x]$

$$4=4$$

$\mathcal{L}_s^{-1}\left(-\frac{3}{2\cdot(s+1)}\right)[x]=-\frac{3}{2}*\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)}\right)[x]$

$$\frac{-3\cdot e^{-x}}{2}=\frac{-3\cdot e^{-x}}{2}$$

$\frac{2\cdot(3\cdot s+1)}{s^2+1}=6*\frac{s}{s^2+1}+2*\frac{1}{s^2+1}$

$$\frac{2\cdot(3\cdot s+1)}{s^2+1}=\frac{6\cdot s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}$$

$\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)[x]$

$$\cos(x)$$

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)[x]$$

$$\sin(x)$$

usw.