Prof. Dr. L. Paditz 04.11.2015

inhomogene linare Dgl. mit konst. Koeffizienten
===

Aufg. E1.21c) (AWP)

$y'''-y''+4y'-4y=x^2+x*\sin(x)$

AB: $y(0)=\frac{1}{18}$, $y'(0)=-\frac{1}{3}$, $y''(0)=-\frac{7}{9}$

charakt. Gl. $\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$ ergibt

solve($\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0,\lambda$)

$\{\lambda=1,\lambda=-2\cdot j,\lambda=2\cdot j\}$

hieraus

FS=$\{e^x,\cos(2x),\sin(2x)\}$

Kontrolle:

dSolve(y'''-y''+4y'-4y=0,x,y)

$\{y=e^x\cdot\text{const}(1)+\cos(2\cdot x)\cdot\text{const}(2)+\sin(2\cdot x)\cdot\text{const}(3)\}$

$y\_hom(x)=C1\cdot e^x+C2\cdot\cos(2\cdot x)+C3\cdot\sin(2\cdot x)$

Zielgerichteter Ansatz (kein Resonanzfall, da $\lambda=0$, $\lambda=\pm j$ zu f(x) gehören):

$y\_pinhom(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c+(d\cdot x+e)\cos(x)+(f\cdot x+g)\sin(x)$

VdK:

$$\begin{bmatrix} e^{x} & \cos(2\cdot x) & \sin(2\cdot x) \\ e^{x} & -2\sin(2\cdot x) & 2\cos(2\cdot x) \\ e^{x} & -4\cos(2\cdot x) & -4\sin(2\cdot x) \end{bmatrix} \Rightarrow A==$$

$$\begin{bmatrix} e^{x} & \cos(2\cdot x) & \sin(2\cdot x) \\ e^{x} & -2\cdot\sin(2\cdot x) & 2\cdot\cos(2\cdot x) \\ e^{x} & -4\cdot\cos(2\cdot x) & -4\cdot\sin(2\cdot x) \end{bmatrix}$$

A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{8\cdot(\cos(2\cdot x))^{2}+8\cdot(\sin(2\cdot x))^{2}}{10\cdot(\cos(2\cdot x))^{2}\cdot e^{x}+10\cdot(\sin(2\cdot x))^{2}\cdot e^{x}} & 0 \\ \frac{2\cdot\cos(2\cdot x)\cdot e^{x}+4\cdot\sin(2\cdot x)\cdot e^{x}}{10\cdot(\cos(2\cdot x))^{2}\cdot e^{x}+10\cdot(\sin(2\cdot x))^{2}\cdot e^{x}} & \frac{-5\cdot\sin(2}{10\cdot(\cos(2\cdot x))^{2}\cdot e^{x}+} \\ \frac{-\left(4\cdot\cos(2\cdot x)\cdot e^{x}-2\cdot\sin(2\cdot x)\cdot e^{x}\right)}{10\cdot(\cos(2\cdot x))^{2}\cdot e^{x}+10\cdot(\sin(2\cdot x))^{2}\cdot e^{x}} & \frac{5\cdot\cos(2}{10\cdot(\cos(2\cdot x))^{2}\cdot e^{x}+} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{4\cdot e^{-x}}{5} & 0 & \frac{e^{-x}}{5} \\ \frac{\cos(2\cdot x)+2\cdot\sin(2\cdot x)}{5} & -\cos(x)\cdot\sin(x) & \frac{-(2\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(2\cdot}{10} \\ \frac{-(2\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(2\cdot x))}{5} & \frac{\cos(2\cdot x)}{2} & \frac{-(\cos(2\cdot x)+2\cdot\sin(2\cdot}{10} \end{bmatrix}$$

$$\text{ans}* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^{2}+x*\sin(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\left(x^{2}+x\cdot\sin(x)\right)\cdot e^{-x}}{5} \\ \frac{-\left(x^{2}+x\cdot\sin(x)\right)\cdot(2\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(2\cdot x))}{10} \\ \frac{-\left(x^{2}+x\cdot\sin(x)\right)\cdot(\cos(2\cdot x)+2\cdot\sin(2\cdot x))}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \int_{□}^{□} \frac{(x^2+x\cdot\sin(x))\cdot e^{-x}}{5}dx \\ \int_{□}^{□} \frac{-(x^2+x\cdot\sin(x))\cdot(2\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(2\cdot x))}{10}dx \\ \int_{□}^{□} \frac{-(x^2+x\cdot\sin(x))\cdot(\cos(2\cdot x)+2\cdot\sin(2\cdot x))}{10}dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-(2\cdot x^2+x\cdot\cos(x)+x\cdot\sin(x)+\cos(x)+4\cdot x+4)\cdot e^{-x}}{10} \\ \frac{-(18\cdot x^2\cdot\cos(2\cdot x)+36\cdot x^2\cdot\sin(2\cdot x)+36\cdot x\cdot\cos(x)-18\cdot x\cdot\sin(x)-}{} \\ \frac{36\cdot x^2\cdot\cos(2\cdot x)-18\cdot x^2\cdot\sin(2\cdot x)-18\cdot x\cdot\cos(x)-36\cdot x\cdot\sin(x)+6\cdot x}{} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{-(2\cdot x^2+x\cdot\cos(x)+x\cdot\sin(x)+\cos(x)+4\cdot x+4)\cdot e^{-x}}{10} \\ \frac{-(18\cdot x^2\cdot\cos(2\cdot x)+(36\cdot x^2-18\cdot x-18)\cdot\sin(2\cdot x)+36\cdot x\cdot\cos(x)-1}{} \\ \frac{36\cdot x^2\cdot\cos(2\cdot x)-(18\cdot x^2+36\cdot x-9)\cdot\sin(2\cdot x)-18\cdot x\cdot\cos(x)-36\cdot x\cdot}{} \end{bmatrix}$$

Spezielle Lösung:

$$\text{trn(ans)}*\begin{bmatrix} e^{x} \\ \cos(2\cdot x) \\ \sin(2\cdot x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-\cos(2\cdot x)\cdot(18\cdot x^2\cdot\cos(2\cdot x)+(36\cdot x^2-18\cdot x-18)\cdot\sin(2\cdot x)+36\cdot x\cdot}{} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{-(18\cdot x^2+12\cdot x\cdot\cos(x)+\sin(x)\cdot(12\cdot x+8)+4\cdot\cos(x)+36\cdot x+27)}{72} \end{bmatrix}$$

expand(ans)

$$\left[\frac{-x^2}{4}-\frac{x\cdot\cos(x)}{6}-\frac{x\cdot\sin(x)}{6}-\frac{\cos(x)}{18}-\frac{\sin(x)}{9}-\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right]$$

Damit lautet y_p,inhom:

$$y\_p(x)=\frac{-x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{3}{8}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{9}\right)\sin(x)-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{18}\right)\cos(x)$$

==

Zusatz: Variante mit FS=$\{e^x,\cos(x),\sin(x)\}$,

d.h. zugehörige Dgl. wäre dann

$y'''-y''+y'-y=x^2+x*\sin(x)$

solve$(\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0,\lambda)$

$$\{\lambda=1,\lambda=-j,\lambda=j\}$$

Damit liegt mit der Störfunktion ein Resonanzfall vor!

Der zielgerichtete Ansatz für y_p,inhom muss mit q=1, d.h. mit x als Vorfaktor erweitert werden!

Zielgerichteter Ansatz (Resonanzfall, da $\lambda=\pm j$ zu f(x) und zur hom. Dgl. gehören, Vielfachheit q=1 in hom. Dgl.):

$y\_pinhom(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c+x\cdot((d\cdot x+e)\cos(x)+(f\cdot x+g)\sin(x))$

VdK:

$$\begin{bmatrix} e^x & \cos(x) & \sin(x) \\ e^x & -\sin(x) & \cos(x) \\ e^x & -\cos(x) & -\sin(x) \end{bmatrix}\Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} e^{x} & \cos(x) & \sin(x) \\ e^{x} & -\sin(x) & \cos(x) \\ e^{x} & -\cos(x) & -\sin(x) \end{bmatrix}$$

A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{(\cos(x))^{2}+(\sin(x))^{2}}{2\cdot(\cos(x))^{2}\cdot e^{x}+2\cdot(\sin(x))^{2}\cdot e^{x}} & 0 \\ \frac{\cos(x)\cdot e^{x}+\sin(x)\cdot e^{x}}{2\cdot(\cos(x))^{2}\cdot e^{x}+2\cdot(\sin(x))^{2}\cdot e^{x}} & \frac{-2\cdot\sin(x)\cdot e^{x}}{2\cdot(\cos(x))^{2}\cdot e^{x}+2\cdot(\sin(x)} \\ \frac{-\left(\cos(x)\cdot e^{x}-\sin(x)\cdot e^{x}\right)}{2\cdot(\cos(x))^{2}\cdot e^{x}+2\cdot(\sin(x))^{2}\cdot e^{x}} & \frac{2\cdot\cos(x)\cdot e^{x}}{2\cdot(\cos(x))^{2}\cdot e^{x}+2\cdot(\sin(x)} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{e^{-x}}{2} & 0 & \frac{e^{-x}}{2} \\ \frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} & -\sin(x) & \frac{-(\cos(x)-\sin(x))}{2} \\ \frac{-(\cos(x)-\sin(x))}{2} & \cos(x) & \frac{-(\cos(x)+\sin(x))}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{ans}*\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^{2}+x*\sin(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\left(x^{2}+x\cdot\sin(x)\right)\cdot e^{-x}}{2} \\ \frac{-\left(x^{2}+x\cdot\sin(x)\right)\cdot(\cos(x)-\sin(x))}{2} \\ \frac{-\left(x^{2}+x\cdot\sin(x)\right)\cdot(\cos(x)+\sin(x))}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\square}^{\square} \frac{(x^2+x\cdot\sin(x))\cdot e^{-x}}{2}dx \\ \int_{\square}^{\square} \frac{-(x^2+x\cdot\sin(x))\cdot(\cos(x)-\sin(x))}{2}dx \\ \int_{\square}^{\square} \frac{-(x^2+x\cdot\sin(x))\cdot(\cos(x)+\sin(x))}{2}dx \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{-(2\cdot x^2+x\cdot\cos(x)+x\cdot\sin(x)+\cos(x)+4\cdot x+4)\cdot e^{-x}}{4} \\ \frac{-(8\cdot x^2\cdot\cos(x)+8\cdot x^2\cdot\sin(x)-2\cdot x^2+16\cdot x\cdot\cos(x)-16\cdot x\cdot\sin(x)-2}{} \\ \frac{8\cdot x^2\cdot\cos(x)-8\cdot x^2\cdot\sin(x)-2\cdot x^2-16\cdot x\cdot\cos(x)-16\cdot x\cdot\sin(x)+2\cdot x}{} \end{array}\right.$$

simplify(ans)

$$\left[\begin{array}{l} \frac{-(2\cdot x^2+x\cdot\cos(x)+x\cdot\sin(x)+\cos(x)+4\cdot x+4)\cdot e^{-x}}{4} \\ \frac{-(8\cdot x^2\cdot\cos(x)+8\cdot x^2\cdot\sin(x)-2\cdot x^2+16\cdot x\cdot\cos(x)-16\cdot x\cdot\sin(x)+(}{} \\ \frac{8\cdot x^2\cdot\cos(x)-8\cdot x^2\cdot\sin(x)-2\cdot x^2-16\cdot x\cdot\cos(x)-16\cdot x\cdot\sin(x)+(2\cdot}{16} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{trn}(ans)*\begin{bmatrix} e^x \\ \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\sin(x)\cdot(8\cdot x^2\cdot\cos(x)-8\cdot x^2\cdot\sin(x)-2\cdot x^2-16\cdot x\cdot\cos(x)-16\cdot x\cdot\sin}{}\right.$$

expand(ans)

$$\left[\frac{-x^2\cdot(\cos(x))^2}{2}-\frac{x^2\cdot(\sin(x))^2}{2}-x\cdot(\cos(x))^2-x\cdot(\sin(x))^2+\frac{x}{}\right.$$

Summanden in y_p vor der

Zusammenfassung/Vereinfachung:

$$\frac{-x^2\cdot(\cos(x))^2}{2}-\frac{x^2\cdot(\sin(x))^2}{2}-x\cdot(\cos(x))^2-x\cdot(\sin(x))^2+$$

$$\frac{x^2\cdot\cos(x)}{8}-\frac{x^2\cdot\sin(x)}{8}+\frac{x\cdot\cos(x)\cdot\cos(2\cdot x)}{8}-\frac{x\cdot\cos(x)\cdot\sin(2\cdot x)}{8}+$$

$$\frac{x\cdot\sin(x)\cdot\cos(2\cdot x)}{8}+\frac{x\cdot\sin(x)\cdot\sin(2\cdot x)}{8}+(\cos(x))^2+(\sin(x))^2$$

$$-\frac{x^2}{2}-\frac{x\cdot\cos(x)}{4}-\frac{\cos(x)\cdot\cos(2\cdot x)}{16}-\frac{\cos(x)\cdot\sin(2\cdot x)}{16}-\frac{x\cdot\sin(x)}{4}+$$

$$\frac{\sin(x)\cdot\cos(2\cdot x)}{16}-\frac{\sin(x)\cdot\sin(2\cdot x)}{16}-\frac{\cos(x)}{4}-x-1$$

simplify(ans)

$$\left[\frac{2\cdot x^2\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\left(2\cdot x^2+6\cdot x+1\right)-16\cdot x^2-2\cdot x\cdot\cos(x)-5\cdot\cos(x}{16}\right.$$

expand(ans[1,1])

$$\frac{x^2\cdot\cos(x)}{8}-\frac{x^2\cdot\sin(x)}{8}-x^2-\frac{x\cdot\cos(x)}{8}-\frac{3\cdot x\cdot\sin(x)}{8}-\frac{5\cdot\cos(x)}{16}-\text{si}$$

Die partikuläre Lösung lautet jetzt:

$$y\_p,inhom(x)=-x^2-2\cdot x-\left(\frac{x^2}{8}+\frac{3\cdot x}{8}\right)\sin(x)+\left(\frac{x^2}{8}-\frac{x}{8}\right)\cos(x)$$

Hierbei sind die Anteile $-\frac{5\cdot\cos(x)}{16}-\frac{\sin(x)}{16}$ weggefallen

(Lösungsanteile nur für die hom. Dgl.)

Probe:

Define $yp(x)=-x^2-2\cdot x-\left(\frac{x^2}{8}+\frac{3\cdot x}{8}\right)\sin(x)+\left(\frac{x^2}{8}-\frac{x}{8}\right)\cos(x)$

done

$$\frac{d^3}{dx^3}(yp(x)) - \frac{d^2}{dx^2}(yp(x)) + \frac{d}{dx}(yp(x)) - yp(x)$$

$$\frac{-(x^2 \cdot \cos(x) + x^2 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x) + \cos(x) + 3 \cdot \sin(x) + 1}{8}$$

simplify(ans)

$$x \cdot (\sin(x) + x)$$

usw.