

# Fourier-, Laplace- und Z-Transformation

## Zeichen und Begriffe

# DIN 5487

Fourier-, Laplace- und Z-Transformation; symbols and concepts

Ersatz für Ausgabe 11.67

In dieser Norm sind Zeichen und Begriffe für die Anwendung der Fourier-, Laplace- und Z-Transformation bei mathematischen naturwissenschaftlich-technischen Problemen angegeben. Die angegebenen Zeichen für Original- und Bildfunktionen und die Variablen dieser Funktionen sind nur Beispiele und durch diese Norm nicht festgelegt. Die Formelzeichen für die Anwendung in Naturwissenschaft und Technik sind nach Möglichkeit jeweils entsprechend der physikalischen Bedeutung (unter Berücksichtigung der entsprechenden Normen) zu wählen; siehe z. B. DIN 1304 Teil 1 (z. Z. Entwurf), DIN 1344, DIN 5483 Teil 1 und Teil 2. Über die Kennzeichnung der komplexen Größen siehe DIN 5483 Teil 3. Die in dieser Norm auftretenden Integrale und angegebenen Formeln werden ohne Angabe hinreichender Existenz- und Gültigkeitsvoraussetzungen notiert. Die imaginäre Einheit wird in dieser Norm mit  $j$  bezeichnet (siehe DIN 1302).

| Nr  | Zeichen   | Bedeutung   | Erklärung und Bemerkungen  |
|---|---|---|--|
| <b>1 Funktionen bei der Fourier- und Laplace-Transformation</b> |   |   |  |
| <b>1.1</b>  | z. B. $f$ oder entsprechend der physikalischen Bedeutung z. B. $u$ usw.   | Originalfunktion bei der Fourier- und Laplace-Transformation  | reelle Funktion einer reellen Variablen<br>Der Fall einer reellen Funktion steht im Vordergrund, doch sind auch komplexwertige Funktionen zulässig, da deren Real- und Imaginärteil ja reelle Funktionen sind.   |
| <b>1.2</b>  | z. B. $F$ oder entsprechend der physikalischen Bedeutung z. B. $U$ usw.<br><br>Ausweichzeichen, z. B. $\tilde{f}$ oder entsprechend der physikalischen Bedeutung z. B. $\tilde{u}$ usw. | Bildfunktion bei der Fourier- und Laplace-Transformation, Fourier- und Laplace-Transformierte von z. B. $f$ oder von z. B. $u$ usw. | komplexe Funktion<br>Die angeführte Kennzeichnung besteht in der Verwendung eines Kleinbuchstabens für die Originalfunktion, z. B. $f$ , und des entsprechenden Großbuchstabens für die Bildfunktion, z. B. $F$ .<br>Diese Kennzeichnung kann nur angewendet werden, wenn hiergegen hinsichtlich der physikalischen Bedeutung keine Bedenken bestehen. Es sind auch noch andere Kennzeichnungen der Bildfunktion möglich; siehe die angegebenen Ausweichzeichen.<br>lies z. B. „ $f$ -Häkchen“ oder „ $f$ -Hatschek“ |

Fortsetzung Seite 2 bis 6

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

Jede Art der Vervielfältigung, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, gestattet.

| Nr   | Zeichen   | Bedeutung  | Erklärung und Bemerkungen   |
|--|---|--|---|
| <b>2 Variablen</b>   |   |  |   |
| <b>2.1 Variablen der Original- und der Bildfunktion bei der Fourier-Transformation</b> |   |  |   |
| 2.1.1  | z. B. $x$<br>oder entsprechend<br>der physikalischen<br>Bedeutung<br>z. B. $t$ (Zeit) usw.  | Variable der Original-<br>funktion bei der<br>Fourier-Transformation | reell   |
| 2.1.2  | z. B. $y$<br>oder entsprechend<br>der physikalischen<br>Bedeutung z. B. $\beta$<br>(Phasenkoeffizient<br>oder Kreisrepetenz),<br>$\omega$ (Kreisfrequenz<br>oder Pulsanz) usw.  | Variable der Bild-<br>funktion bei der<br>Fourier-Transformation     | reell   |
| <b>2.2 Variablen der Original- und der Bildfunktion bei der Laplace-Transformation</b> |   |  |   |
| 2.2.1  | z. B. $t$<br>oder entsprechend<br>der physikalischen<br>Bedeutung z. B. $x$<br>(Weg) usw.   | Variable der Original-<br>funktion bei der<br>Laplace-Transformation | reell   |
| 2.2.2  | z. B. $s = \sigma + j\omega$<br>oder entsprechend<br>der physikalischen<br>Bedeutung z. B.<br>$p = \sigma + j\omega$<br>(komplexer Ankling-<br>koeffizient,<br>siehe DIN 5483 Teil 1),<br>$y = \alpha + j\beta$<br>(komplexer Ausbrei-<br>tungskoeffizient,<br>siehe DIN 1344) usw. | Variable der Bild-<br>funktion bei der<br>Laplace-Transformation     | komplex   |
| <b>3 Transformationen</b>  |   |  |   |
| <b>3.1 Fourier-Transformation</b>  |   |  |   |
| 3.1.1  | $\mathfrak{F}$  | Fourier-Transformation   |   |
| 3.1.2  | z. B. $F = \mathfrak{F}f$<br>oder entsprechend<br>der physikalischen<br>Bedeutung z. B.<br>$\check{u} = \mathfrak{F}u$ usw.   | Fourier-Transformierte<br>der Funktion $f$                           | $F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jyx} f(x) dx$ $\check{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} u(t) dt$  |
| 3.1.3  | z. B. $f = \mathfrak{F}^{-1}F$<br>oder entsprechend<br>der physikalischen<br>Bedeutung z. B.<br>$u = \mathfrak{F}^{-1}\check{u}$ usw.   | Originalfunktion der<br>Fourier-Trans-<br>formierten $F$             | $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} F(y) dy$ $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\omega} \check{u}(\omega) d\omega$  |
| 3.1.4  | $f * g$   | Faltung(sprodukt)<br>der Funktionen $f, g$                           | $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}$ <p>Das rechts stehende Integral heißt (zweiseitiges) Fal-<br/>tungsintegral. Der Faltungssatz liefert:</p> $\mathfrak{F}(f * g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)$ |

| Nr                                | Zeichen  | Bedeutung  | Erklärung und Bemerkungen   |
|-----------------------------------|--|--|---|
| <b>3.2 Laplace-Transformation</b> |  |  |   |
| 3.2.1                             | $\mathfrak{L}$ oder $L$  | Laplace-Transformation                           | $\mathfrak{L}$ wird auch einseitige Laplace-Transformation genannt. Zur zweiseitigen Laplace-Transformation siehe Anmerkungen.  |
| 3.2.2                             | z. B. $F = \mathfrak{L}f$<br>oder $F = Lf$<br>oder entsprechend der physikalischen Bedeutung z. B. $\ddot{u} = \mathfrak{L} u$ usw.                  | Laplace-Transformierte der Funktion $f$          | $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ $\ddot{u}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt$  |
| 3.2.3                             | z. B. $f = \mathfrak{L}^{-1} F$<br>oder $f = L^{-1} F$<br>oder entsprechend der physikalischen Bedeutung z. B. $u = \mathfrak{L}^{-1} \ddot{u}$ usw. | Originalfunktion der Laplace-Transformierten $F$ | $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} e^{ts} F(s) ds$ $u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{tp} \ddot{u}(p) dp$  |
| 3.2.4                             | $f * g$  | Faltung(sprodukt) der Funktionen $f, g$          | $(f * g)(x) = \int_0^x f(\xi) g(x - \xi) d\xi, \quad x > 0$ <p>Das rechts stehende Integral heißt (einseitiges) Faltung(sintegral). Der Faltungssatz liefert:</p> $\mathfrak{L}(f * g) = (\mathfrak{L}f)(\mathfrak{L}g)$  |
| <b>3.3 Z-Transformation</b>       |  |  |   |
| 3.3.1                             | $\mathfrak{Z}$ oder $Z$  | Z-Transformation                                 |   |
| 3.3.2                             | z. B. $F = \mathfrak{Z}(f_n)$<br>oder $F = Z(f_n)$   | Z-Transformierte der Zahlenfolge $(f_n)$         | $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ <p>siehe Anmerkungen</p>  |
| 3.3.3                             | $(f_n) = \mathfrak{Z}^{-1} F$<br>oder $(f_n) = Z^{-1} F$   | Originalfolge der Z-Transformierten $F$          | $f_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{dz^n} F\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{ z =R} z^{n-1} F(z) dz$ $= \sum \text{Res}(z^{n-1} F(z)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$ <p>wobei <math>R</math> so groß sei, daß alle singulären Punkte von <math>F</math> in <math> z  &lt; R</math> liegen</p>                        |
| 3.3.4                             | $(f_n) * (g_n)$  | Faltung(sprodukt) der Folgen $(f_n), (g_n)$      | $(f_n) * (g_n) = \left( \sum_{\nu=0}^n f_{\nu} g_{n-\nu} \right)$ <p>Die Glieder dieser Folge sind die Koeffizienten der Cauchyschen Multiplikation der Reihen:</p> $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n}$ <p>Der Faltungssatz liefert:</p> $\mathfrak{Z}(f_n) * (g_n) = (\mathfrak{Z}(f_n)) (\mathfrak{Z}(g_n))$ |
| <b>4 Korrespondenzzeichen</b>     |  |  |   |
| 4.1                               | $\bullet \text{---} \circ$   | Korrespondenzzeichen:<br>... Bild von ...        | $F \bullet \text{---} \circ f$ bedeutet bei der Fourier-Transformation $F = \mathfrak{F}f$ ,<br>entsprechend bei der Laplace-Transformation $F = \mathfrak{L}f$   |
| 4.2                               | $\circ \text{---} \bullet$   | Korrespondenzzeichen:<br>... Original von ...    | $f \circ \text{---} \bullet F$ bedeutet bei der Fourier-Transformation $f = \mathfrak{F}^{-1} F$ ,<br>entsprechend bei der Laplace-Transformation $f = \mathfrak{L}^{-1} F$   |

| Nr   | Zeichen        | Bedeutung   | Erklärung und Bemerkungen   |
|--|----------------|---|---|
| <b>5 Sprung, Stoß, Wechselstoß; <math>\delta</math>-Distribution</b> |                |   |   |
| 5.1  | $\varepsilon$  | Einheits-Sprungfunktion, Heaviside-Funktion                       | $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ $\varepsilon(0)$ kann undefiniert bleiben, oder z. B. $\varepsilon(0) = \frac{1}{2}$ oder z. B. $\varepsilon(0) = 0$  |
| 5.2  | $\delta$       | $\delta$ -Distribution, Dirac-Distribution, idealer Einheitsstoß  | Die Anwendung der Distribution $\delta$ auf eine Grundfunktion (Testfunktion) $\varphi$ schreibt man oft $(\delta, \varphi)$ , und es ist definiert: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ .<br>Obwohl $\delta$ keine reguläre Distribution ist, findet man in der Literatur manchmal: $(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \varphi(\tau) d\tau, \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t).$ Jedoch gilt $\varepsilon' = \delta$ , wobei $\varepsilon'$ eine Ableitung von $\varepsilon$ im Distributionensinn ist.<br>Es werden ferner Distributionen $\delta(t-t_0)$ und $\delta(\lambda t)$ für $\lambda > 0$ definiert durch: $(\delta(t-t_0), \varphi) = \varphi(t_0), (\delta(\lambda t), \varphi) = \frac{1}{\lambda} \varphi(0)$ |
| 5.3  | $\delta'$      | Ableitung der $\delta$ -Distribution, idealer Einheitswechselstoß | Die Anwendung der Distribution $\delta'$ auf eine Grundfunktion (Testfunktion) $\varphi$ ist: $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$   |
| 5.4  | $\mathcal{L}f$ | Laplace-Transformierte der Distribution $f$                       | $(\mathcal{L}f)(s) = (f, \varphi)$ ist die Anwendung der Distribution $f$ auf die Grundfunktion (Testfunktion) $\varphi$ mit $\varphi(t) = e^{-st}$ für $t > 0$ und $s$ fixiert.<br>Dabei sei $f$ derart, daß $(f, \varphi)$ nicht von $\varphi(t)$ für $t < 0$ abhängt. Danach ist z. B.: $\mathcal{L} \delta = 1$ $\mathcal{L} \delta(t-t_0) = e^{-t_0 s}, \quad t_0 > 0$ $\mathcal{L} \delta^{(n)} = s^n,$ wobei $\delta^{(n)}$ die $n$ -te Ableitung von $\delta$ ist.  |

**Anmerkungen**

**Zu Nr 3**

Da das Argument einer Abbildung oft in runden Klammern gesetzt wird, kann entsprechend geschrieben werden:

$$F = \mathfrak{F}(f), \quad f = \mathfrak{F}^{-1}(F);$$

$$F = \mathcal{L}(f), \quad f = \mathcal{L}^{-1}(F);$$

$$F = \mathfrak{Z}((f_n)), \quad (f_n) = \mathfrak{Z}^{-1}(F).$$

Die Fourier- und die Laplace-Transformation werden in der Literatur auch mit geschweiften Klammern geschrieben, z. B.:

$$F(y) = \mathfrak{F}\{f(x)\}; \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

**Zu Nr 3.1 und 3.2**

Für die Theorie der Fourier- und Laplace-Transformation ist das Lebesguesche Integral geeignet. Sonst wird häufig das Riemannsche Integral oder das Stieltjes-Integral zugrunde gelegt.

**Zu Nr 3.1.1 und 3.2.1**

Der Definitionsbereich der Fourier- und Laplace-Transformation heißt Originalraum, und der Wertebereich der Fourier- und Laplace-Transformation heißt Bildraum.

**Zu Nr 3.1.2 und 3.1.3**

Die Fourier-Transformation wird in der Literatur mit unterschiedlichen Normierungsfaktoren eingeführt. Anstelle

der hier empfohlenen Anweisungen der Nr 3.1.2 und 3.1.3

findet man den Faktor  $\frac{1}{2\pi}$  manchmal vor dem Integral in

Nr 3.1.2, er fehlt dann vor dem Integral in Nr 3.1.3. Oder er ist z. B. so aufgeteilt, daß vor jedem der Integrale der Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  steht.

**Zu Nr 3.1.2 und 3.2.2**

Die Fourier- und die Laplace-Transformation können auch mehrdimensional eingeführt werden, z. B.

$$F(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  als Skalarprodukt zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

Wenn  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Fourier-transformierbare Funktion ist, dann ist deren Restriktion auf  $[0, \infty)$  auch Laplace-transformierbar, und wenn außerdem  $f(x) = 0$  für  $x < 0$  ist, dann gilt der Zusammenhang

$$(\mathfrak{F}f)(\mathbf{y}) = (\mathcal{L}f)(j\mathbf{y}).$$

Dabei ist  $s = 0 + jy$ ; d. h.  $s$  wird auf die imaginäre Achse eingeschränkt.

**Zu Nr 3.1.3 und 3.2.3**

Dabei gilt  $(\mathfrak{F}^{-1} F)(x) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  bzw.  $(\mathcal{L}^{-1} F)(t) = f(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null.

**Zu Nr 3.1.4 und 3.2.4**

Wenn  $f(x) = g(x) = 0$  für  $x < 0$ , dann geht die mit der Fourier-Transformation assoziierte (zweiseitige) Faltung in die mit der Laplace-Transformation verbundene (einseitige) Faltung über.

**Zu Nr 3.2.1**

a) Manchmal wird auch die zweiseitige Laplace-Transformation  $\mathcal{L}_{II}$  oder  $L_{II}$  verwendet. Die zweiseitige Laplace-Transformierte  $F = \mathcal{L}_{II} f$  oder  $F = L_{II} f$  erhält man durch

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

b) Falls die in Nr 3.2.2 angegebene Transformation als einseitige Laplace-Transformation besonders gekennzeichnet werden soll, ist  $\mathcal{L}_I$  oder  $L_I$  zu schreiben.

c) Über die Variablensubstitution  $z = e^{-s}$  zeigen sich Beziehungen für diese Transformationen: Wenn man von einer Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  ausgeht und geeignet verallgemeinert, erhält man  $(\mathcal{L}_I f)(s)$ ; geht man von einer Laurentreihe  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  aus, dann erhält man entsprechend  $(\mathcal{L}_{II} f)(s)$ ; nimmt man ferner die Laurentreihe auf einem Kreisrand  $|z| = \text{const.}$  (Fourierreihe), dann ergibt sich analog  $(\mathfrak{F} f)(y)$ .

d) Daher erwartet man z. B. Konvergenz bei  $\mathcal{L}_I$  in einer rechten Halbebene und bei  $\mathcal{L}_{II}$  in einem vertikalen Streifen der  $s$ -Ebene. Der Cauchyschen Multiplikation (man vergleiche die Erklärung und Bemerkungen zu Nr 3.3.4) zweier solcher Potenzreihen entspricht das (einseitige) Faltungsintegral bei  $\mathcal{L}_I$  bzw. zweier solcher Laurentreihen entspricht das (zweiseitige) Faltungsintegral bei  $\mathcal{L}_{II}$  und bei  $\mathfrak{F}$ . Dadurch entstehen auch die Faltungssätze.

e) Die Laplace-Transformation ist von K. W. Wagner 1916 im Anschluß an die Operatorenrechnung von Heaviside in etwas anderer Weise eingeführt worden, nämlich als

$$F(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Diese Variante findet man in der Literatur unter dem Namen Laplace-Carson-Transformation.

**Zu Nr 3.3.2**

a) Daneben kann auch  $F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu} z^{-\nu}$  zu gegebenen  $f_{\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}$  gebildet werden. Im Zusammenhang mit der Z-Transformation wird dies selten eingeführt, und dann wird dieses  $F$  Laurent-Transformierte genannt, weil es eine Laurentreihe ist.

b) Wenn man  $z$  durch  $\frac{1}{z}$  substituiert, ist  $\mathfrak{Z}(f_{\nu})$  eine Potenzreihe um den Ursprung, also die aus der Stochastik und Informationstheorie bekannte erzeugende Funktion der Folge  $(f_{\nu})$ . Siehe auch Anmerkung zu Nr 5.4.

**Zu Nr 4.1 und 4.2**

In der französischen Norm und französischen Literatur wird als Korrespondenzzeichen  $\square$  eingeführt; es bedeutet:

- $\square$ : ... Bild von ... und
- $\sqsupset$ : ... Original von ...

**Zu Nr 5.2**

Die Beschreibung eines Stoßes der integrierten Stärke 1 kann man näherungsweise z. B. durch einen Rechteckimpuls ansetzen:

$$I_h(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & 0 < \tau < h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dafür gilt:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} I_h(\tau) d\tau = 1$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} I_h(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(\sigma) \text{ mit } 0 \leq \sigma \leq h \text{ (}\varphi \text{ stetig) sowie}$$

$$(3) \int_{-\infty}^t I_h(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{h} t, & 0 < t < h \\ 1, & t \geq h \end{cases}$$

Man möchte  $h \rightarrow 0$  durchführen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die so entstandene Funktion werde mit  $\delta$  bezeichnet (zur Unterscheidung von der  $\delta$ -Distribution). Durch eine Vertauschung des Grenzprozesses  $h \rightarrow 0$  mit den Integralen in (1), (2) und (3), die hier aber nicht zulässig ist, würde entstehen

$$(1') \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

$$(2') \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(0)$$

$$(3') \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t), \quad -\infty < t < \infty$$

Die gefundene Funktion  $\delta$  erfüllt keine dieser Gleichungen, und es wurde eine mathematische Begründung der  $\delta$ -Distribution erforderlich.

Wie jede Distribution ist auch die  $\delta$ -Distribution eine Abbildung, deren Definitionsbereich ein gewisser Raum von Grundfunktionen  $\varphi$  ist und deren Werte reelle Zahlen sind, die oft mit  $(\delta, \varphi)$  bezeichnet werden. Diese Abbildung ist linear und hat eine gewisse Stetigkeitseigenschaft.

Reguläre Distributionen  $T$  werden erzeugt von und sind identifizierbar (fast überall) mit einer reellen (lokal integrierbaren) Funktion  $f$ , so daß gilt:

$$(T, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Dagegen ist  $\delta$  eine singuläre Distribution, weil es kein  $f$  gibt, so daß gilt:

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(0)$$

(vergleiche Formel (2'); der Formel (3') entspricht  $\delta = \varepsilon'$ ).

Statt des oben verwendeten Rechteckimpulses  $I_h$  können auch glatte Funktionen angesetzt werden, z. B.

$$\hat{I}_{\nu}(\tau) = \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} e^{-\nu^2 \tau^2}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

**Zu Nr 5.4**

Wegen  $\mathcal{L} \delta(t - t_0) = e^{-t_0 s}$  entwickelt man:

$$\left( \mathcal{L} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n) \right) \right) (s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-ns} = (\mathfrak{Z}(f_n))(e^s)$$

Die Z-Transformierte einer Zahlenfolge  $(f_n)$  ist also bis auf die Variablensubstitution  $z = e^s$  die Laplace-Transformierte der durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n)$$

gebildeten Distribution.

### Zitierte Normen

- DIN 1302 Allgemeine mathematische Zeichen und Begriffe  
DIN 1304 Teil 1 (z. Z. Entwurf) Formelzeichen; Allgemeine Formelzeichen  
DIN 1344 Elektrische Nachrichtentechnik; Formelzeichen  
DIN 5483 Teil 1 Zeitabhängige Größen; Benennungen der Zeitabhängigkeit  
DIN 5483 Teil 2 Zeitabhängige Größen; Formelzeichen  
DIN 5483 Teil 3 Zeitabhängige Größen; Komplexe Darstellung sinusförmig zeitabhängiger Größen

### Weitere Unterlagen

- [1] W. Ameling, Laplace-Transformation. Bertelsmann Universitätsverlag, 1975  
[2] L. Berg, Einführung in die Operatorenrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1965  
[3] H. J. Dirschmid, Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik. Vieweg, 1986  
[4] G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation. Band I–III. Birkhäuser Verlag, 1950, 1955, 1956  
[5] G. Doetsch, Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser Verlag, 1958  
[6] G. Doetsch, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace- und der Z-Transformation. 4. Auflage, Oldenbourg, 1981  
[7] P. Henrici, R. Jeltsch, Komplexe Analysis für Ingenieure. Band II, Birkhäuser, 1980  
[8] J. G. Holbrook, Laplace-Transformation. Vieweg, 1981  
[9] M. J. Lighthill, Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen. Bibl. Institut, 1966  
[10] J. Mikusinski, Operatorenrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957  
[11] F. Stopp, Operatorenrechnung. Verlag Harri Deutsch, 1978  
[12] W. Walter, Einführung in die Theorie der Distributionen. Bibliographisches Institut, 1974  
[13] A. H. Zemanian, Generalized Integral Transformations. Interscience, 1968

### Frühere Ausgaben

DIN 5487: 11.67

### Änderungen

Gegenüber der Ausgabe November 1967 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- a) Z-Transformation eingefügt;
- b) Abschnitt über Sende- und Empfangsfunktion gestrichen;
- c) Vollständig redaktionell durchgesehen, überarbeitet und zum Teil neu gegliedert.

### Internationale Patentklassifikation

G 06 F 15/332