Prof. Dr. Ludwig Paditz, 22.06.2023,

Einführung in die ClassPad-Software

====================================

Folgende inhaltlichen Schwerpunkte sind vorgesehen:

- Integralrechnung und Differenzialrechnung mit CAS
- Funktionen von mehreren reellen Variablen
- Partielle Ableitungen
- Extrema von Funktionen mehrerer Variabler
- Integrale über zwei- bzw. dreidimensionalen Bereichen
- Kurvenintegral (Linienintegral) einer skalaren Funktion
- Oberflächenintegral (Flächenintegral) einer skalaren Fkt.
- Grafik: 2D-Grafik, 3D-Grafik

Die genannten Schwerpunkte werden anhand von Beispielen erläutert, die als elektronische Aktivitäten (eActivities) generiert werden: Textverarbeitung und Rechnen sowie

Hintergrundfenster in einem Dokument.

1. Integralrechnung und Differenzialrechnung mit CAS

1.1 Lösen Sie das folgende Integral mittels Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}dx$$

$$\frac{-32\cdot\ln(|x+2|)}{3}+2\cdot\ln(|x+1|)+\frac{2\cdot\ln(|x-1|)}{3}+4\cdot x$$

alternativ: mit Integationskonstante

$$\mathrm{dSolve}\left(y'=\frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2},x,y\right)$$

$$\left\{y=\frac{-32\cdot\ln(|x+2|)}{3}+2\cdot\ln(|x+1|)+\frac{2\cdot\ln(|x-1|)}{3}+4\cdot x+\mathrm{const}(1)\right\}$$

schrittweise:

Ansatz PBZ per Hand:

$$\mathrm{expand}\left(\frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2},x\right)$$

$$\frac{-32}{3\cdot(x+2)}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{3\cdot(x-1)}+4$$

zuerst die ganzrationale Funktion abspalten:

$$\mathrm{simplify}\left(\frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}-4\right)$$

$$\frac{-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)}{(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$$

$$\frac{-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)}{(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

$$\frac{-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)}{(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

Multiplikation mit Hauptnenner:

$$-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)=\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\right)*((x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1))$$

$$-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)=(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\right)$$

expand(ans, x)⇒Gl1

$$-4\cdot\left(2\cdot x^2-x-2\right)=A\cdot x^2+B\cdot x^2+C\cdot x^2+B\cdot x+3\cdot C\cdot x-A-2\cdot B+2\cdot C$$

Gl1 gilt für jedes x:

$Gl1|x=-3$

$$-76=8\cdot A+4\cdot B+2\cdot C$$

$Gl1|x=0$

$$8=-A-2\cdot B+2\cdot C$$

$Gl1|x=1$

$$4=6\cdot C$$

Gleichungssystem lösen:

$$\left\{\begin{array}{l} Gl1|x=-3 \\ Gl1|x=0 \\ Gl1|x=1 \end{array}\right|_{A,B,C}$$

$$\left\{A=-\frac{32}{3}, B=2, C=\frac{2}{3}\right\}$$

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\,\Big|\,\left\{A=-\frac{32}{3}, B=2, C=\frac{2}{3}\right\}$$

$$\frac{-32}{3\cdot(x+2)}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{3\cdot(x-1)}$$

Integrieren:

$$\begin{bmatrix} \int_{\square}^{\square} \frac{-32}{3\cdot(x+2)} dx \\ \int_{\square}^{\square} \frac{2}{3\cdot(x-1)} dx \\ \int_{\square}^{\square} \frac{2}{x+1} dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-32\cdot\ln(|x+2|)}{3} \\ \frac{2\cdot\ln(|x-1|)}{3} \\ 2\cdot\ln(|x+1|) \end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(\text{ans}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)+c$$

$$\frac{-32\cdot\ln(|x+2|)}{3}+2\cdot\ln(|x+1|)+\frac{2\cdot\ln(|x-1|)}{3}+c$$

stop

1.2 Berechnen Sie die folgenden Werte der Ableitungen:

$y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$, $y'(0)=?$, $y''(0)=?$.

Lösung:

$$\text{Define } y(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

done

$$\frac{d}{dx}(y(x))$$

$$\frac{4\cdot x-4}{(x+1)^3}$$

ans|x=0

$$-4$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))$$

$$\frac{-(8\cdot x-16)}{(x+1)^4}$$

ans|x=0

$$16$$

schrittweise per Hand:

$$y'=2*\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^1*\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$=2*\frac{x-1}{x+1}*\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)$$

$$=2*\frac{x-1}{x+1}*\frac{d}{dx}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$$

$$=2*\frac{x-1}{x+1}*(-2)\frac{d}{dx}\left((x+1)^{-1}\right)$$

$$=2*\frac{x-1}{x+1}*(-2)(-1)(x+1)^{-2}$$

$$=\frac{4\cdot x-4}{(x+1)^3}$$ usw.

2. Funktionen von mehreren reellen Variablen

$y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, speziell $n=2$ oder $n=3$

2.1 (Fall n=2)

Bestimmen Sie für jede der genannten Funktionen den Definitionsbereich und veranschaulichen Sie die jeweilige Punktmenge in der (x,y)-Ebene:

a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}$

c) $f(x,y) = \sqrt{(x^2-1)(9-y^2)}$ d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

Lösung:

a) $x^2+y^2>0$, d.h. $(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ "punktierte" (x,y)-Ebene

b) $\mathbf{x+y\geq 0 \wedge x\neq y}$, d.h. $\mathbf{y\geq -x}$ (obere Halbebene zur Geraden $y=-x$, einschließlich dieser Geraden) und ohne die Halbgerade $y=x, x>0$.

$(x,y)\in\{(x,y)\,|\,\mathbf{y\geq -x} \wedge y\neq x\}$

Skizze Definitionsbereich	Y1:··· Y2:···

c) $\mathbf{x^2-1\geq 0 \wedge 9-y^2\geq 0}$, d.h.

$(x,y)\in\{(x,y)\,|\,(|x|\geq 1 \wedge |y|\leq 3) \vee (|x|\leq 1 \wedge |y|\geq 3)\}$

$(x,y) \in D_1\cup D_2 = \{(x,y)\,|\,(|x|\geq 1 \wedge |y|\leq 3)\} \cup$

$\{(x,y)\,|\,(|x|\leq 1 \wedge |y|\geq 3)\}$

Skizze Definitionsbereich	Y1:··· Y2:···

d) $x^2+y^2-1\geq 0$, d.h. $x^2+y^2\geq 1$ (x,y)-Ebene ohne die offene Nullpunktumgebung $x^2+y^2<1$

$(x,y)\in\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 1\}$

Skizze Definitionsbereich	Y1:··· Y2:···

2.2 (Fall n=2, Flächen im Raum)

Welche Flächen im Raum $\mathbf{R}^3$ werden durch die folgenden Funktionen oder Gleichungen beschrieben?

a) $z=x-y$ b) $x^2+y^2=9$, $z\in R$ c) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

a) 3D-Grafik: geneigte Ebene	Z1:··· Z2:···

Define z1(x,y)=x−y

done

Spurgerade für x=0: z=−y

Define Xst2(s,t)=0

done

Define Yst2(s,t)=s+0.2t

done

Define Zst2(s,t)=−s−0.2t

done

Spurgerade für y=0: z=x

Define Xst3(s,t)=s+0.2t

done

Define Yst3(s,t)=0

done

Define Zst3(s,t)=s+0.2t

done

b) 3D-Grafik: Zylinderoberfläche	Z1:… Z2:…
c) 3D-Grafik: obere Halbkugel	Z1:… Z2:…

3. Partielle Ableitungen

3.1 partielle Ableitungen 1. Ordnung

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung.

a) $f(x,y,z)=e^{x\cdot y\cdot z}$ b)

$u(x,y,z)=\sin(2x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot e^{-z^2}+\sin(y)\cdot\ln(z)$ c)

$\varphi(\omega,L,R)=\arctan\left(\frac{\omega\cdot L}{R}\right)$

Define $f(x,y,z)=e^{x\cdot y\cdot z}$

done

Define $u(x,y,z)=\sin(2x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot e^{-z^2}+\sin(y)\cdot\ln(z)$

done

Define $\varphi(\omega,L,R)=\tan^{-1}\left(\frac{\omega\cdot L}{R}\right)$

done

$$\begin{bmatrix}\frac{d}{dx}(f(x,y,z))\\ \frac{d}{dy}(f(x,y,z))\\ \frac{d}{dz}(f(x,y,z))\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y\cdot z\cdot e^{x\cdot y\cdot z}\\ x\cdot z\cdot e^{x\cdot y\cdot z}\\ x\cdot y\cdot e^{x\cdot y\cdot z}\end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{bmatrix}\frac{d}{dx}(f(x,y,z))\\ \frac{d}{dy}(f(x,y,z))\\ \frac{d}{dz}(f(x,y,z))\end{bmatrix}=e^{x\cdot y\cdot z}\begin{bmatrix}y\cdot z\\ x\cdot z\\ x\cdot y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\frac{d}{dx}(u(x,y,z))\\ \frac{d}{dy}(u(x,y,z))\\ \frac{d}{dz}(u(x,y,z))\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\left(\sin(x)-2\cdot\cos(y)\cdot\cos(2\cdot x)\cdot e^{z^2}\right)\cdot e^{-z^2} \\ -\sin(y)\cdot\sin(2\cdot x)+\cos(y)\cdot\ln(z) \\ \dfrac{-\left(2\cdot z^2\cdot\cos(x)-\sin(y)\cdot e^{z^2}\right)\cdot e^{-z^2}}{z} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 2\cdot\cos(y)\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(x)\cdot e^{-z^2} \\ -\sin(y)\cdot\sin(2\cdot x)+\cos(y)\cdot\ln(z) \\ \dfrac{\sin(y)}{z}-2\cdot z\cdot\cos(x)\cdot e^{-z^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{d\omega}(\varphi(\omega,L,R)) \\ \dfrac{d}{dL}(\varphi(\omega,L,R)) \\ \dfrac{d}{dR}(\varphi(\omega,L,R)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{L\cdot R}{R^2+L^2\cdot\omega^2} \\ \dfrac{R\cdot\omega}{R^2+L^2\cdot\omega^2} \\ \dfrac{-L\cdot\omega}{R^2+L^2\cdot\omega^2} \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{bmatrix} \dfrac{d}{d\omega}(\varphi(\omega,L,R)) \\ \dfrac{d}{dL}(\varphi(\omega,L,R)) \\ \dfrac{d}{dR}(\varphi(\omega,L,R)) \end{bmatrix}=\dfrac{1}{R^2+L^2\cdot\omega^2}\begin{bmatrix} L\cdot R \\ R\cdot\omega \\ -L\cdot\omega \end{bmatrix}$

3.2 partielle Ableitungen 2. Ordnung

Berechnen Sie für die Funktion $f(x_1,x_2)=\sqrt{4x_1^2+x_1\cdot x_2}$ alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung.

Die entstehenden Ausdrücke sind möglichst zu vereinfachen.

Define $f(x_1, x_2)=\sqrt{4x_1^2+x_1\cdot x_2}$

done

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx_1^2}(f(x_1,x_2)) \\ \frac{d}{dx_2}\left(\frac{d}{dx_1}(f(x_1,x_2))\right) \\ \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d}{dx_2}(f(x_1,x_2))\right) \\ \frac{d^2}{dx_2^2}(f(x_1,x_2)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-\left(16\cdot x_1\cdot x_2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}-16\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}+x_2^2\cdot\sqrt{x_1\cdot}\right.}{4\cdot x_1^2\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2} \\ \frac{-\left(x_1\cdot x_2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}-2\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}+8\cdot x_1^2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x}\right.}{4\cdot x_1^2\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2} \\ \frac{-\left(x_1\cdot x_2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}-2\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}+8\cdot x_1^2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x}\right.}{4\cdot x_1^2\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2} \\ \frac{-x_1^2}{4\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{-x_2^2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}}{4\cdot x_1^2\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2} \\ \frac{x_2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}}{4\cdot x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2} \\ \frac{x_2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}}{4\cdot x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2} \\ \frac{-x_1^2}{4\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

Bem.: $\frac{d}{dx_2}\left(\frac{d}{dx_1}(f(x_1,x_2))\right)=\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d}{dx_2}(f(x_1,x_2))\right)$ **(Satz von Schwarz)**

letzter Schritt per Hand:

simplify$\left(\frac{d^2}{dx_1^2}(f(x_1,x_2))\right)$

$$\frac{-x_2^2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}}{4\cdot x_1^2\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2}$$

Define $t(x_1,x_2)=x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)$

done

judge$\left(\frac{-x_2^2\cdot\sqrt{t(x_1,x_2)}}{4\cdot t(x_1,x_2)^2}=\frac{-x_2^2}{4\cdot t(x_1,x_2)^{3/2}}\right)$

TRUE

$\frac{-x_2^2\cdot\sqrt{t(x_1,x_2)}}{4\cdot t(x_1,x_2)^2}-\frac{-x_2^2}{4\cdot t(x_1,x_2)^{3/2}}=0$

$$\frac{x_2^2}{4\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}}-\frac{x_2^2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}}{4\cdot x_1^2\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2}=0$$

simplify(ans)

0=0

letzter Schritt per Hand:

$$\operatorname{simplify}\left(\frac{d}{dx_2}\left(\frac{d}{dx_1}(f(x_1, x_2))\right)\right)$$

$$\frac{x_2 \cdot \sqrt{x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1)}}{4 \cdot x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1)^2}$$

$$\operatorname{judge}\left(\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \sqrt{t(x_1, x_2)}}{4 \cdot t(x_1, x_2)^2} = \frac{x_1 \cdot x_2}{4 \cdot t(x_1, x_2)^{3/2}}\right)$$

TRUE

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \sqrt{t(x_1, x_2)}}{4 \cdot t(x_1, x_2)^2} - \frac{x_1 \cdot x_2}{4 \cdot t(x_1, x_2)^{3/2}} = 0$$

$$\frac{x_2 \cdot \sqrt{x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1)}}{4 \cdot x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1)^2} - \frac{x_1 \cdot x_2}{4 \cdot (x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1))^{\frac{3}{2}}} = 0$$

simplify(ans)

$$0=0$$

Darstellung Endergebnis:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx_1^2}(f(x_1, x_2)) \\ \frac{d}{dx_2}\left(\frac{d}{dx_1}(f(x_1, x_2))\right) \\ \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d}{dx_2}(f(x_1, x_2))\right) \\ \frac{d^2}{dx_2^2}(f(x_1, x_2)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-x_2^2}{4 \cdot (x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1))^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{x_1 \cdot x_2}{4 \cdot (x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1))^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{x_1 \cdot x_2}{4 \cdot (x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1))^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-x_1^2}{4 \cdot (x_1 \cdot (x_2+4 \cdot x_1))^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\left(16\cdot x_1\cdot x_2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}-16\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}+x_2{}^2\cdot\sqrt{x_1\cdot}\right.}{4\cdot x_1{}^2\cdot(x_2+4\cdot x_1)^2} \\ \frac{-x_1\cdot x_2}{4\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}}-\frac{x_1\cdot x_2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}-2\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1}{4\cdot x_1{}^2\cdot(x_2+4\cdot} \\ \frac{-x_1\cdot x_2}{4\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^{\frac{3}{2}}}-\frac{x_1\cdot x_2\cdot\sqrt{x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1)}-2\cdot(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1}{4\cdot x_1{}^2\cdot(x_2+4\cdot} \\ 0 \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ergebnis:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx_1{}^2}(f(x_1,x_2)) \\ \frac{d}{dx_2}\left(\frac{d}{dx_1}(f(x_1,x_2))\right) \\ \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d}{dx_2}(f(x_1,x_2))\right) \\ \frac{d^2}{dx_2{}^2}(f(x_1,x_2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-x_2{}^2}{4\cdot\sqrt{(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^3}} \\ \frac{x_1\cdot x_2}{4\cdot\sqrt{(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^3}} \\ \frac{x_1\cdot x_2}{4\cdot\sqrt{(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^3}} \\ \frac{-x_1{}^2}{4\cdot\sqrt{(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^3}} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{x_1\cdot x_2}{4\cdot\sqrt{(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^3}}\begin{bmatrix} -x_2{}^2 \\ x_1\cdot x_2 \\ x_1\cdot x_2 \\ -x_1{}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\cdot\sqrt{(x_1\cdot(x_2+4\cdot x_1))^3}}\begin{bmatrix} -x_2/x_1 \\ 1 \\ 1 \\ -x_1/x_2 \end{bmatrix}$$

3.3 totales (vollständiges) Differential

Berechnen Sie das totale (vollständige) Differential der folgenden Funktion: $u(x_1, x_2, x_3)=\ln\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)$

Define $u(x_1, x_2, x_3)=\ln\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)$

done

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1}(u(x_1,x_2,x_3)) \\ \frac{d}{dx_2}(u(x_1,x_2,x_3)) \\ \frac{d}{dx_3}(u(x_1,x_2,x_3)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_3^2+x_2^2+x_1^2} \\ \frac{x_2}{x_3^2+x_2^2+x_1^2} \\ \frac{x_3}{x_3^2+x_2^2+x_1^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{trn}\left(\begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_3^2+x_2^2+x_1^2} \\ \frac{x_2}{x_3^2+x_2^2+x_1^2} \\ \frac{x_3}{x_3^2+x_2^2+x_1^2} \end{bmatrix}\right)*\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1 \cdot x_1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{dx_2 \cdot x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{dx_3 \cdot x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{dotP}\left(\begin{bmatrix}\frac{x_1}{x_3^2+x_2^2+x_1^2}\\ \frac{x_2}{x_3^2+x_2^2+x_1^2}\\ \frac{x_3}{x_3^2+x_2^2+x_1^2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}dx_1\\ dx_2\\ dx_3\end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{dx_1\cdot x_1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{dx_2\cdot x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{dx_3\cdot x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

4. Extrema von Funktionen mehrerer Variabler

4.1 Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$ in impliziter Form.

a) Berechnen Sie den Anstieg der Tangente im Kurvenpunkt $P(x,y)$.

b) Zeigen Sie, dass die Kurve im Punkt $P_1\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

c) In welchen Punkten der Kurve gilt $F_y=0$ und welche Eigenschaften hat die Kurve dort?

Lösung:

a) biquadratische Gleichung

solve$((x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0,y)$

$$\left\{y=-\sqrt{-x^2-\sqrt{4\cdot x^2+1}-1},y=\sqrt{-x^2-\sqrt{4\cdot x^2+1}-1},y=-\sqrt{-x^2+\sqrt{}}\right.$$

solve$((x^2+t)^2-2(x^2-t)=0,t)$

$$\left\{t=-x^2-\sqrt{4\cdot x^2+1}-1,t=-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1\right\}$$

$y=-\sqrt{-x^2-\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}$, $y=\sqrt{-x^2-\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}$ entfällt (nicht reell)

2D−Grafik: ∞ (Lemniskate)

Define $y(x)=c*\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}$

done

$\frac{d}{dx}(y(x))$

$$\frac{-c\cdot\left(x\cdot\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\cdot x\right)}{\sqrt{4\cdot x^2+1}\cdot\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}}$$

simplify(ans)

$$\frac{-c\cdot x\cdot\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\right)}{\sqrt{4\cdot x^2+1}\cdot\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}}$$

Ergebnis: $y'(x)=\frac{-c\cdot x\cdot\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\right)}{\sqrt{4\cdot x^2+1}\cdot\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}}$ mit $c=\pm1$

DelVar y

done

$\frac{d}{dx}\left((x^2+y(x)^2)^2-2(x^2-y(x)^2)=0\right)$

$4\cdot\frac{d}{dx}(y(x))\cdot(y(x))^3+4\cdot x^2\cdot\frac{d}{dx}(y(x))\cdot y(x)+4\cdot x\cdot(y(x))$ ▶

simplify(ans)

$4\cdot\left(\frac{d}{dx}(y(x))\cdot\left((y(x))^3+x^2\cdot y(x)+y(x)\right)+x\cdot(y(x))^2+x^3\right.$ ▶

solve$(4\cdot\left(t\cdot\left((y(x))^3+x^2\cdot y(x)+y(x)\right)+x\cdot(y(x))^2+x^3-x\right)=$ ▶

$$\left\{t=\frac{-x\cdot\left((y(x))^2+x^2-1\right)}{\left((y(x))^2+x^2+1\right)\cdot y(x)}\right\}$$

Ergebnis: $y'(x)=\frac{-x\cdot(y^2+x^2-1)}{(y^2+x^2+1)\cdot y}$

fMax$(\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1},x)$

$$\left\{\text{MaxValue}=\frac{1}{2},\ x=\frac{-\sqrt{3}}{2},\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

b) Hochpunkt $P_1\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$, d.h. waagerechte Tangente, vgl. Skizze

$$\frac{-x\cdot(y^2+x^2-1)}{(y^2+x^2+1)\cdot y}\,|\,x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\text{ and }y=\frac{1}{2}$$

$$0$$

stop

$$\text{fMin}\left(-\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1},x\right)$$

$$\left\{\text{MinValue}=-\frac{1}{2},\ x=\frac{-\sqrt{3}}{2},\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Wertebereich: $y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$$\text{fMin}\left(\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1},x\right)$$

$$\{\text{MinValue}=0,\ x=-\sqrt{2},\ x=0,\ x=\sqrt{2}\}$$

Definitionsbereich: $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

c) $F_y=0$ mit $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$

Define $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$

done

$$\frac{d}{dy}(F(x,y))=0$$

$$4\cdot y^3+4\cdot x^2\cdot y+4\cdot y=0$$

factor(ans)

$$4\cdot y\cdot(x^2+y^2+1)=0$$

Ergebnis: $F_y=0$ für $y=0$, d.h. $(-\sqrt{2},0),(0,0),(\sqrt{2},0)$

für $(-\sqrt{2},0)$ und $(\sqrt{2},0)$ liegen senkrechte Tangenten vor für (0,0) kein eindeutiger Anstieg ("Doppelpunkt")

$$y'(x)=\frac{-c\cdot x\cdot\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\right)}{\sqrt{4\cdot x^2+1}\cdot\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}} \quad \text{mit } c=\pm 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-c\cdot x\cdot\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\right)}{\sqrt{4\cdot x^2+1}\cdot\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}}\right)$$

$$-c$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-c\cdot x\cdot\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\right)}{\sqrt{4\cdot x^2+1}\cdot\sqrt{-x^2+\sqrt{4\cdot x^2+1}-1}}\right)$$

$$c$$

d.h. **$y'(0)=\pm 1$ Anstieg −1 bzw. 1, vgl. Skizze**

4.2 Flächendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f(x,y)=(x+y)^2+\sin(x\cdot y)$.

a) Begründen Sie, dass im Punkt (0,0) eine stationäre Stelle vorliegt.

b) Untersuchen Sie, ob es sich um eine lokale Extremalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

3D−Grafik	Z1:… Z2:…

Lösung:

a) stationäre Stelle: $f_x=0$ und $f_y=0$ (notwendige Bedingung für Extremum)

Define $f(x,y)=(x+y)^2+\sin(x\cdot y)$

done

$$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl1$$

$$y\cdot\cos(x\cdot y)+2\cdot x+2\cdot y=0$$

$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl2$

$$x \cdot \cos(x \cdot y)+2 \cdot x+2 \cdot y=0$$

$\{Gl1, Gl2\} | x=0 \text{ and } y=0$

$$\{0=0, 0=0\}$$

b) hinreichende Bedingung

det(Hesse–Matrix)=Funktionaldeterminante>0

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) * \frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x\right.\right.$ ▶

$$\text{done}$$

$D(x,y)$

$$-(x \cdot y \cdot \sin(x \cdot y)-\cos(x \cdot y)-2)^2+\left(x^2 \cdot \sin(x \cdot y)-2\right) \cdot \left(y^2 \cdot \sin(x\right.$$ ▶

$ans | x=0 \text{ and } y=0$

$$-5$$

Sattelstelle, da D(0,0)<0

4.3 lokale Extrema

Berechnen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y)=x^2(1-y)-y^3+12y+13$ b) $f(x,y)=x^2-x \cdot y+y^2+3y$ c) $f(x,y)=e^{-x^2}(4y+x^2-y^2)$

Define $f(x,y)=x^2(1-y)-y^3+12y+13$

$$\text{done}$$

$\text{solve}\left(\{\frac{d}{dx}(f(x,y))=0, \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\}, \{x,y\}\right)$

$$\{\{x=-3, y=1\}, \{x=0, y=-2\}, \{x=0, y=2\}, \{x=3, y=1\}\}$$

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) \cdot \frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,\right.\right.$ ▶

done

$D(x,y)|\{x=-3,y=1\}$

−36

$D(x,y)|\{x=0,y=-2\}$

72

$D(x,y)|\{x=0,y=2\}$

24

$D(x,y)|\{x=3,y=1\}$

−36

Sattelpunkte: $\{x=-3,y=1\}$ und $\{x=3,y=1\}$

Extrema: Min$\{x=0,y=-2,z=-3\}$ und

Max$\{x=0,y=2,z=29\}$, denn

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|\{x=0,y=-2\}$

6

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|\{x=0,y=2\}$

−2

$f(x,y)|\{x=0,y=-2\}$

−3

$f(x,y)|\{x=0,y=2\}$

29

3D−Grafik: Fläche 3. Ordnung

Define $f(x,y)=x^2-x\cdot y+y^2+3y$

done

$\text{solve}\left(\{\frac{d}{dx}(f(x,y))=0, \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\},\{x,y\}\right)$

$\{x=-1, y=-2\}$

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\cdot\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,\right.\right.$ ▶

done

$D(x,y)\mid\{x=-1, y=-2\}$

3

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\mid\{x=-1, y=-2\}$

2

$f(x,y)\mid\{x=-1, y=-2\}$

−3

Min $\{x=-1, y=-2, z=-3\}$

3D−Grafik: Fläche 2. Ordnung

Define $f(x,y)=e^{-x^2}(4y+x^2-y^2)$

done

$\text{solve}\left(\left\{\frac{d}{dx}(f(x,y))=0, \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\right\}, \{x,y\}\right)$

$\{\{x=0, y=2\}, \{x=-\sqrt{3}\cdot j, y=2\}, \{x=\sqrt{3}\cdot j, y=2\}\}$

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\cdot\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,\right.\right.$ ▶

done

$D(x,y)\mid\{x=0, y=2\}$

12

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\mid\{x=0, y=2\}$

−6

$f(x,y)\mid\{x=0, y=2\}$

4

Max{x=0, y=2, z=4}

3D–Grafik

4.4 Lagrange–Methode

Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$ unter der Nebenbedingung $x+y+z-5=0$.

Define $F(x,y,z,\lambda)=x\cdot y\cdot z+\lambda\cdot(x+y+z-5)$

done

$$\left[\frac{d}{dx}(F(x,y,z,\lambda)) \quad \frac{d}{dy}(F(x,y,z,\lambda)) \quad \frac{d}{dz}(F(x,y,z,\lambda)) \quad \frac{d}{d.}\right.$$

$$[y\cdot z+\lambda \quad x\cdot z+\lambda \quad x\cdot y+\lambda \quad x+y+z-5]$$

solve({$y\cdot z+\lambda=0, x\cdot z+\lambda=0, x\cdot y+\lambda=0, x+y+z-5=0$}, {$x, y, z, \lambda$})

$$\left\{\{x=0, y=5, z=0, \lambda=0\}, \{x=5, y=0, z=0, \lambda=0\}, \left\{x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{3},\right.\right.$$

eine Lösung fehlt: {x=0, y=0, z=5, λ=0}

Diskussion: unmittelbare Nachbarschaft der gefundenen Lösungen:

{x=0, y=0, z=5} hat unter der Nebenbedingung den unmittelbaren Nachbarn {x=ε, y=ε, z=5−2ε} oder {x=ε, y=−ε, z=5}, ε>0 nahe Null.

Define $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$

done

$f(x,y,z)=0\,|\,\{x=0, y=0, z=5\}$

$0=0$

$f(x,y,z)>0\,|\,\{x=\varepsilon, y=\varepsilon, z=5-2\varepsilon\}$

$$-\varepsilon^2\cdot(2\cdot\varepsilon-5)>0$$

$f(x,y,z)<0 \mid \{x=\varepsilon, y=-\varepsilon, z=5\}$

$$-5\cdot\varepsilon^2<0$$

stop

Damit sind

$\{x=0,y=0,z=5\}, \{x=0,y=5,z=0\}, \{x=5,y=0,z=0\}$ keine Extremstellen.

$\left\{x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{3}, z=\frac{5}{3}\right\}$ hat unter der Nebenbedingung den unmittelbaren Nachbarn $\left\{x=\frac{5}{3}+\varepsilon, y=\frac{5}{3}+\varepsilon, z=\frac{5}{3}-2\varepsilon\right\}$ oder $\left\{x=\frac{5}{3}+\varepsilon, y=\frac{5}{3}-\varepsilon, z=\frac{5}{3}\right\}, \varepsilon>0$ nahe Null.

$f(x,y,z)=\frac{125}{27} \mid \left\{x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{3}, z=\frac{5}{3}\right\}$

$$\frac{125}{27}=\frac{125}{27}$$

$f(x,y,z)<\frac{125}{27} \mid \left\{x=\frac{5}{3}+\varepsilon, y=\frac{5}{3}+\varepsilon, z=\frac{5}{3}-2\varepsilon\right\}$

$$-\left(\varepsilon+\frac{5}{3}\right)^2\cdot\left(2\cdot\varepsilon-\frac{5}{3}\right)<\frac{125}{27}$$

approx(ans|ε=0.01)

$$4.62912763<4.62962963$$

$f(x,y,z)<\frac{125}{27} \mid \left\{x=\frac{5}{3}+\varepsilon, y=\frac{5}{3}-\varepsilon, z=\frac{5}{3}\right\}$

$$\frac{-5\cdot\left(\varepsilon+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\varepsilon-\frac{5}{3}\right)}{3}<\frac{125}{27}$$

approx(ans|ε=0.01)

$$4.629462963<4.62962963$$

stop

Damit ist $\left\{x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{3}, z=\frac{5}{3}\right\}$ eine Maximumstelle, da in der Nachbarschaft stets kleinere Werte entstehen.

Eliminationsmethode:

$f(x,y,z)|z=5-x-y$

$$-x\cdot y\cdot(x+y-5)$$

Define $g(x,y)=-x\cdot y\cdot(x+y-5)$

done

$\text{solve}\left(\{\frac{d}{dx}(g(x,y))=0, \frac{d}{dy}(g(x,y))=0\},\{x,y\}\right)$

$$\left\{\{x=0,y=0\},\{x=0,y=5\},\{x=5,y=0\},\left\{x=\frac{5}{3},y=\frac{5}{3}\right\}\right\}$$

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(g(x,y))\cdot\frac{d^2}{dy^2}(g(x,y))-\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(g(x\right.\right.$

done

$D(x,y)|\{x=0,y=0\}$

$$-25$$

$D(x,y)|\{x=0,y=5\}$

$$-25$$

$D(x,y)|\{x=5,y=0\}$

$$-25$$

$D(x,y)|\left\{x=\frac{5}{3},y=\frac{5}{3}\right\}$

$$\frac{25}{3}$$

keine Extrema: $\{x=0,y=0\},\{x=0,y=5\},\{x=5,y=0\}$

$\frac{d^2}{dx^2}(g(x,y))|\left\{x=\frac{5}{3},y=\frac{5}{3}\right\}$

$$-\frac{10}{3}$$

$z=5-x-y|\left\{x=\frac{5}{3},y=\frac{5}{3}\right\}$

$$z=\frac{5}{3}$$

$f(x,y,z)\,|\,\left\{x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{3}, z=\frac{5}{3}\right\}$

$$\frac{125}{27}$$

Max $\left\{x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{3}, z=\frac{5}{3}, f=\frac{125}{27}\right\}$

4.4 Extremwerte

Gegeben ist die Funktion $f(x,y)=\frac{x-2}{y^2+1}-\frac{1}{8}x^2$.

a) Begründen Sie, dass diese Funktion an der Stelle (4, 0) ein lokales Maximum besitzt.

b) Hat diese Funktion weitere stationäre Stellen? Wenn ja, welche?

Lösung:

Define $f(x,y)=\frac{x-2}{y^2+1}-\frac{1}{8}x^2$

done

solve$\left(\left\{\frac{d}{dx}(f(x,y))=0, \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\right\}, \{x,y\}\right)$

$\{\{x=2, y=-1\}, \{x=2, y=1\}, \{x=4, y=0\}\}$

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\cdot\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,\right.\right.$ ▶

done

$D(x,y)\,|\,\{x=4, y=0\}$

$$1$$

$D(x,y)\,|\,\{x=2, y=1\}$

$$-\frac{1}{4}$$

$D(x,y)|\{x=2, y=-1\}$

$$-\frac{1}{4}$$

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|\{x=4, y=0\}$

$$-\frac{1}{4}$$

$f(x,y)|\{x=4, y=0\}$

$$0$$

Max$\{x=4, y=0, z=0\}$

3D–Grafik

5. Integrale über zwei– bzw. dreidimensionale Bereiche

5.1 Doppelintegrale

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

a) $\int_1^4\int_{-\pi}^{\pi/3} x^2\sin(y)\,dy\,dx$ b) $\int_0^4\int_1^2 \sin(2x+y)\,dx\,dy$ c) $\int_1^2\int_0^{y+1} x*\ln(y)\,dx\,dy$

$\int_1^4\int_{-\pi}^{\pi/3} x^2\sin(y)\,dy\,dx$

$$-\frac{63}{2}$$

approx(ans)

$$-31.5$$

$\int_0^4\int_1^2 \sin(2x+y)\,dx\,dy$

$$\frac{-(\sin(8)-\sin(6)-\sin(4)+\sin(2))}{2}$$

approx(ans)

$$-1.467436833$$

$$\int_1^2\int_0^{y+1} x*\ln(y)\,dx\,dy$$

$$\frac{13\cdot\ln(2)}{3}-\frac{59}{36}$$

approx(ans)

$$1.364748894$$

5.2 Dreifachintegral

Gegeben ist das Dreifachintegral

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \sin(x+y)\,e^{3z}\,dz\,dy\,dx.$$

Berechnen Sie dieses Integral.

Darf bei dem Integral die Integrationsreihenfolge vertauscht werden?

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \sin(x+y)\,e^{3z}\,dz\,dy\,dx$$

$$\frac{2\cdot e^3}{3}-\frac{2}{3}$$

approx(ans)

$$12.72369128$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^1 \sin(x+y)\,e^{3z}\,dz\,dx\,dy$$

$$\frac{2\cdot e^3}{3}-\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} \sin(x+y)\,dx\,dy*\int_0^1 e^{3z}\,dz$$

$$2\cdot\left(\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

Ja, die Integrationsreihenfolge kann bel. vertauscht werden. (Grenzen entsprechend anpassen)

5.3 Zylinderkoordinaten

Gegeben sei ein zur z-Achse rotationssymmetrischer Kreiszylinder mit dem Radius R, der Höhe h und der Grundfläche in der (x,y)-Ebene. Durch einen Schnitt mit der (x,z)-Ebene sowie einen Schnitt mit der (y,z)-Ebene wird dieser Kreiszylinder in vier Teilkörper zerlegt. Als Bereich B wird derjenige Teilkörper betrachtet, dessen Grundfläche sich im ersten Quadranten befindet.

a) Skizzieren Sie den Bereich B.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_B x^2+y^2+z^2 dB$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Lösung:

$x=r\cdot\cos(\varphi)$, $y=r\cdot\sin(\varphi)$, $dx\cdot dy=r\cdot dr\cdot d\varphi$, $0\leq r\leq R, 0\leq\varphi\leq\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^h (r^2+z^2)\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$\frac{\left(\frac{R^4\cdot h}{4}+\frac{R^2\cdot h^3}{6}\right)\cdot\pi}{2}$$

collect(ans)

$$\frac{R^4\cdot h\cdot\pi}{8}+\frac{R^2\cdot h^3\cdot\pi}{12}$$

factor(ans)

$$\frac{R^2 \cdot h \cdot (3 \cdot R^2 + 2 \cdot h^2) \cdot \pi}{24}$$

Define Xst1(s,t)=2•cos(s)

done

Define Yst1(s,t)=2•sin(s)

done

Define Zst1(s,t)=t

done

Define Xst2(s,t)=2t/3•cos(s)

done

Define Yst2(s,t)=2t/3•sin(s)

done

Define Zst2(s,t)=0

done

Define Xst3(s,t)=2t/3•cos(s)

done

Define Yst3(s,t)=2t/3•sin(s)

done

Define Zst3(s,t)=3

done

Define Xst4(s,t)=2t/3

done

Define Yst4(s,t)=0

done

Define $\text{Zst4}(s,t)=\frac{6 \cdot s}{\pi}$

done

Define Xst5(s,t)=0

done

Define Yst5(s,t)=2t/3

done

Define $Zst5(s,t)=\frac{6\cdot s}{\pi}$

done

3D-Grafik: Viertelzylinder	Z1:… Z2:…

6. Kurvenintegral (Linienintegral) einer skalaren Funktion

6.1 Bogenlänge einer Raumkurve

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden, in Parameterdarstellung gegebenen Raumkurven:

a) $x(t)=t$, $y(t)=t^2$, $z(t)=\frac{2}{3}t^3$, $0\le t\le 1$,

b) $x(t)=e^{-t}\cos(t)$, $y(t)=e^{-t}\sin(t)$, $z(t)=e^{-t}$, $0<t<\infty$,

c) $x(t)=\ln(t)$, $y(t)=4\sqrt{t}\sin(\sqrt{t})$, $z(t)=4\sqrt{t}\cos(\sqrt{t})$, $\pi/6\le t\le \pi/2$.

Integraltyp: $\int_K f(x,y,z)ds$, ds skalares Kurvenelement der Raumkurve K, Bogenlänge mit $f(x,y,z)=1$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{d}{dt}(x(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(y(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(z(t))\right)^2}dt$$

a)

Define x(t)=t

done

Define $y(t)=t^2$

done

Define $z(t)=\frac{2}{3}t^3$

done

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dt}(x(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(y(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(z(t))\right)^2}$$

$$\sqrt{(2\cdot t^2+1)^2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{(2\cdot t^2+1)^2}\,dt$$

1.666666667

b)

Define $x(t)=e^{-t}\cos(t)$

done

Define $y(t)=e^{-t}\sin(t)$

done

Define $z(t)=e^{-t}$

done

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dt}(x(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(y(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(z(t))\right)^2}$$

$$\sqrt{(2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot(\sin(t))^2+1)\cdot e^{-2\cdot t}}$$

simplify(ans)

$$\sqrt{3\cdot e^{-2\cdot t}}$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{3\cdot e^{-2\cdot t}}\,dt$$

$$\sqrt{3}$$

approx(ans)

1.732050808

c)

Define $x(t)=\ln(t)$

done

Define $y(t)=4\sqrt{t}\sin(\sqrt{t})$

done

Define $z(t)=4\sqrt{t}\cos(\sqrt{t})$

done

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dt}(x(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(y(t))\right)^2+\left(\frac{d}{dt}(z(t))\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{t^2\cdot\left(4\cdot(\cos(\sqrt{t}))^2+4\cdot(\sin(\sqrt{t}))^2\right)+t\cdot\left(4\cdot(\cos(\sqrt{t}))^2+4\cdot\right.}{t^2}}$$

simplify(ans)

$$\sqrt{\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}+4}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}+4}\,dt$$

3.193007391

3D–Grafik a)	Z1:… Z2:…
3D–Grafik b) Spirale zum Koordinatenursprung	Z1:… Z2:…
3D–Grafik c)	Z1:… Z2:…

7. Oberflächenintegral (Flächenintegral) einer skalaren Funktion

7.1 Oberflächenintegral

Die Fläche A (parabolischer Zylinder) sei durch die Parameterdarstellung

$x(u,v)=u$, $y(u,v)=u^2/6$, $z(u,v)=v$ mit $-3\le u\le 3$, $0\le v\le 6$, gegeben. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt

F_A.

vektorielle Darstellung

$$r(u,v)=\begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix},$$

Tangentialvektoren: $\frac{\partial r(u,v)}{\partial u}=\begin{bmatrix} \frac{d}{du}(x(u,v)) \\ \frac{d}{du}(y(u,v)) \\ \frac{d}{du}(z(u,v)) \end{bmatrix}$,

$$\frac{\partial r(u,v)}{\partial v}=\begin{bmatrix} \frac{d}{dv}(x(u,v)) \\ \frac{d}{dv}(y(u,v)) \\ \frac{d}{dv}(z(u,v)) \end{bmatrix}$$

Integraltyp: $\int_A f(x,y,z)dA$, dA Oberflächenelement mit

$dA=\sqrt{E*G-F^2}dudv$

und $E=dotP\left(\frac{\partial r(u,v)}{\partial u},\frac{\partial r(u,v)}{\partial u}\right)$,

$G=dotP\left(\frac{\partial r(u,v)}{\partial v},\frac{\partial r(u,v)}{\partial v}\right)$, $F=dotP\left(\frac{\partial r(u,v)}{\partial u},\frac{\partial r(u,v)}{\partial v}\right)$

Die Grenzen bei der Integration über den Bereich B (d.h. die Grenzen für die Integrationsvariablen u und v) stammen aus der Parameterdarstellung der Fläche A.

Define $x(u,v)=u$

done

Define $y(u,v)=u^2/6$

done

Define z(u,v)=v

done

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{du}(x(u,v)) \\ \frac{d}{du}(y(u,v)) \\ \frac{d}{du}(z(u,v)) \end{bmatrix} \Rightarrow ru$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{u}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dv}(x(u,v)) \\ \frac{d}{dv}(y(u,v)) \\ \frac{d}{dv}(z(u,v)) \end{bmatrix} \Rightarrow rv$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E:=dotP(ru,ru)

$$\frac{u^2}{9}+1$$

G:=dotP(rv,rv)

1

F:=dotP(ru,rv)

0

$$\sqrt{E*G-F^2}$$

$$\frac{\sqrt{u^2+9}}{3}$$

$$\int_0^6\int_{-3}^{3}\frac{\sqrt{u^2+9}}{3}\,du\,dv$$

$$18\cdot\ln(\sqrt{2}+1)+18\cdot\sqrt{2}$$

approx(ans)

41.32056869

3D-Grafik: parabolischer Zylinder	Z1:… Z2:…

8. Grafik: 2D-Grafik, 3D-Grafik

8.1 2D-Grafik

2D-Editor	Y1:… Y2:…

8.2 3D-Grafik

In eine Kugel (Radius R=1) soll eine quadratische Pyramide mit maximalem Volumen einbeschrieben werden. Wieviel Prozent des Kugelvolumes nimmt diese Pyramide ein?

Lösung:

Kugelmittelpunkt M(0,0,0)

Kugeloberfläche: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

regelmäßige Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

Pyramidenspitze im Nordpol: N(0,0,R)

Grundfläche (Quadrat $P_1P_2P_3P_4$) mit den vier Eckpunkten unterhalb der x-Achse bzw. y-Achse auf der Kugeloberfläche:

mit

$P_1(r, 0, -\sqrt{R^2-r^2})$, $P_2(0, r, -\sqrt{R^2-r^2})$,

$P_3(-r, 0, -\sqrt{R^2-r^2})$, $P_4(0, -r, -\sqrt{R^2-r^2})$.

Kantenlänge des Quadrates:

$\text{norm}([r, 0, -\sqrt{R^2-r^2}]-[0, r, -\sqrt{R^2-r^2}])|r>0$

$$\frac{4}{3}$$

Pyramidenvolumen Vp:

Define $\text{Vp}(r)=\frac{1}{3}(\sqrt{2}\cdot r)^2*(R+\sqrt{R^2-r^2})$

done

$\text{Vp}(r)$

$$\frac{64}{81}$$

$\frac{d}{dr}(\text{Vp}(r))=0$

$$0=0$$

solve(ans, r)|R>0

$$\{r=r\}$$

$\frac{d^2}{dr^2}(\text{Vp}(r))|r=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3}$

$$-\frac{64}{3}$$

(ans|R>0)<0

$$-\frac{64}{3}<0$$

Damit liegt ein Max. vor.

Lösung:

$r=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3}$ und

$Vp(r)|\{r=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3},\ R>0\}$

$$\frac{64}{81}$$

Define $Vp(R)=\frac{64\cdot R^3}{81}$

done

Kugelvolumen:

Define $Vk(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$

done

$\frac{Vp(R)}{Vk(R)}*100$

$$\frac{1600}{27\cdot\pi}$$

approx(ans)

18.86280807

max. Pyramidenvolumen ca. 18,86% des Kugelvolumens.

3D-Grafik: Blick in die Halbkugel auf die Pyramide
Parameterdarstellung:

Kugel-OF mit R=1 und $-1\leq s\leq 0,\ 0\leq t\leq 1$
Fenstereinstellung $-2\leq x, y, z\leq 2$
Anzahl der s-Linien, t-Linien im Liniennetz jeweils 35
Betrachtungswinkel $\theta=-140°,\ \varphi=110°$,
(Augenpunkt unterhalb des III. Quadranten)

Define xst1(s, t)=cos(πs)sin(πt)

done

Define yst1(s, t)=sin(πs)sin(πt)

done

Define zst1(s, t)=cos(πt)

done

3D−Grafik Halbkugel	Z1:⋯ Z2:⋯

Grundfläche der Pyramide (Quadrat)

R:=1

1

$r:=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3}$

$\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$

Define xst2(s, t)=r*(−s−t)

done

Define yst2(s, t)=r*(s−t+1)

done

Define zst2(s, t)=$-\sqrt{R^2-r^2}$

done

stop

3D−Grafik Halbkugel mit Quadrat	Z1:⋯ Z2:⋯

Begründung für Parameterdarstellung des Quadrates

Ebenengleichung:

$X(s, t)=MP_1+s*P_1P_2+t*P_1P_4$

$M(0,0,0)$

$P_1(r,0,-\sqrt{R^2-r^2})$, $P_2(0,r,-\sqrt{R^2-r^2})$,

$P_3(-r,0,-\sqrt{R^2-r^2})$, $P_4(0,-r,-\sqrt{R^2-r^2})$,

$MP_1:=[r,0,-\sqrt{R^2-r^2}]-[0,0,0]$

$$\left[\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\quad 0\quad -\frac{1}{3}\right]$$

$P_1P_2:=[0,r,-\sqrt{R^2-r^2}]-[r,0,-\sqrt{R^2-r^2}]$

$$\left[\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}\quad \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\quad 0\right]$$

$P_1P_4:=[0,-r,-\sqrt{R^2-r^2}]-[r,0,-\sqrt{R^2-r^2}]$

$$\left[\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}\quad \frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}\quad 0\right]$$

obigen Parameterbereich $-1\leq s\leq 0$, $0\leq t\leq 1$ nutzen

DelVar s, t

done

$MP_1+(s+1)*P_1P_2+t*P_1P_4$

$$\left[\frac{-2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+1)}{3}-\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot t}{3}+\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\quad \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+1)}{3}-\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot t}{3}\quad -\frac{1}{3}\right]$$

simplify(ans)

$$\left[\frac{-2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+t)}{3}\quad \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(s-t+1)}{3}\quad -\frac{1}{3}\right]$$

Seitenfächen (Dreiecke)

Define xst3(s,t)=r*(-s-1)

done

Define yst3(s,t)=r*(s+1−t)*$\begin{cases} 1, & t\geq s+1 \\ \frac{1}{0}, & t<s+1 \end{cases}$

done

Die Fallunterscheidung sichert das Dreieck statt Quadrat.

Define zst3(s,t)=$1-\frac{4}{3}t$

done

Define xst4(s,t)=−xst3(s,t)

done

Define yst4(s,t)=yst3(s,t)

done

Define zst4(s,t)=zst3(s,t)

done

3D−Grafik Halbkugel mit Pyramide

Begründung für Parameterdarstellung der Dreiecke

Ebenengleichung: über P_4P_3

$X(s,t)=MN+s*P_4P_3+t*NP_4$

Ebenengleichung: über P_4P_1

$X(s,t)=MN+s*P_4P_1+t*NP_4$

M(0,0,0), N(0,0,R)

$P_1(r,0,-\sqrt{R^2-r^2})$, $P_2(0,r,-\sqrt{R^2-r^2})$,

$P_3(-r,0,-\sqrt{R^2-r^2})$, $P_4(0,-r,-\sqrt{R^2-r^2})$,

MN:=[0,0,R]−[0,0,0]

$$[0\ \ 0\ \ 1]$$

$NP_4 := [0, -r, -\sqrt{R^2-r^2}] - [0, 0, R]$

$$\left[0 \quad \frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3} \quad -\frac{4}{3}\right]$$

$P_4P_3 := [-r, 0, -\sqrt{R^2-r^2}] - [0, -r, -\sqrt{R^2-r^2}]$

$$\left[\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3} \quad \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} \quad 0\right]$$

$P_4P_1 := [r, 0, -\sqrt{R^2-r^2}] - [0, -r, -\sqrt{R^2-r^2}]$

$$\left[\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} \quad \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} \quad 0\right]$$

obigen Parameterbereich $-1 \le s \le 0$, $0 \le t \le 1$ nutzen

$MN+(s+1)*P_4P_3+t*NP_4$

$$\left[\frac{-2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+1)}{3} \quad \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+1)}{3}-\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot t}{3} \quad \frac{-4\cdot t}{3}+1\right]$$

simplify(ans)

$$\left[\frac{-2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+1)}{3} \quad \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(s-t+1)}{3} \quad \frac{-4\cdot t}{3}+1\right]$$

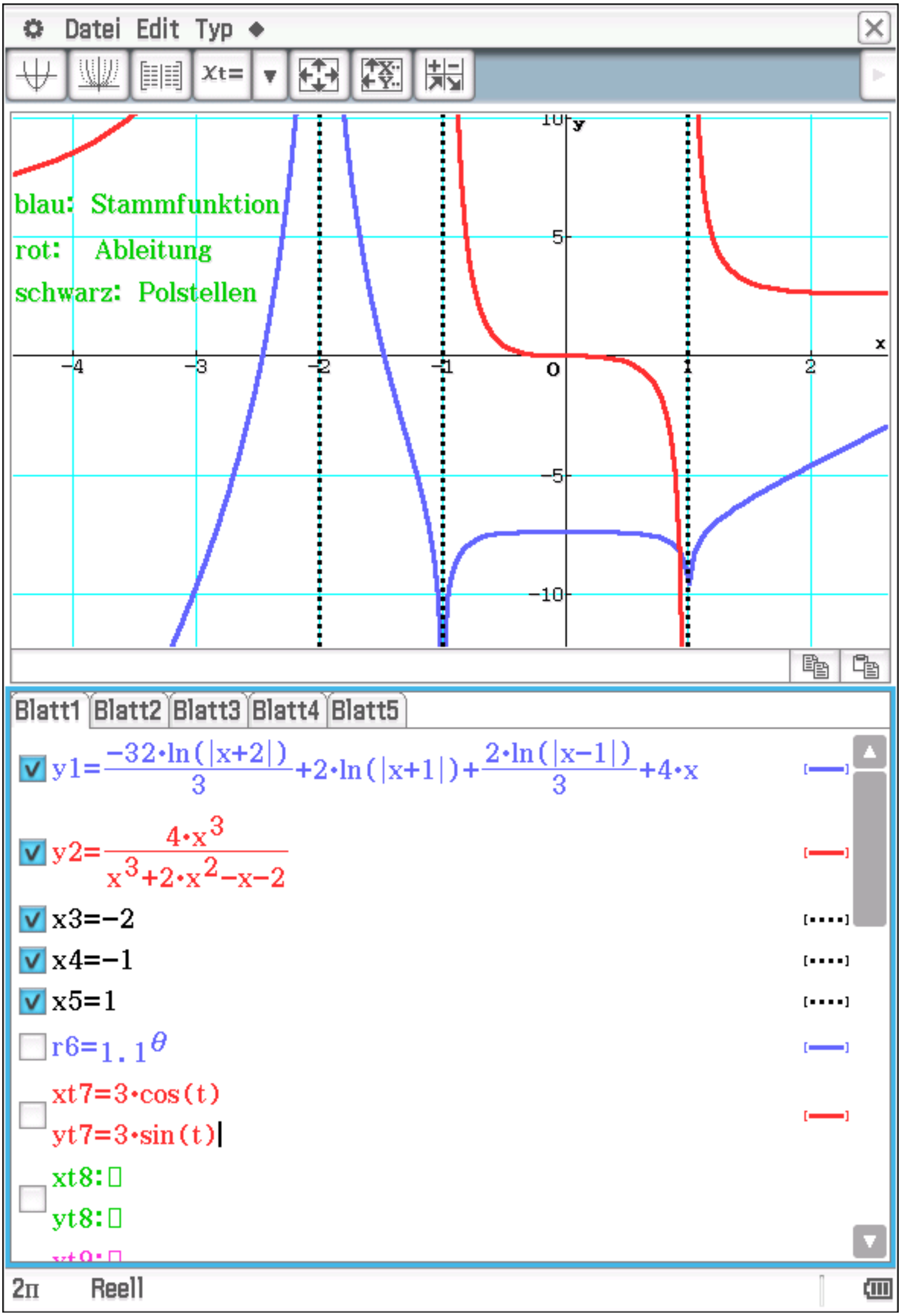
$MN+(s+1)*P_4P_1+t*NP_4$

$$\left[\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+1)}{3} \quad \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+1)}{3}-\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot t}{3} \quad \frac{-4\cdot t}{3}+1\right]$$

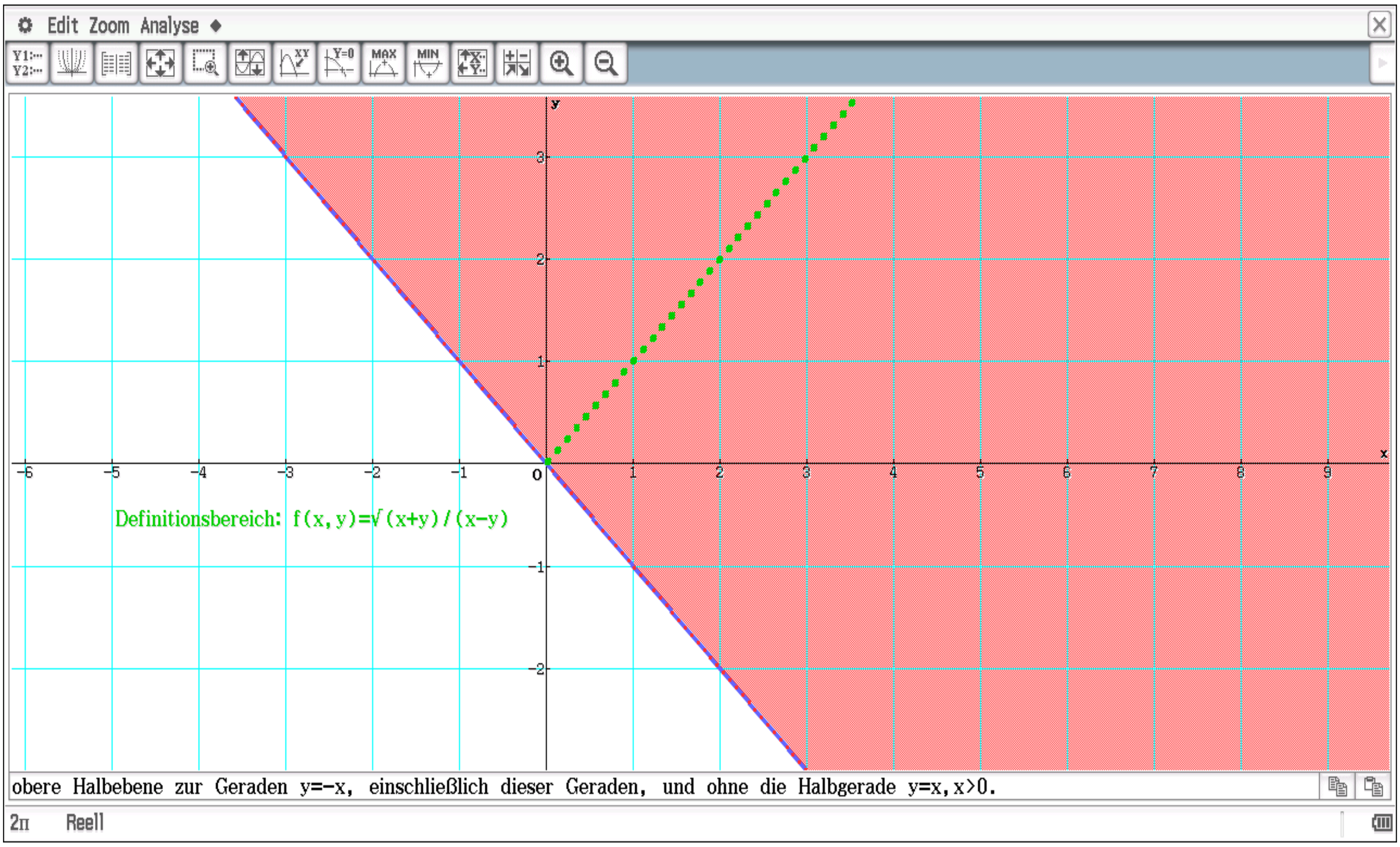
simplify(ans)

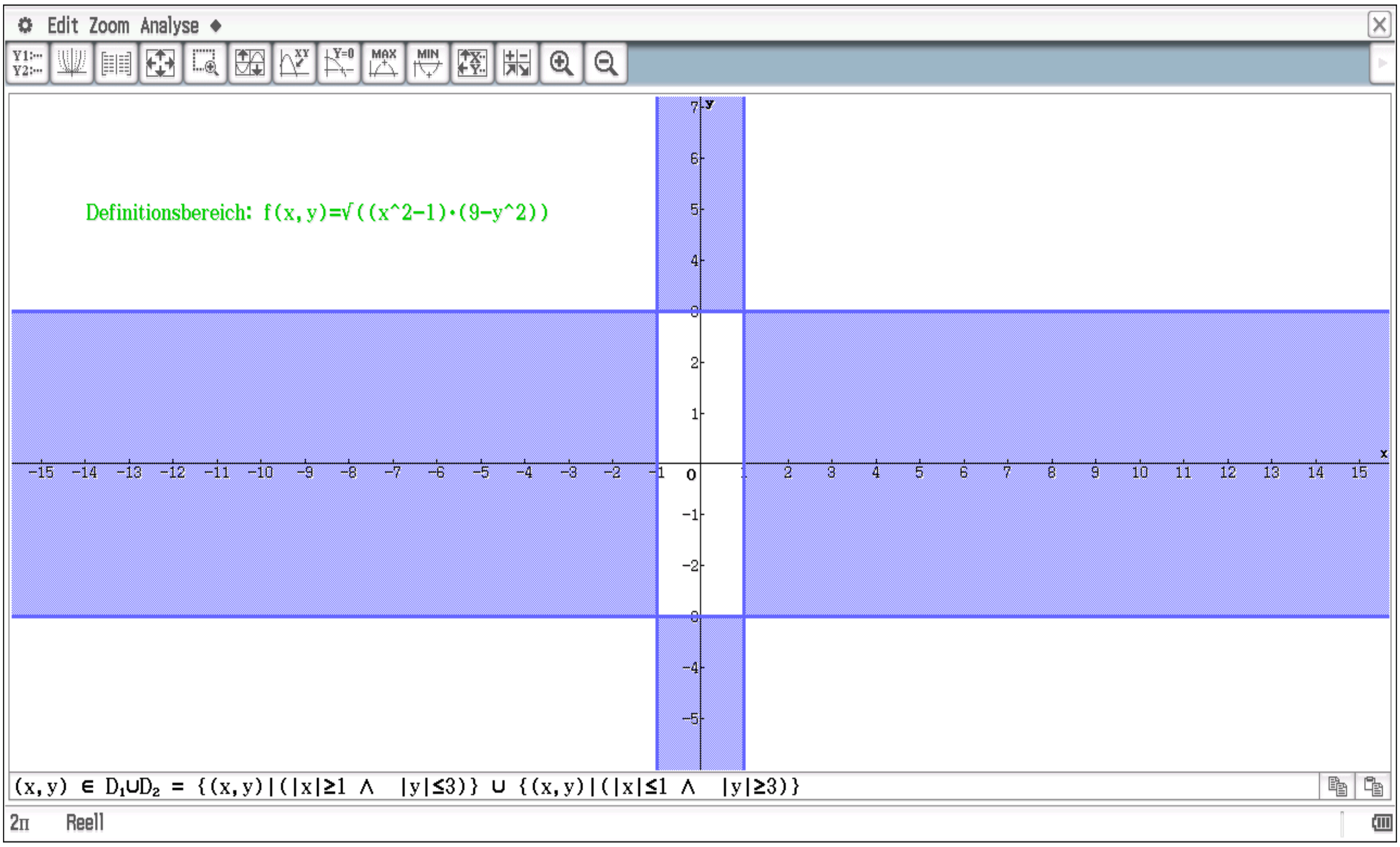
$$\left[\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(s+1)}{3} \quad \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(s-t+1)}{3} \quad \frac{-4\cdot t}{3}+1\right]$$

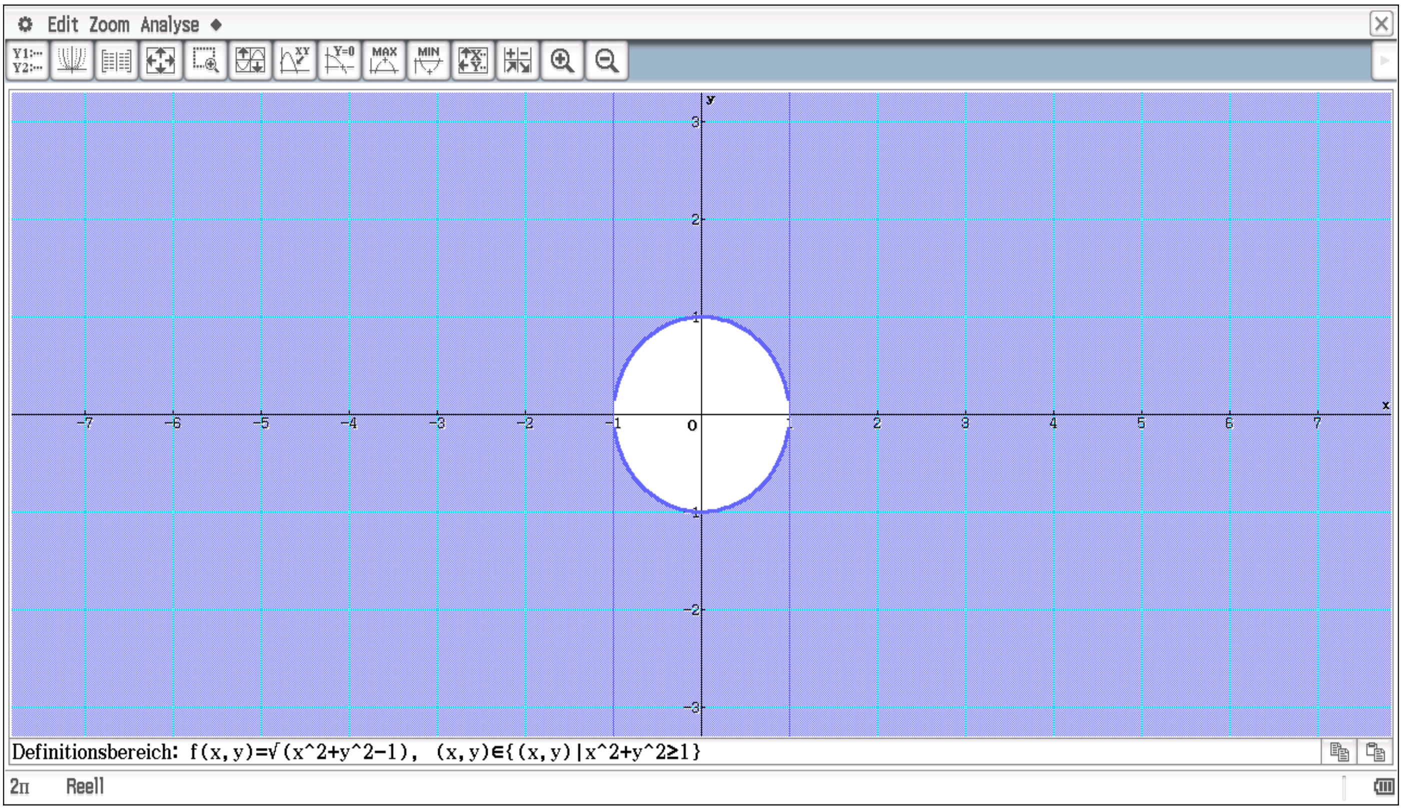
1. Integralrechnung und Differenzialrechnung mit CAS



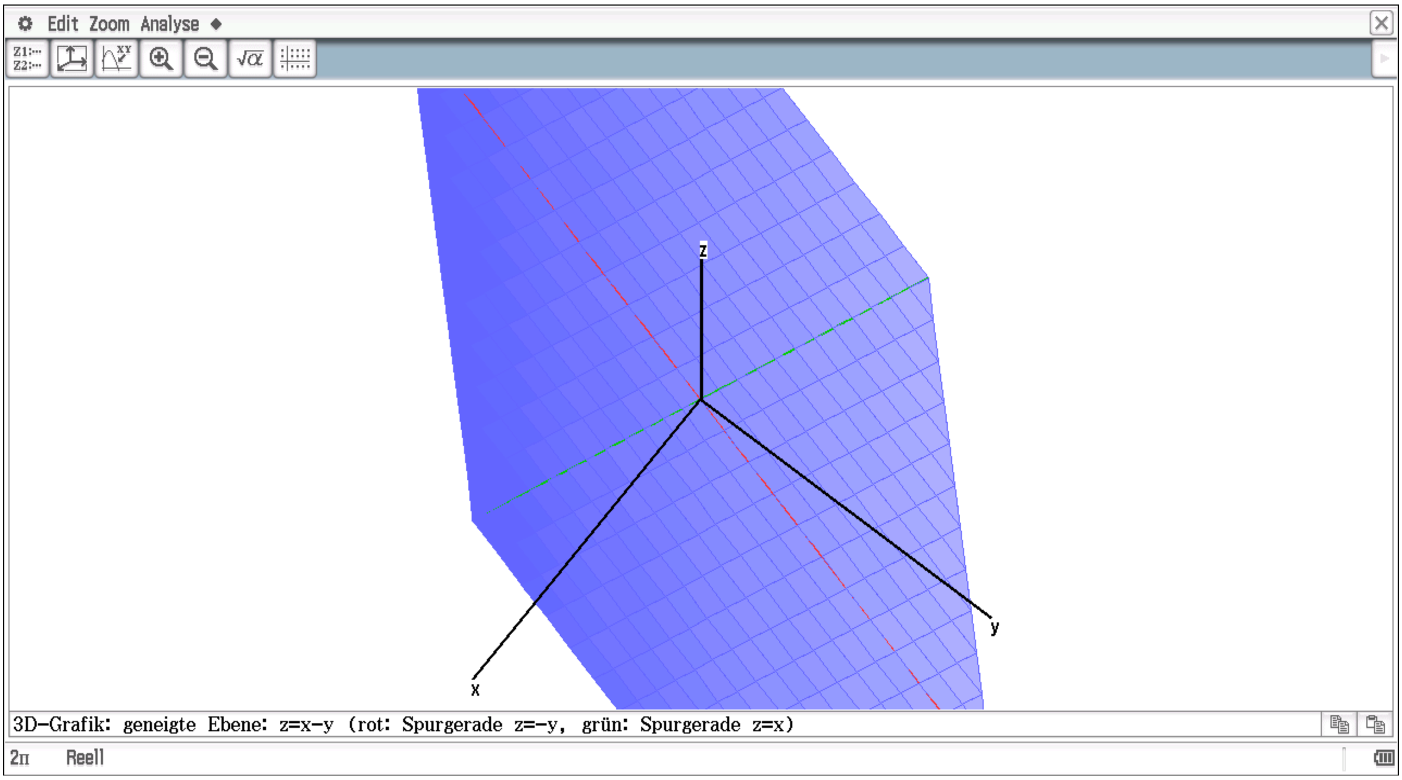
2. Funktionen von mehreren reellen Variablen



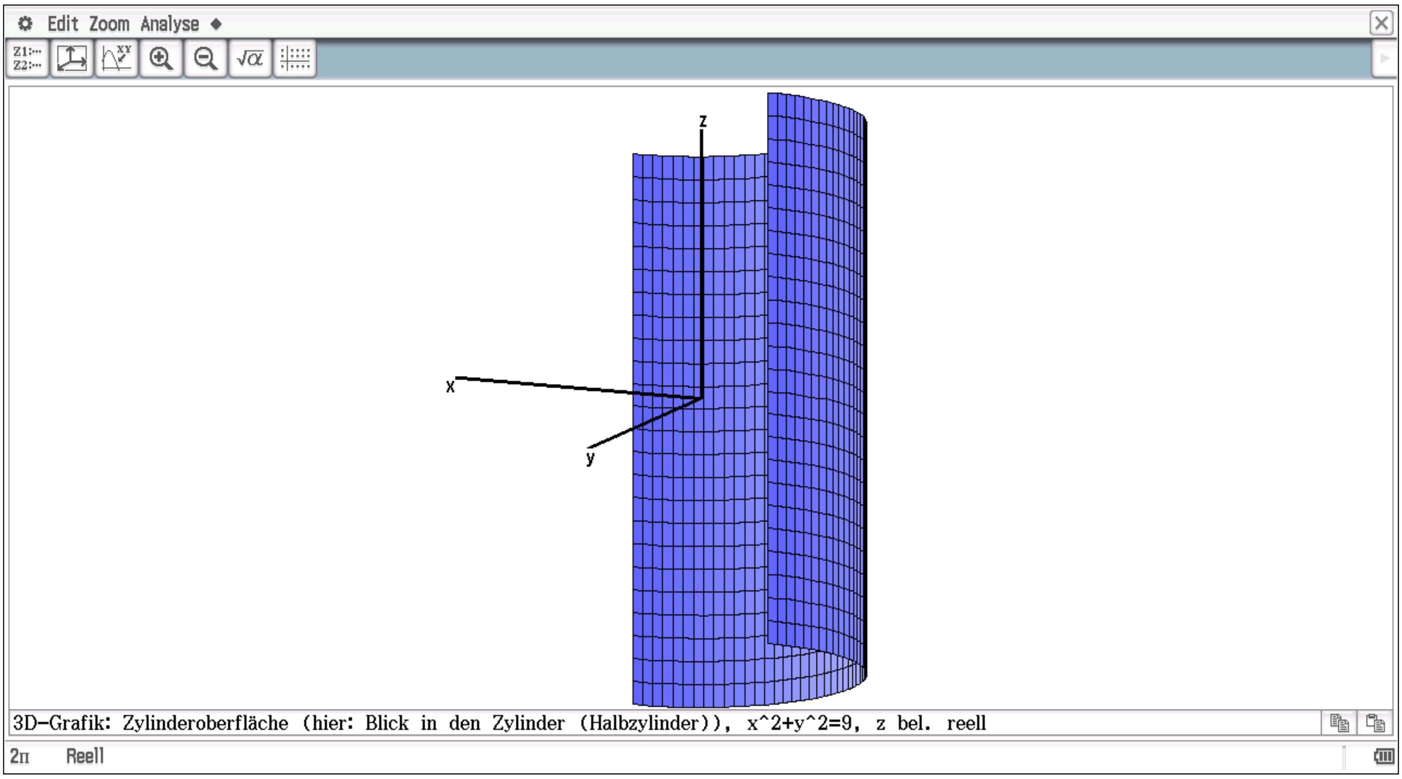


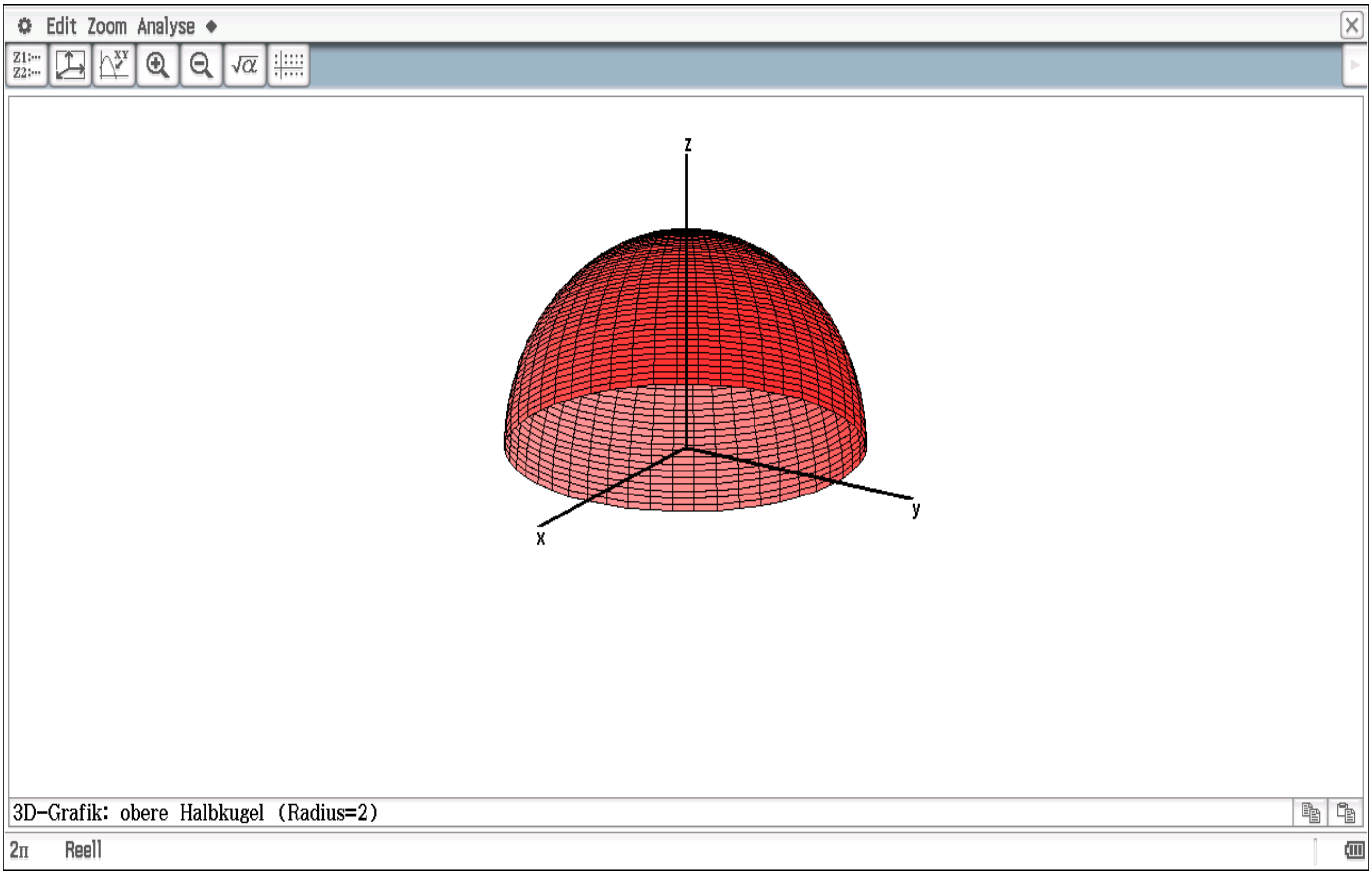


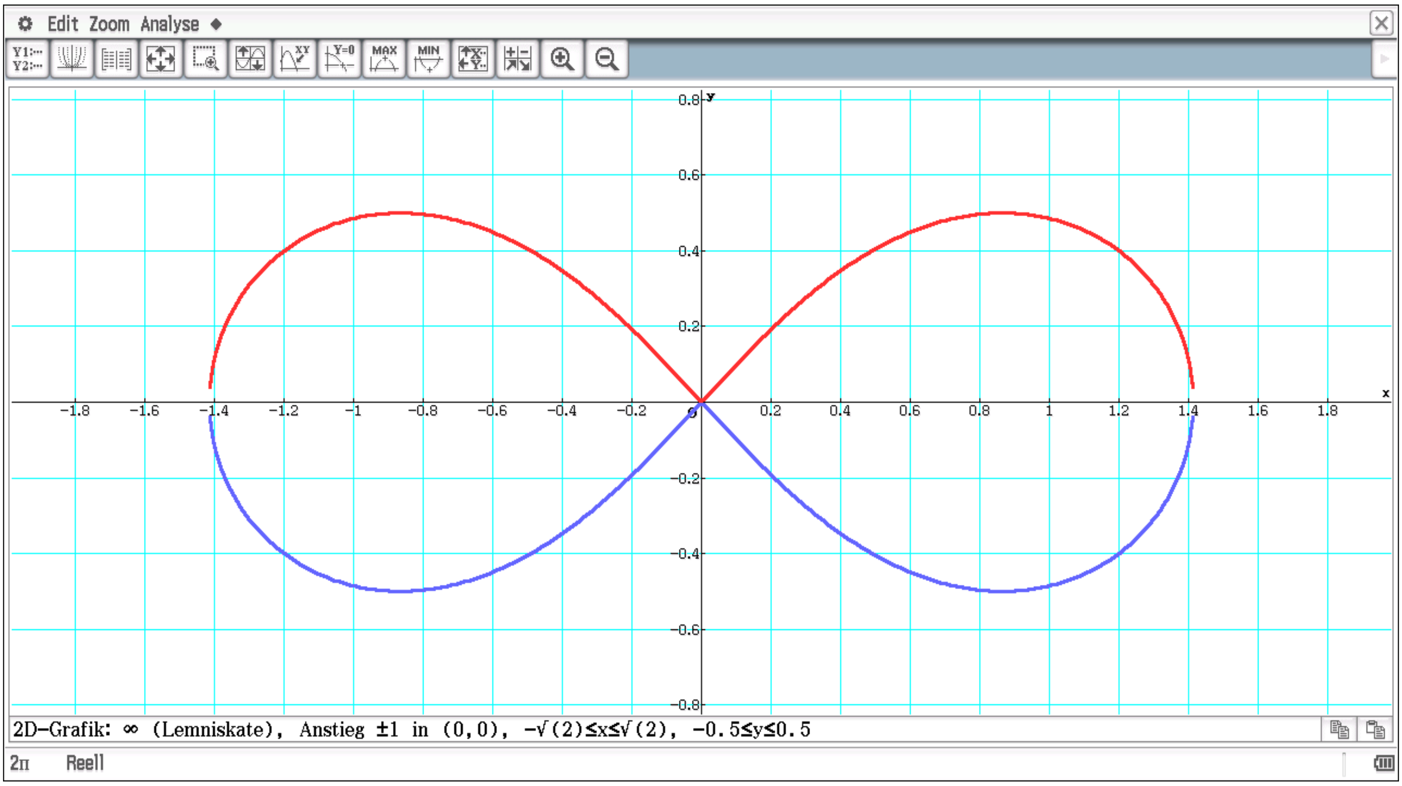
Definitionsbereich: f(x, y)=√(x^2+y^2−1), (x, y)∈{(x, y)|x^2+y^2≥1}

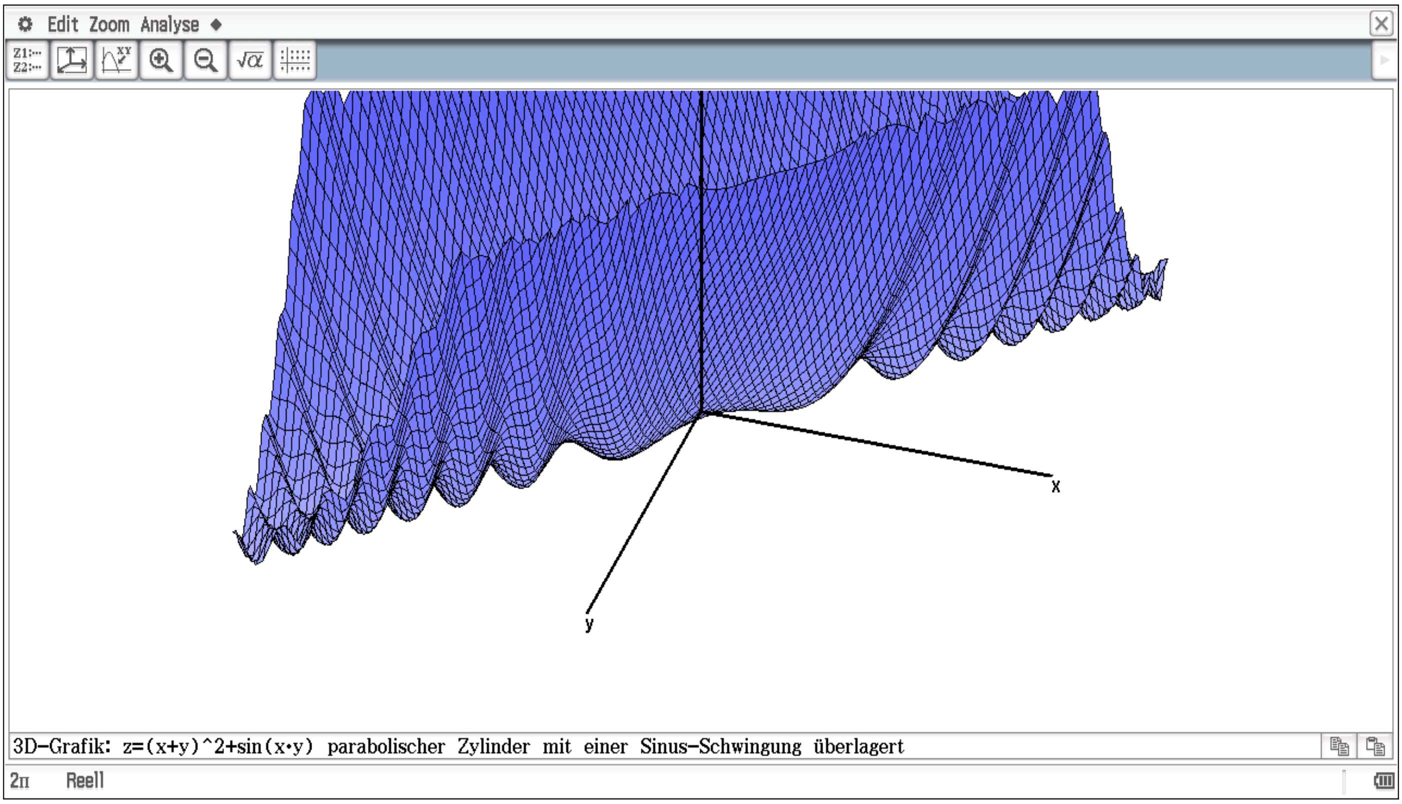


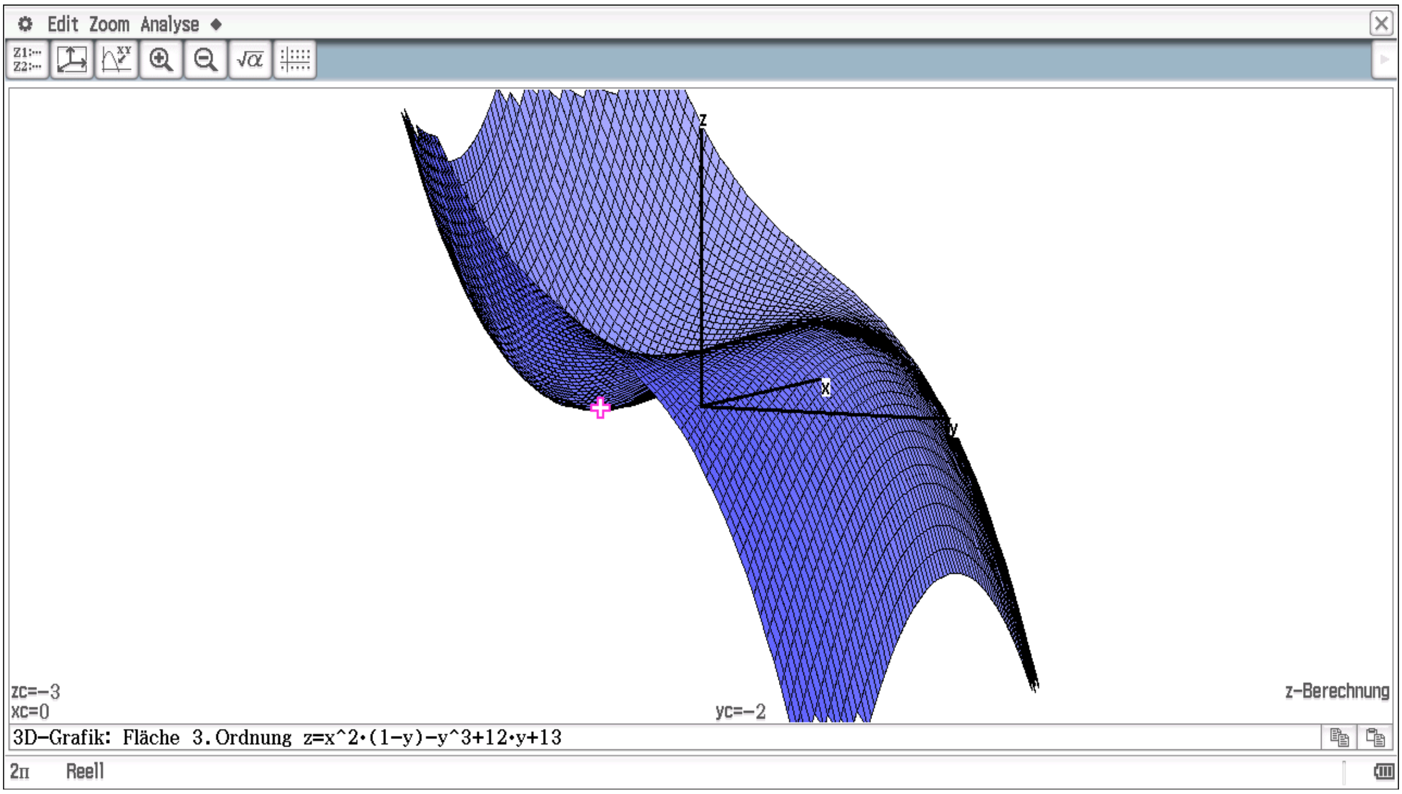
3D−Grafik: geneigte Ebene: z=x−y (rot: Spurgerade z=−y, grün: Spurgerade z=x)

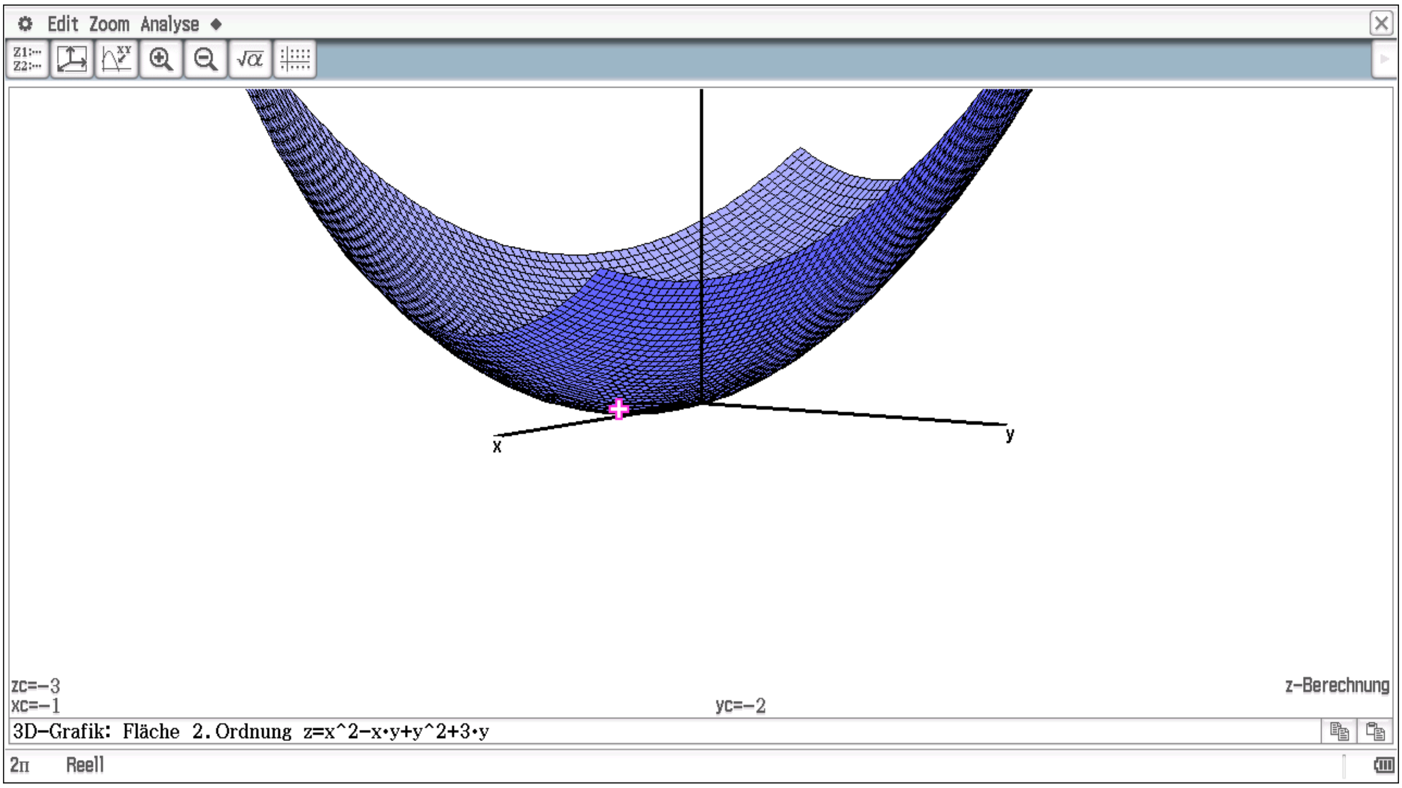

Edit Zoom Analyse
z
x
y
3D-Grafik: Zylinderoberfläche (hier: Blick in den Zylinder (Halbzylinder)), x^2+y^2=9, z bel. reell
2π Reell

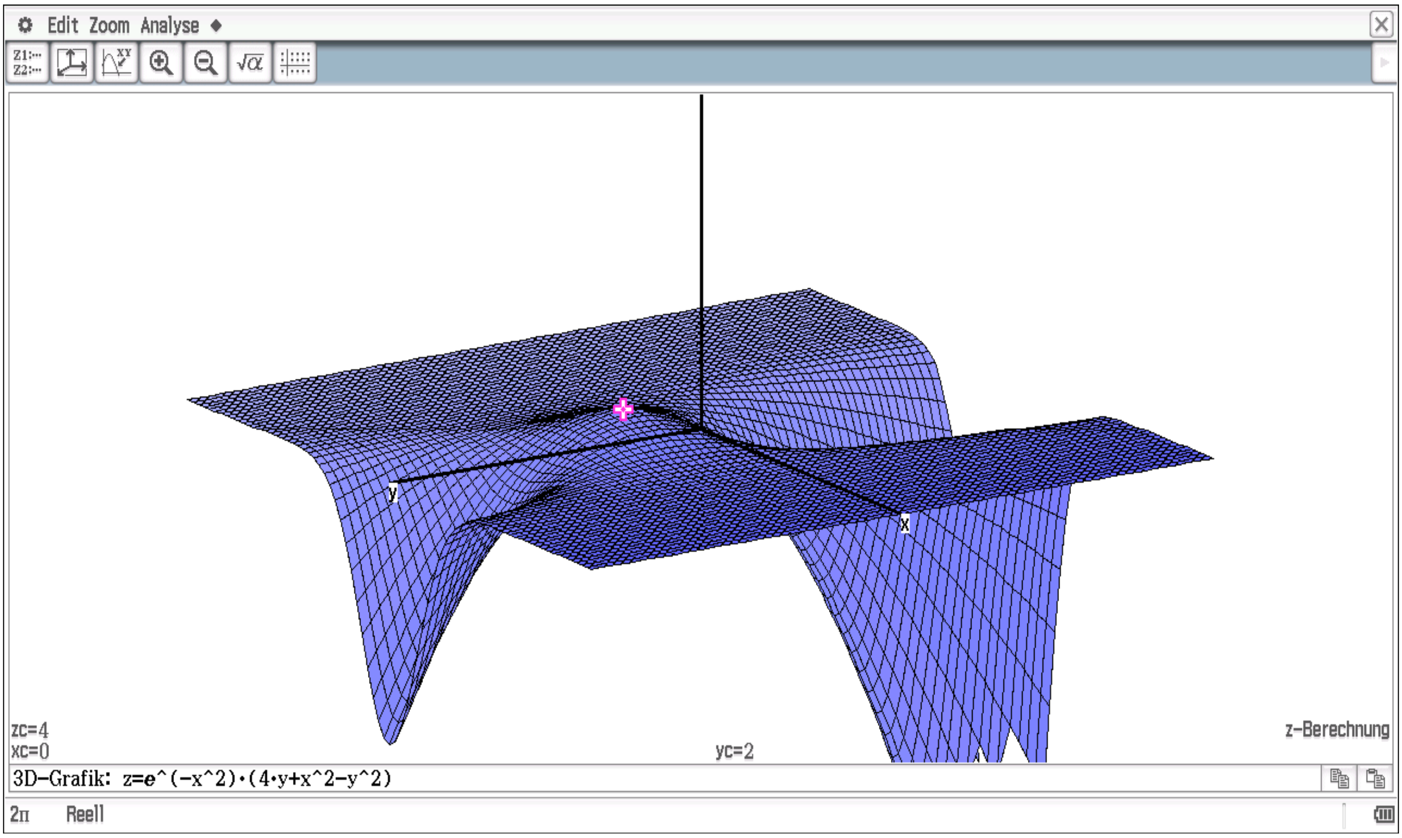

Edit Zoom Analyse
z
x
y
3D-Grafik: obere Halbkugel (Radius=2)
2π Reell

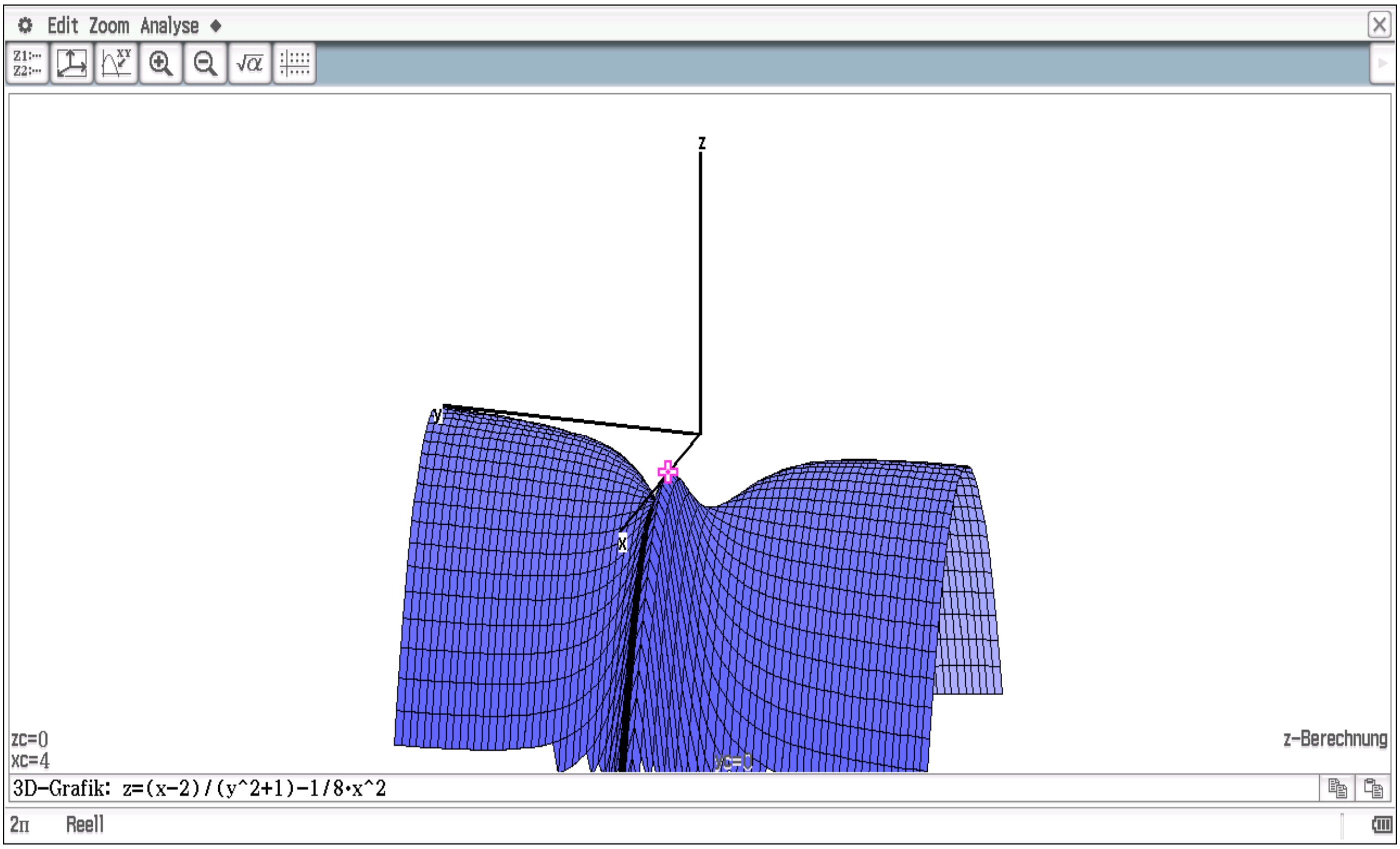

Edit Zoom Analyse
2D-Grafik: ∞ (Lemniskate), Anstieg ±1 in (0,0), −√(2)≤x≤√(2), −0.5≤y≤0.5
2π Reell

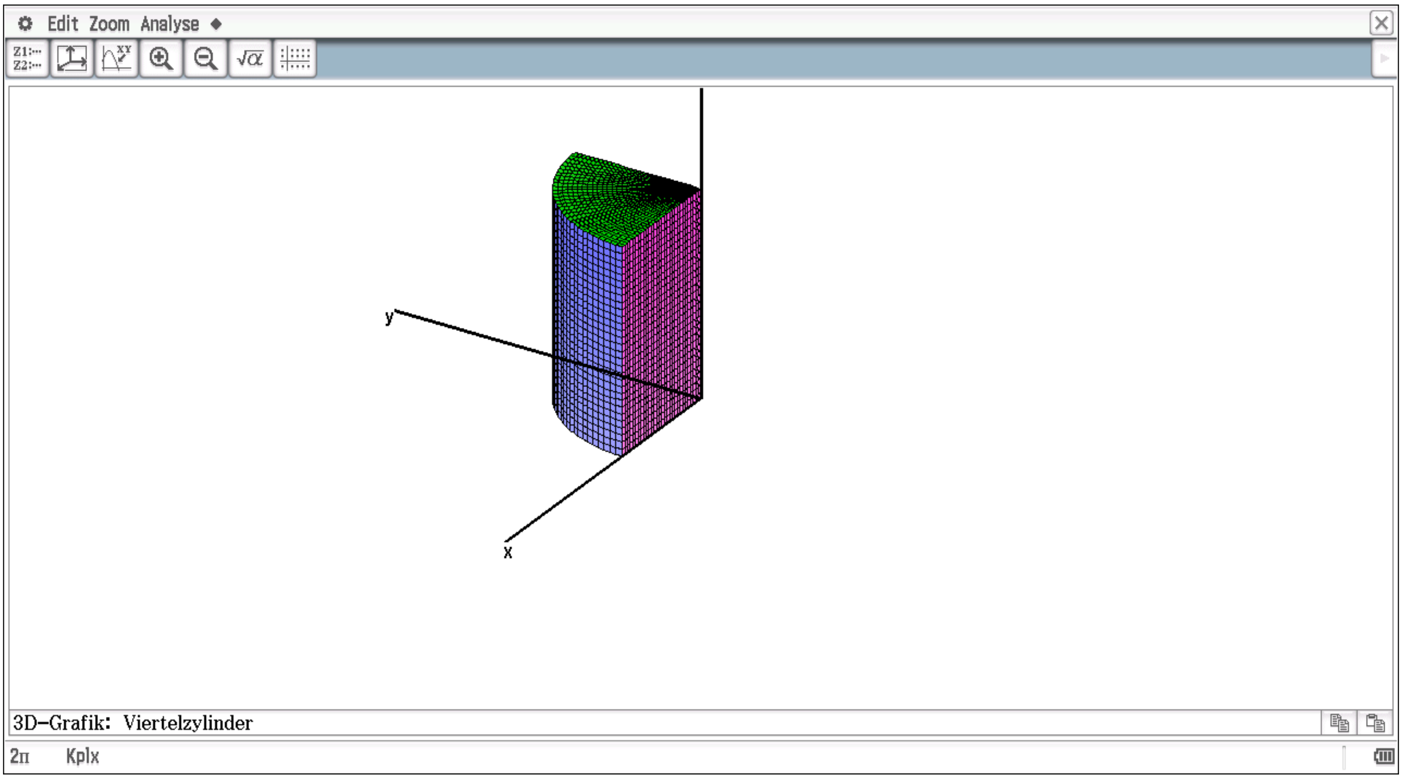

Edit Zoom Analyse
x
y
3D-Grafik: z=(x+y)^2+sin(x·y) parabolischer Zylinder mit einer Sinus-Schwingung überlagert
2π Reell

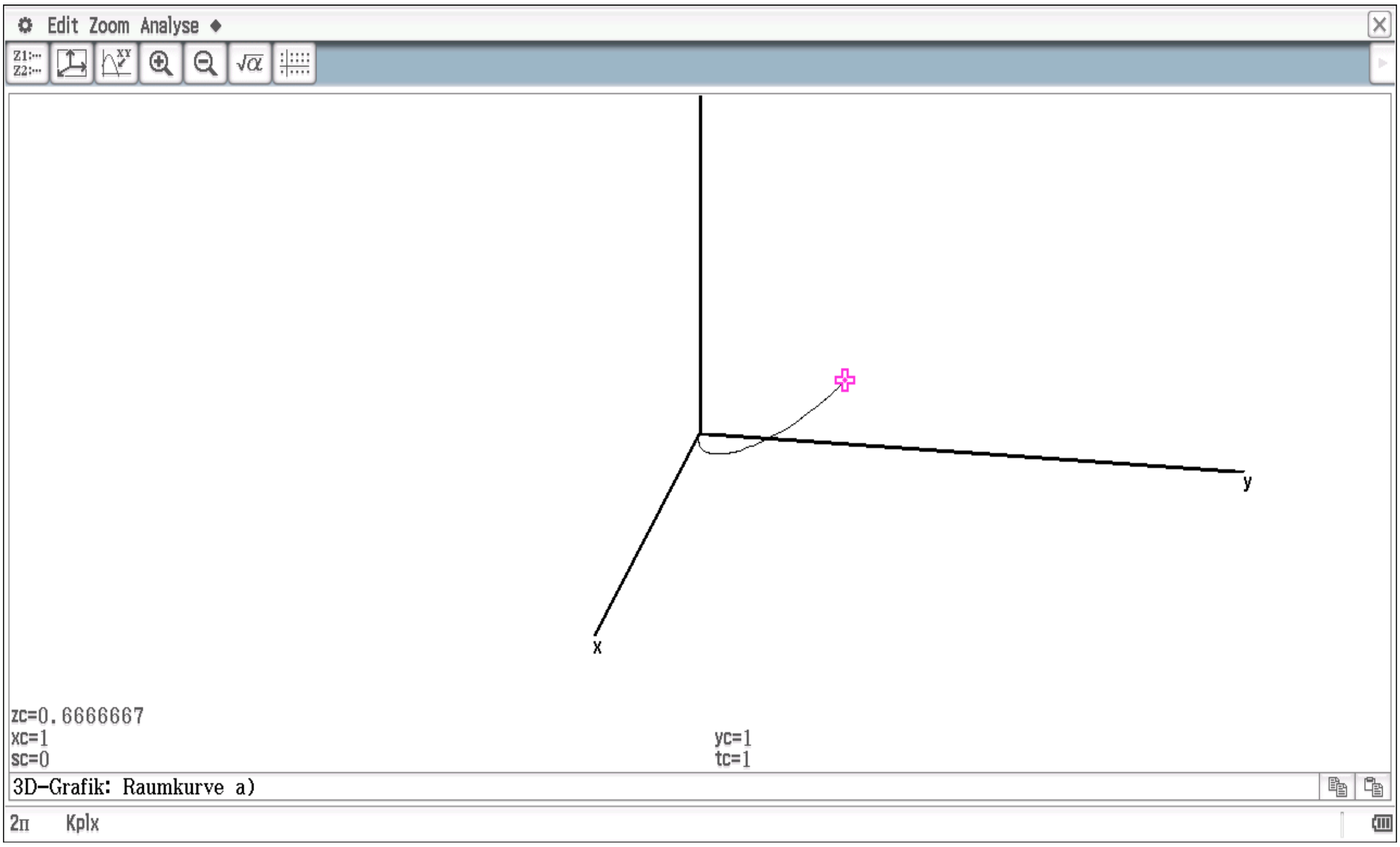

Edit Zoom Analyse
z
x
y
zc=−3
xc=0
yc=−2
z-Berechnung
3D-Grafik: Fläche 3.Ordnung z=x^2·(1−y)−y^3+12·y+13
2π Reell


Edit Zoom Analyse
x
y
zc=−3
xc=−1
yc=−2
z-Berechnung
3D-Grafik: Fläche 2.Ordnung z=x^2−x·y+y^2+3·y
2π Reell

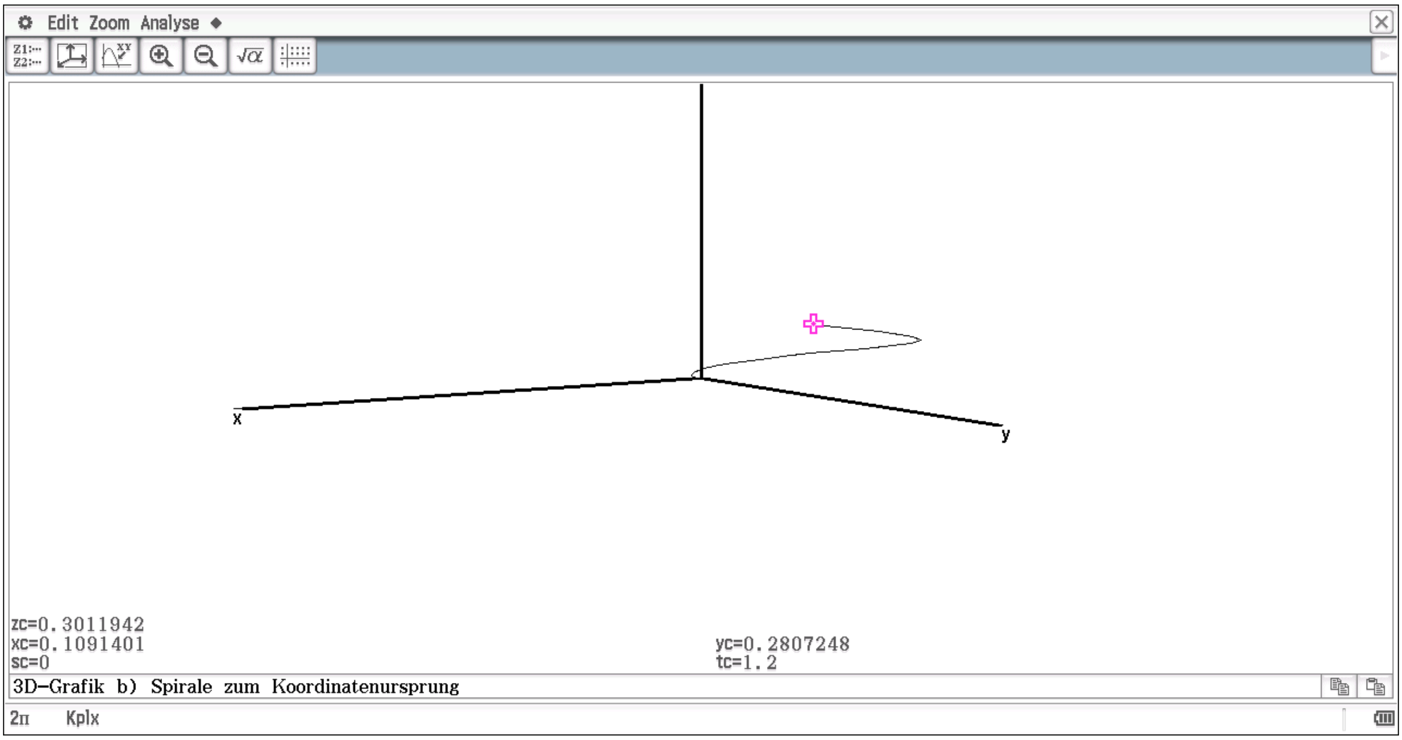

Edit Zoom Analyse
y
x
zc=4
xc=0
yc=2
z-Berechnung
3D-Grafik: z=e^(-x^2)·(4·y+x^2-y^2)
2π Reell


Edit Zoom Analyse
z
y
x
zc=0
xc=4
yc=0
z-Berechnung
3D-Grafik: z=(x-2)/(y^2+1)-1/8·x^2
2π Reell

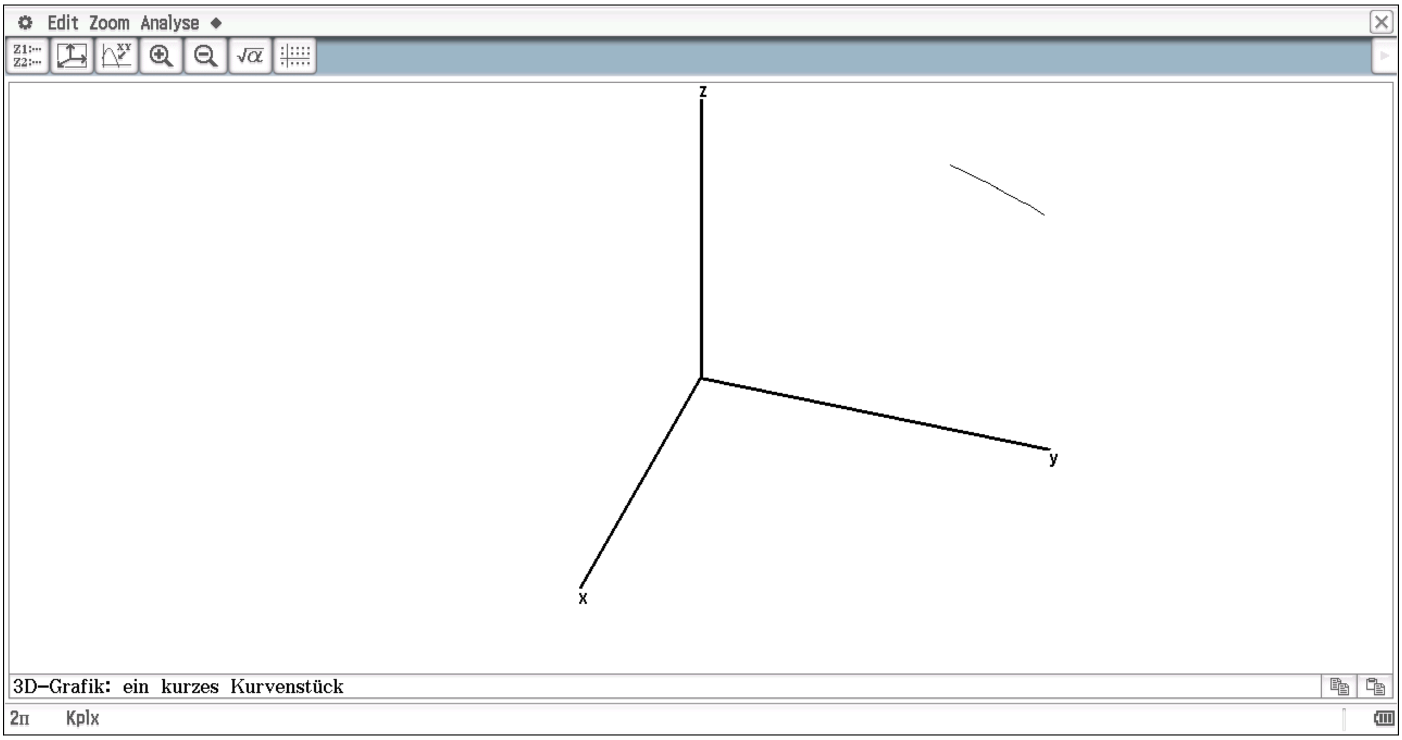




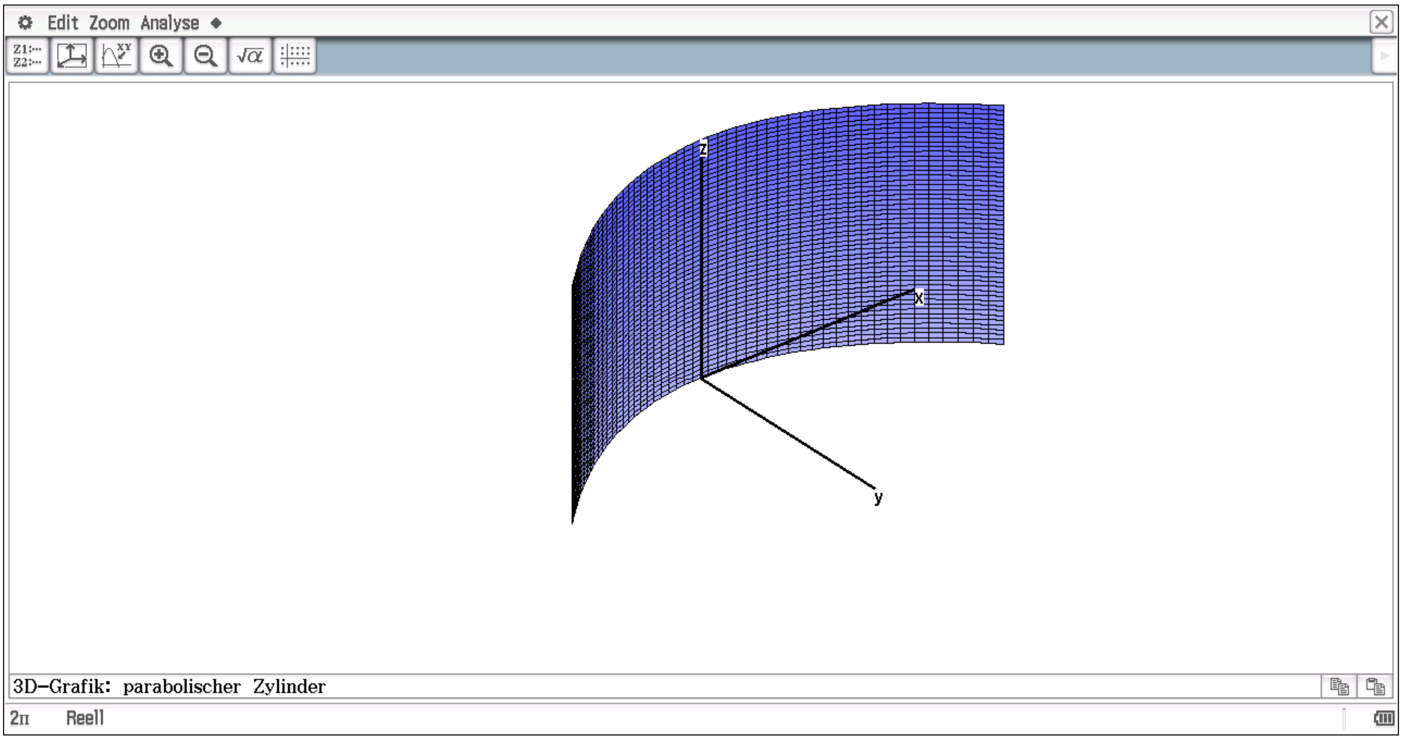
a) $x(t)=t$, $y(t)=t^2$, $z(t)=\frac{2}{3}t^3$, $0\leq t\leq 1$



b) $x(t)=e^{-t}\cos(t)$, $y(t)=e^{-t}\sin(t)$, $z(t)=e^{-t}$, $0<t<\infty$,

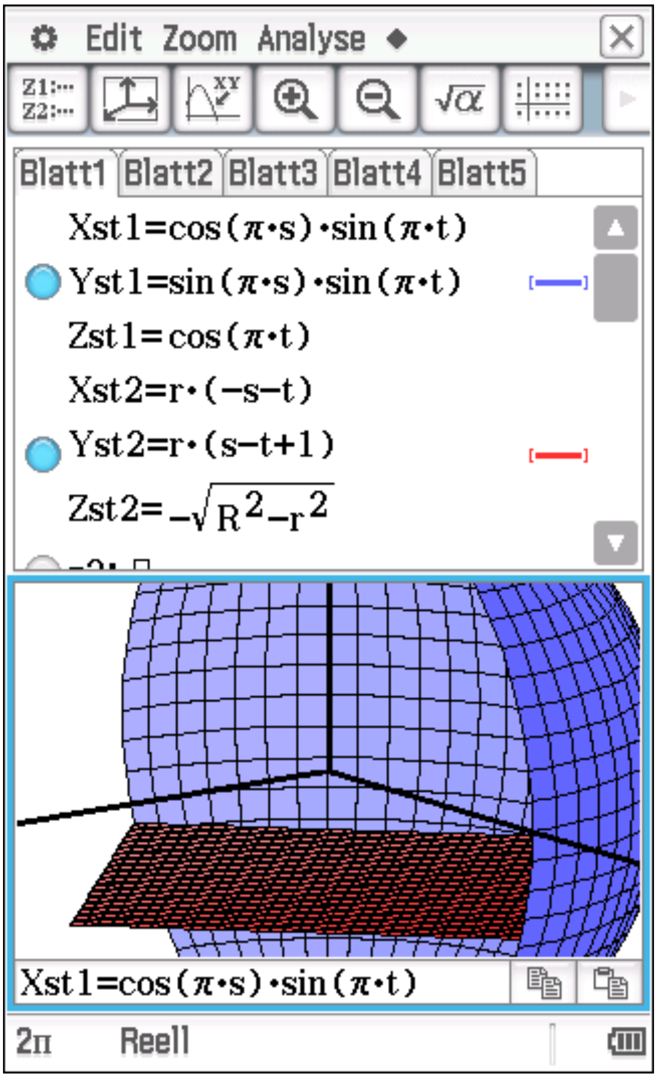


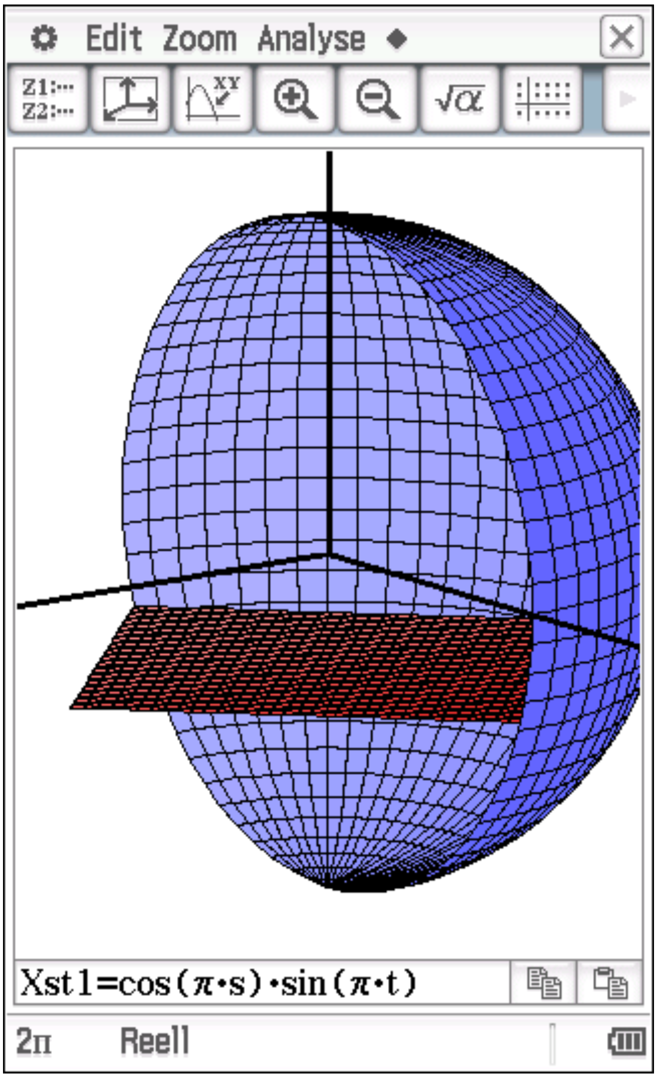
c) $x(t)=\ln(t)$, $y(t)=4\sqrt{t}\sin(\sqrt{t})$, $z(t)=4\sqrt{t}\cos(\sqrt{t})$, $\pi/6\le t\le\pi/2$.

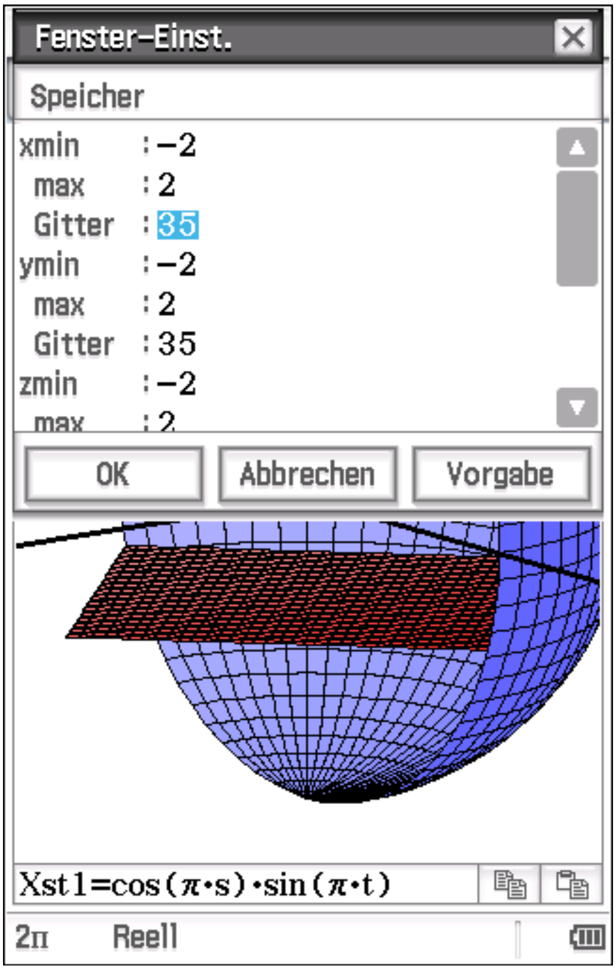


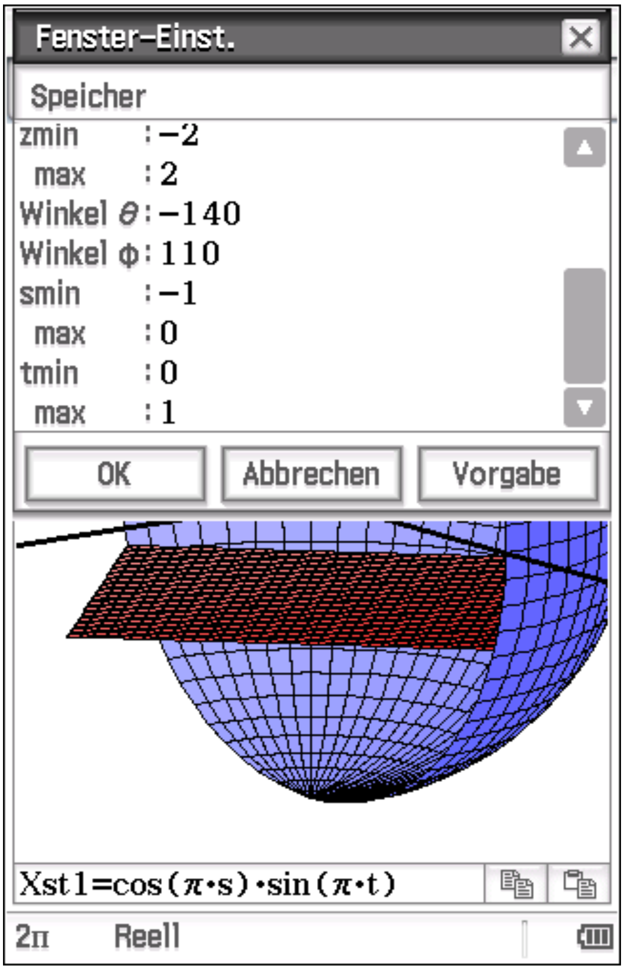
$x(u,v)=u$, $y(u,v)=u^2/6$, $z(u,v)=v$ mit $-3\le u\le 3$, $0\le v\le 6$,

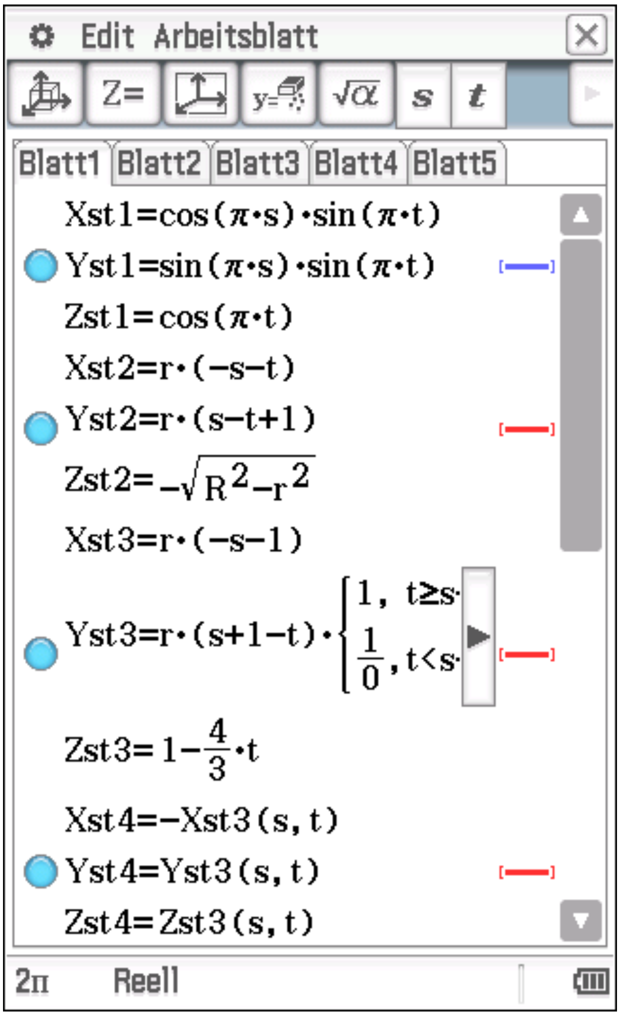
3D-Grafik

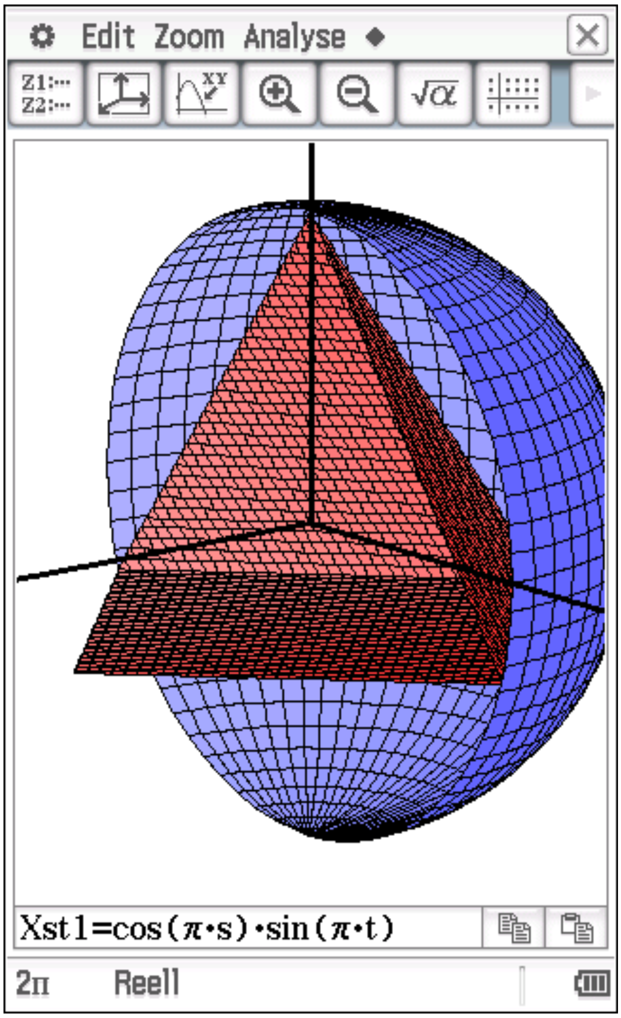





Fenster-Einst.
Speicher
xmin : −2
max : 2
Gitter : 35
ymin : −2
max : 2
Gitter : 35
zmin : −2
max : 2
OK
Abbrechen
Vorgabe
Xst1=cos(π·s)·sin(π·t)
2π
Reell


Fenster-Einst.
Speicher
zmin : −2
max : 2
Winkel θ : −140
Winkel φ : 110
smin : −1
max : 0
tmin : 0
max : 1
OK
Abbrechen
Vorgabe
Xst1=cos(π·s)·sin(π·t)
2π
Reell


Edit Arbeitsblatt
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=cos(π·s)·sin(π·t)
Yst1=sin(π·s)·sin(π·t)
Zst1=cos(π·t)
Xst2=r·(−s−t)
Yst2=r·(s−t+1)
Zst2=−√(R²−r²)
Xst3=r·(−s−1)
Yst3=r·(s+1−t)·{1, t≥s; 1/0, t<s}
Zst3=1−4/3·t
Xst4=−Xst3(s,t)
Yst4=Yst3(s,t)
Zst4=Zst3(s,t)
2π
Reell


Edit Zoom Analyse
Xst1=cos(π·s)·sin(π·t)
2π
Reell