Prof. Dr. L. Paditz, 14.11.2007 (korr.)

CASIO-Skript S.71 Aufg. 17.2

Lösung der Aufgabe A×z=b mithilfe des Austauschverfahrens im Main-Menü.
Vorbetrachtungen dazu im eActivity-Menü.

Download der benötigten Programme AVRank und LinEqSys:
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Rank_LinEqSys.zip

Die zip-Datei enthält Programme für den CP330, voyage200 und TI-89.

Vorbetrachtung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j} & 2 & t \\ 0 & 1 & 2\mathbf{j} \\ s & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j} & 2 & t \\ 0 & 1 & 2\cdot\mathbf{j} \\ s & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+2\mathbf{j} \\ 1+\mathbf{j} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot\mathbf{j}+3 \\ \mathbf{j}+1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

det(A)

$$4\cdot s\cdot \mathbf{j}+4\cdot \mathbf{j}-s\cdot t$$

Falls det(A)≠0 ist, haben wir eine eindeutige Lösung

für A×z=b mit $z=\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{bmatrix}$:

solve(det(A)=0,s)

$$\left\{s=\frac{-4\cdot \mathbf{j}}{4\cdot \mathbf{j}-t}\right\}$$

Sei also $s\neq\frac{-4\cdot \mathbf{j}}{4\cdot \mathbf{j}-t}$, dann

$\text{simplify}\left(A^{-1}\times b\right)\Rightarrow\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{-4\cdot \mathbf{j}+4+t}{4\cdot s\cdot \mathbf{j}+4\cdot \mathbf{j}-s\cdot t} \\ \frac{-((-6\cdot \mathbf{j}+4)\cdot s+(\mathbf{j}+1)\cdot s\cdot t-4\cdot \mathbf{j}+6)}{4\cdot s\cdot \mathbf{j}+4\cdot \mathbf{j}-s\cdot t} \\ \frac{-(\mathbf{j}+s)}{4\cdot s\cdot \mathbf{j}+4\cdot \mathbf{j}-s\cdot t} \end{bmatrix}$$

Anmerkung:

Falls t=4**j** gilt (s beliebig), ist A ebenfalls regulär:

det(A|t=4**j**)

$$4\cdot \mathbf{j}$$

Betrachtung des Falles det(A)=0 mit $s=\frac{-4\cdot \mathbf{j}}{4\cdot \mathbf{j}-t}$

(t≠4**j**):

Lösbarkeit mit dem Rangkriterium:

rank(A)=rank(A,b)<3 (mehrdeutige Lösung) bzw.
rank(A)<rank(A,b)=rank(A)+1 (Widerspruch)

rank(A)

3

rank(augment(A,b))

3

$\text{rank}\left(A|s=\frac{-4\cdot \mathbf{j}}{4\cdot \mathbf{j}-t}\right)$

2

$\text{rank}\left(\text{augment}(A,b)|s=\frac{-4\cdot \mathbf{j}}{4\cdot \mathbf{j}-t}\right)$

3

rank(augment(A,b)|s=−**j** and t=4×(**j**−1))

2

Feststellung:
der rank-Befehl ist im CAS ungeeignet!

Nutzung des Austauschverfahrens zur Rangbestimmung (Anzahl der Austauschschritte = Rang der betrachteten Matrix):
Verfahren mit Zeilen- und Spaltentilgung

Nutzung des Austauschverfahrens zur Lösung des LGS: Verfahren mit Spaltentilgung

Nun:
Wechsel in das Programm-Menü, da innerhalb einer eActivity die im Programm-Menü abgelegten Programme nicht nutzbar sind (eActivity verbietet Eigenprogrammierung)

Die benutzten Quelltexte der Programme (Parameterliste beachten, Ergebnis matnew) sind:

```
Edit Strg I/O Vers.
AVRank    N Matrix,Pivotrow,Pivotcol
"© Ludwig Paditz 2006"
Local mat1,mat11,mat111,Hrow,Pcolumn,dimlist,nrow,mcolumn,i,k,a,6
Matrix⇒mat1
Pivotrow⇒i
Pivotcol⇒k
trn(listToMat(matToList(trn(mat1),i)))/(-mat1[i,k])⇒Hrow
listToMat(matToList(mat1,k))⇒Pcolumn
dim(mat1)⇒dimlist
dimlist[1]⇒nrow
dimlist[2]⇒mcolumn
mat1+Pcolumn×Hrow⇒mat1
If k>1 and k<mcolumn
Then
Augment(subMat(mat1,1,1,nrow,k-1),subMat(mat1,1,k+1,nrow,mcolumn))⇒mat11
ElseIf k=1
Then
subMat(mat1,1,k+1,nrow,mcolumn)⇒mat11
Else
subMat(mat1,1,1,nrow,k-1)⇒mat11
Programm-Editor
```

```
Edit Strg I/O Vers.
AVRank    N Matrix,Pivotrow,Pivotcol
IfEnd
If i>1 and i<nrow
Then
trn(Augment(trn(subMat(mat11,1,1,i-1,mcolumn-1)),trn(subMat(mat11,i+1,1,nrow,mcolu
mn-1))))⇒mat111
ElseIf i=1
Then
subMat(mat11,i+1,1,nrow,mcolumn-1)⇒mat111
Else
subMat(mat11,1,1,nrow-1,mcolumn-1)⇒mat111
IfEnd
For 1⇒6 To mcolumn-1 Step 1
For 1⇒a To nrow-1 Step 1
simplify(mat111[a,6])⇒mat111[a,6]
Next
Next
mat111⇒matnew
matnew
Stop
Programm-Editor
```

```
Edit Strg I/O Vers.
LinEqSys    N Matrix,Pivotrow,Pivotcol
"© Ludwig Paditz 2006"
Local mat1,mat11,Hrow,Pcolumn,dimlist,nrow,mcolumn,a,6,i,k
Matrix⇒mat1
Pivotrow⇒i
Pivotcol⇒k
trn(listToMat(matToList(trn(mat1),i)))/(-mat1[i,k])⇒Hrow
listToMat(matToList(mat1,k))⇒Pcolumn
dim(mat1)⇒dimlist
dimlist[1]⇒nrow
dimlist[2]⇒mcolumn
mat1+Pcolumn×Hrow⇒mat1
For 1⇒6 To mcolumn Step 1
Hrow[1,6]⇒mat1[i,6]
Next
If k>1 and k<mcolumn
Then
Augment(subMat(mat1,1,1,nrow,k-1),subMat(mat1,1,k+1,nrow,mcolumn))⇒mat11
ElseIf k=1
Then
subMat(mat1,1,k+1,nrow,mcolumn)⇒mat11
Else
subMat(mat1,1,1,nrow,k-1)⇒mat11
IfEnd
For 1⇒6 To mcolumn-1 Step 1
For 1⇒a To nrow Step 1
simplify(mat11[a,6])⇒mat11[a,6]
Next:Next
mat11⇒matnew
matnew
Stop
Programm-Editor
```

"Nutzung des ATV zur Rangbestimmung im Main-Menü"

"Nutzung des ATV zur Rangbestimmung im Main-Menü"

augment(A,b)⇒ST

$$\begin{bmatrix} j & 2 & t & 2\cdot j+3 \\ 0 & 1 & 2\cdot j & j+1 \\ s & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

AVRank(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\cdot j & j+1 \\ 2\cdot s\cdot j & s\cdot t\cdot j+4 & (3\cdot j-2)\cdot s-1 \end{bmatrix}$$

AVRank(T1,1,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4 & s\cdot j-1 \end{bmatrix}$$

solve({4·s+s·t·j+4=0,s·j−1=0},{s,t})

$$\{s=-j, t=4\cdot j-4\}$$

"T2=ET, mehrd. Lös. möglich, rank(A)=rank(A,b)=2"

"T2=ET, mehrd. Lös. möglich, rank(A)=rank(A,b)=2"

"Nutzung des ATV zur Lösung des LGS"

"Nutzung des ATV zur Lösung des LGS"

augment(A,−b)⇒ST

$$\begin{bmatrix} j & 2 & t & -2\cdot j-3 \\ 0 & 1 & 2\cdot j & -j-1 \\ s & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 2\cdot j & t\cdot j & -3\cdot j+2 \\ 1 & 2\cdot j & -j-1 \\ 2\cdot s\cdot j & s\cdot t\cdot j+4 & (-3\cdot j+2)\cdot s+1 \end{bmatrix}$$

"   Seite 5 "

LinEqSys(T1,2,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} t\cdot \mathbf{j}+4 & -\mathbf{j} \\ -2\cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}+1 \\ 4\cdot s+s\cdot t\cdot \mathbf{j}+4 & -s\cdot \mathbf{j}+1 \end{bmatrix}$$

"mehrd. Lös. aus T2=ET ablesbar, "

"mehrd. Lös. aus T2=ET ablesbar, "

" falls 3.Zeile eine Nullzeile ist. "

" falls 3.Zeile eine Nullzeile ist. "

T2|s=−**j** and t=4·**j**−4

$$\begin{bmatrix} -4\cdot \mathbf{j} & -\mathbf{j} \\ -2\cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4\cdot \mathbf{j}\times w-\mathbf{j} \\ -2\cdot \mathbf{j}\times w+\mathbf{j}+1 \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4\cdot w\cdot \mathbf{j}-\mathbf{j} \\ -2\cdot w\cdot \mathbf{j}+\mathbf{j}+1 \\ w \end{bmatrix}$$

"Endergebnis: $\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{bmatrix} = w\times \begin{bmatrix} -4\cdot \mathbf{j} \\ -2\cdot \mathbf{j} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{j} \\ \mathbf{j}+1 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit w∈C"

"Endergebnis: [[z1],[z2],[z3]]=w×[[−4·**j**],[−2·**j**], ▸

""

""

""

""

""

""

Prof. Dr. L. Paditz, 15.11.2007 (Zusatz)

CASIO-Skript S.71 Aufg. 17.2

Untersuchung der Aufgabe A×z=b mithilfe der vorhandenen Befehle im eActivity-Menü:

$$\begin{bmatrix} j & 2 & t \\ 0 & 1 & 2j \\ s & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} j & 2 & t \\ 0 & 1 & 2\cdot j \\ s & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+2j \\ 1+j \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot j+3 \\ j+1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Falls det(A)≠0 gilt, ist das LGS eindeutig lösbar wie folgt:

1. Cramersche Regel:

$$\frac{\det\left(\begin{bmatrix} 3+2j & 2 & t \\ 1+j & 1 & 2j \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} \Rightarrow z_1$$

$$\frac{-4\cdot j+4+t}{4\cdot s\cdot j+4\cdot j-s\cdot t}$$

$$\frac{\det\left(\begin{bmatrix} j & 3+2j & t \\ 0 & 1+j & 2j \\ s & -1 & 4 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} \Rightarrow z_2$$

$$\frac{-((-6\cdot j+4)\cdot s+(j+1)\cdot s\cdot t-4\cdot j+6)}{4\cdot s\cdot j+4\cdot j-s\cdot t}$$

$$\frac{\det\left(\begin{bmatrix} j & 2 & 3+2j \\ 0 & 1 & 1+j \\ s & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} \Rightarrow z_3$$

$$\frac{-(j+s)}{4\cdot s\cdot j+4\cdot j-s\cdot t}$$

2. mit inverser Matrix A^{-1}:

$$\text{simplify}(A^{-1}*b) \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-4\cdot j+4+t}{4\cdot s\cdot j+4\cdot j-s\cdot t} \\ \frac{-((-6\cdot j+4)\cdot s+(j+1)\cdot s\cdot t-4\cdot j+6)}{4\cdot s\cdot j+4\cdot j-s\cdot t} \\ \frac{-(j+s)}{4\cdot s\cdot j+4\cdot j-s\cdot t} \end{bmatrix}$$

3. LGS in Einzelgleichungen betrachten:

DelVar z_1, z_2, z_3

done

$$\left\{\begin{array}{l} j*z_1+2*z_2+t*z_3=3+2j \\ 0*z_1+1*z_2+2j*z_3=1+j \\ s*z_1+0*z_2+4*z_3=-1 \end{array}\right|_{z_1,z_2,z_3}$$

$$\left\{z_1=\frac{-(-4\cdot j+4+t)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4},z_2=\frac{((-6\cdot j+4)\cdot s+(j+1)\cdot s\cdot t-4\cdot j+6}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4}\right.\blacktriangleright$$

listToMat(getRight(simplify(ans)))

$$\begin{bmatrix} \frac{-(t\cdot j+4\cdot j+4)}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \\ \frac{(4\cdot j+6)\cdot s+(j-1)\cdot s\cdot t+6\cdot j+4}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \\ \frac{(j+s)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \end{bmatrix}$$

4. mit dem solve-Befehl:

DelVar z_1,z_2,z_3

done

solve({$j*z_1+2*z_2+t*z_3=3+2j,0*z_1+1*z_2+2j*z_3=1+j,s*:$▸

$$\left\{z_1=\frac{-(-4\cdot j+4+t)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4},z_2=\frac{((-6\cdot j+4)\cdot s+(j+1)\cdot s\cdot t-4\cdot j+6}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4}\right.\blacktriangleright$$

listToMat(getRight(simplify(ans)))

$$\begin{bmatrix} \frac{-(t\cdot j+4\cdot j+4)}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \\ \frac{(4\cdot j+6)\cdot s+(j-1)\cdot s\cdot t+6\cdot j+4}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \\ \frac{(j+s)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \end{bmatrix}$$

5. mit dem rref-Befehl:

rref(augment(A,b))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-(t\cdot j+4\cdot j+4)}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(16\cdot j+24)\cdot s+(4\cdot j-4)\cdot s\cdot t+24\cdot j+16}{2\cdot(8\cdot s+2\cdot s\cdot t\cdot j+8)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(j+s)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(t\cdot j+4\cdot j+4)}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \\ \frac{(16\cdot j+24)\cdot s+(4\cdot j-4)\cdot s\cdot t+24\cdot j+16}{2\cdot(8\cdot s+2\cdot s\cdot t\cdot j+8)} \\ \frac{(j+s)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \end{bmatrix}$$

subMat(ans,1,4,3,4) $\rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{-(t\cdot j+4\cdot j+4)}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \\ \frac{(16\cdot j+24)\cdot s+(4\cdot j-4)\cdot s\cdot t+24\cdot j+16}{2\cdot(8\cdot s+2\cdot s\cdot t\cdot j+8)} \\ \frac{(j+s)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \end{bmatrix}$$

Anmerkung: z_2 wird ungekürzt ausgegeben.

6. mit dem ref-Befehl (Rückrechnung notwendig):

DelVar z_1,z_2,z_3

done

ref(augment(A,b))

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\cdot j & -t\cdot j & -3\cdot j+2 \\ 0 & 1 & \frac{-2\cdot j}{s}+\frac{t}{2} & \frac{j}{2\cdot s}+j+\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(j+s)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\cdot j & -t\cdot j \\ 0 & 1 & \frac{-2\cdot j}{s}+\frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\cdot j+2 \\ \frac{j}{2\cdot s}+j+\frac{3}{2} \\ \frac{(j+s)\cdot j}{4\cdot s+s\cdot t\cdot j+4} \end{bmatrix}$$

7. Lösung im Fall det(A)=0:

solve(det(A)=0,s)

$$\left\{ s=\frac{-4\cdot j}{4\cdot j-t} \right\}$$

rref(augment(A,b)|$s=\frac{-4\cdot j}{4\cdot j-t}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -t\cdot j-4 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cdot j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ref(augment(A,b)|$s=\frac{-4\cdot j}{4\cdot j-t}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\cdot j & -t\cdot j & -3\cdot j+2 \\ 0 & 1 & 2\cdot j & \frac{4\cdot j+12+t}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnismatrizen sind widerspruchsvoll, d.h. mehrdeutige Lösung wird nicht erkannt.

solve(det(A)=0,t)

$$\left\{t=\frac{4\cdot \mathbf{j}}{s}+4\cdot \mathbf{j}\right\}$$

rref(augment(A,b)|$t=\frac{4\cdot \mathbf{j}}{s}+4\cdot \mathbf{j}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{s} & 0 \\ 0 & 1 & 2\cdot \mathbf{j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ref(augment(A,b)|$t=\frac{4\cdot \mathbf{j}}{s}+4\cdot \mathbf{j}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\cdot \mathbf{j} & 4+\frac{4}{s} & -3\cdot \mathbf{j}+2 \\ 0 & 1 & 2\cdot \mathbf{j} & \frac{\mathbf{j}}{2\cdot s}+\mathbf{j}+\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnismatrizen sind widerspruchsvoll, d.h. mehrdeutige Lösung wird nicht erkannt.