7.HA E3.9,10,17,18,20
======================

Aufg. E3.9:
=============
Lösung nach Bartsch S.618
PDG vom Typ **$P*u_x+Q*u_y=R$**

a) mit $P=x^2$, $Q=-y^2$, $R=u$

aus der Proportion **dx:dy:du=P:Q:R**
gewinnt man zwei **charakteristische Dgln**:

z.B.
dy/dx=Q/P und du/dx=R/P

dSolve(y'=-y^2/x^2,x,y)

$$\left\{y=\frac{x}{x\cdot \mathrm{const}(1)-1}\right\}$$

d.h. $y=\frac{x}{x\cdot C_1-1}$ (**Charakteristik** der ersten Dgl.)
und
dSolve(u'=u/x^2,x,u)

$$\left\{u=e^{-x^{-1}}\cdot \mathrm{const}(1)\right\}$$

d.h. $u=e^{-1/x}*C_2$ (**Charakteristik** der zweiten Dgl.)

Hieraus folgt:
$C_1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ und $C_2=u*e^{1/x}$.

Sei nun $w=w(C_1,C_2)$ eine beliebige Funktion von C_1

und C_2 mit stetiger Ableitung.

Dann ist $w(C_1,C_2)=w\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},u*e^{1/x}\right)=0$ die implizite Darstellung der Lösung.

explizit: $u(x,y)*e^{1/x}=v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, $v=v(C_1)$ beliebige Funktion von C_1 mit stetiger Ableitung.

Zusatzbedingung:
================

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix},\ t\in\mathbf{R},\ \text{ergibt:}$$

$t^2*e^1=v\left(1+\frac{1}{t}\right)$, d.h. mit $s=1+\frac{1}{t}$ hat man

$$v(s)=\frac{1}{(s-1)^2}*e.$$

Damit ist

$$u(x,y)*e^{1/x}=v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^2}*e$$

und schließlich

$$u(x,y)=e^{1-1/x}*\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^2}=e^{1-1/x}*\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^{-2}.$$

=======   ==================

Probe:
======

Define $u(x,y)=e^{1-1/x}*\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^{-2}$

done

u(1,t)

t^2

$x^2\times\frac{d}{dx}(u(x,y))-y^2\times\frac{d}{dy}(u(x,y))=u(x,y)$

$$\frac{2\cdot x^3\cdot y^3\cdot e^{-x^{-1}+1}}{(x\cdot y-x-y)^3}-\frac{x^2\cdot\left(x\cdot y^3+y^3+x\cdot y^2\right)\cdot e^{-x^{-1}+1}}{(x\cdot y-x-y)^3}=-\left(\right.$$

simplify(ans)

$$\frac{x^2\cdot y^2\cdot e^{-x^{-1}+1}}{(x\cdot y-x-y)^2}=\frac{e^{-x^{-1}+1}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1\right)^2}$$

judge(ans)

TRUE

b) mit P=y, Q=-x, R=2xyu

aus der Proportion **dx:dy:du=P:Q:R**
gewinnt man zwei **charakteristische Dgln:**

z.B.
dy/dx=Q/P und du/dx=R/P

dSolve(y'=-x/y,x,y)

$$\left\{y=-\sqrt{-x^2+2\cdot \mathrm{const}(1)}\ ,y=\sqrt{-x^2+2\cdot \mathrm{const}(1)}\ \right\}$$

d.h. $y^2=-x^2+2\cdot C=-x^2+C_1$

dSolve(u'=2x×u,x,u)

$$\left\{u=e^{x^2}\cdot\text{const}(1)\right\}$$

d.h. $u=e^{x^2}\cdot C_2$

Dann ist $w(C_1,C_2)=w\left(y^2+x^2,u*e^{-x^2}\right)=0$ die implizite Darstellung der Lösung.

explizit: $u(x,y)*e^{-x^2}=v\left(y^2+x^2\right)$, $v=v(C_1)$ beliebige Funktion von C_1 mit stetiger Ableitung.

Zusatzbedingung:
================

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$, ergibt:

$t*e^{-t^2}=v\left(2\times t^2\right)$, d.h. mit $s=2\times t^2$ hat man
$v(s)=\pm\sqrt{s/2}*e^{-s/2}$.

Damit ist
$u(x,y)*e^{-x^2}=v\left(x^2+y^2\right)=\pm\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/2}*e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}$
und schließlich
$u(x,y)=\pm\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/2}*e^{x^2}*e^{-\left(x^2+y^2\right)/2}$
$\quad=\pm\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/2}*e^{\left(x^2-y^2\right)/2}$.
====================================

Probe:
======

Define $u(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)/2} * e^{(x^2-y^2)/2}$

done

u(t,t)

$|t|$

$y \times \frac{d}{dx}(u(x,y)) - x \times \frac{d}{dy}(u(x,y)) = 2 \times x \times y \times u(x,y)$

$$\frac{y \cdot \left(\sqrt{2} \cdot x \cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}} + x \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot (x^2+y^2}\right.}{2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}}$$

simplify(ans)

$$x \cdot y \cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot (x^2+y^2)} = x \cdot y \cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot (x^2+y^2}$$

judge(ans)

TRUE

Aufg. E3.10

============

das **vollständige Integral** wird aus einem Tabellenbuch entnommen:

Polyanin/Zaitsev/Moussiaux:
Handbook of first order partial differential equations
ISBN 0-415-27267-X (2002)

S.396, PDG 14.4.2.8

$(u_x)^k(u_y)^n - f(x)g(y)h(u) = 0$ mit $k=1$, $n=2$, $f(x)=1$, $g(y)=1$, $h(u)= u^3$

$$\int_{\square}^{\square} \frac{1}{k+n\sqrt{h(u)}}\,du =$$

$$(C_1)^n \int_{\square}^{\square} \sqrt[k]{f(x)}\,dx + \frac{1}{(C_1)^k} \int_{\square}^{\square} \sqrt[n]{g(y)}\,dy + C_2$$

d.h.

Define $h(u)=u^3$

done

Define $f(x)=1$

done

Define $g(y)=1$

done

$1 \Rightarrow k$

1

$2 \Rightarrow n$

2

DelVar u

done

$$\int_{\square}^{\square} \frac{1}{k+n\sqrt{h(u)}}\,du = (C1)^n \int_{\square}^{\square} \sqrt[k]{f(x)}\,dx + \frac{1}{(C1)^k} \int_{\square}^{\square} \sqrt[n]{g(y)}\,dy \blacktriangleright$$

$$\ln(|u|)=C1^2\cdot x+C2+\frac{y}{C1}$$

$$\text{solve}\left(\ln(|u|)=C1^2\cdot x+C2+\frac{y}{C1},u\right)$$

$$\left\{u=-e^{C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y},\ u=e^{C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y}\right\}$$

Lösung:

$$u(x,y)=\pm e^{C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y}$$

Probe:

Define $u(x,y)=e^{C1^2 \cdot x+C2+C1^{-1} \cdot y}$

done

$(u(x,y))^3-\frac{d}{dx}(u(x,y))\times\left(\frac{d}{dy}(u(x,y))\right)^2=0$

$e^{3\cdot\left(C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y\right)}-e^{C1^2\cdot x+2\cdot\left(C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y\right.}$▸

simplify(ans)

$e^{3\cdot\left(C1^2\cdot x+C2+C1^{-1}\cdot y\right)}-e^{3\cdot C1^2\cdot x+3\cdot C2+3\cdot C1^{-1}\cdot y}=0$

judge(ans)

TRUE

Aufg. E3.17

============

a) $a=1$, $b=-\sin(x)$, $c=-(\cos(x))^2$

ergibt: $b^2-ac=1>0$, **hyperbol. PDG**

charakteristische Dgl.:

$y'=-\sin(x)\pm1$ ergibt die **Charakteristiken**

$y(x)=\cos(x)+x+C_1$ und $y(x)=\cos(x)-x+C_2$

Koord.-Transf. mit $g(x,y)=$const. und $h(x,y)=$const. ergibt

$x^*=\cos(x)+x-y$ und $y^*=\cos(x)-x-y$

Ableitungen:

$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot(-\sin(x)+1)+\mathbf{U}_{y^*}\cdot(-\sin(x)-1)$

$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot(-1)+\mathbf{U}_{y^*}\cdot(-1)$

hieraus:

$u_{xx}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot(-\sin(x)+1)^2+2\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)+1)*(-\sin($ ▸

$\quad +\mathbf{U}_{x^*}\cdot(-\cos(x))+\mathbf{U}_{y^*}\cdot(-\cos(x))$

$u_{xy}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot(-\sin(x)+1)*(-1)+\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)+1)*(-1$ ▸

$+\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)-1)*(-1)+\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot(-\sin(x)-1)*(-1)$

$u_{yy}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot(-1)^2+2\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot(-1)^2+\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot(-1)^2$

Einsetzen:

$u_{xx}-2\sin(x)u_{xy}-(\cos(x))^2u_{yy}-\cos(x)u_y=$

$\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot(-\sin(x)+1)^2+2\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)+1)*(-\sin(x)-1$ ▸

$+\mathbf{U}_{x^*}\cdot(-\cos(x))+\mathbf{U}_{y^*}\cdot(-\cos(x))$

$+2\sin(x)*(\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot(-\sin(x)+1)+\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot(-\sin(x)+1)+\mathbf{U}_{x^*}$ ▸

$((\sin(x))^2-1)*(\mathbf{U}_{x^*x^*}+2\mathbf{U}_{x^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*})$

$+\cos(x)(U_{x^*}+U_{y^*})=$

$0\cdot\mathbf{U}_{x^*x^*}+0\cdot\mathbf{U}_{y^*y^*}+(-2+2(\sin(x))^2-4(\sin(x))^2+2(\sin(x$ ▸

d.h.

$-4\mathbf{U}_{x^*y^*}=0$ bzw. $\underline{\mathbf{U}_{x^*y^*}=0.}$

========

Integration nach y^*:

$\mathbf{U}_{x^*}=C(x^*)$

hieraus:

$$\mathbf{U(x^*,y^*)}=\int_{\square}^{\square} C(x^*)dx^*+B(y^*)=A(x^*)+B(y^*)$$

Rücktransformation: A,B bel. wählbare 2mal diff.-bare Funktionen:

$$\mathbf{u(x,y)=A(\cos(x)+x-y)+B(\cos(x)-x-y)}$$

===================================

Beispiel: $A(t)=t*e^t$, $B(t)=\sqrt{t}$

Define $u(x,y)=(\cos(x)+x-y)*e^{\cos(x)+x-y}+\sqrt{\cos(x)-...}$

done

$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))-2*\sin(x)*\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)-(\cos(x))^2*...$

$$(\cos(x)+x-y)\cdot(\sin(x)-1)^2\cdot e^{\cos(x)+x-y}+2\cdot(\sin(x)-1)^2...$$

expand(ans)

$$-(\cos(x))^3\cdot e^{\cos(x)+x-y}-x\cdot(\cos(x))^2\cdot e^{\cos(x)+x-y}+y...$$

simplify(ans)

0=0

b) $a=x^2$, $b=-xy$, $c=y^2$

ergibt: $b^2-ac=0$, **parabol. PDG**

charakteristische Dgl.:

$x^2\cdot(y')^2+2x\cdot y\cdot y'+y^2=0$, d.h. $(x\cdot y'+y)^2=0$

dSolve(x·y'+y=0,x,y)

$$\left\{y=\frac{\text{const}(1)}{|x|}\right\}$$

ergibt eine **Charakteristik**

$y(x)=\frac{1}{x}\cdot C_1$ und $y(x)=C_2$ (frei gewählt)

Koord.-Transf. mit $g(x,y)=\text{const.}=x\cdot y$ und $h(x,y)=\text{const.}=y$:

$x^* = x \cdot y$ und $y^* = y$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(x \cdot y) & \frac{d}{dy}(x \cdot y) \\ \frac{d}{dx}(y) & \frac{d}{dy}(y) \end{bmatrix}\right)$$

y

Mit der frei gewählten Charakteristik muss die det-Bedingung (2.2) überprüft werden, die die umkehrbare Eindeutigkeit der Transformation sichert.

Bem. Oft ist $h(x,y)=x$ oder $h(x,y)=y$ eine geeignete zweite Charakteristik.

Ableitungen:

$u_x = \mathbf{U}_{x^*} \cdot y + \mathbf{U}_{y^*} \cdot 0 = \mathbf{U}_{x^*} \cdot y$

$u_y = \mathbf{U}_{x^*} \cdot x + \mathbf{U}_{y^*} \cdot 1 = \mathbf{U}_{x^*} \cdot x + \mathbf{U}_{y^*}$

hieraus:

$u_{xx} = \mathbf{U}_{x^*x^*} \cdot y^2 + \mathbf{U}_{x^*y^*} \cdot 0$

$u_{xy} = \mathbf{U}_{x^*x^*} \cdot y \cdot x + \mathbf{U}_{x^*y^*} \cdot y + \mathbf{U}_{x^*}$

$u_{yy} = \mathbf{U}_{x^*x^*} \cdot x^2 + 2\mathbf{U}_{x^*y^*} \cdot x + \mathbf{U}_{y^*y^*}$

Einsetzen:

$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y =$

$x^2 \cdot \mathbf{U}_{x^*x^*} \cdot y^2 - 2xy \cdot (\mathbf{U}_{x^*x^*} \cdot y \cdot x + \mathbf{U}_{x^*y^*} \cdot y + \mathbf{U}_{x^*})$

$+ y^2 \cdot (\mathbf{U}_{x^*x^*} \cdot x^2 + 2\mathbf{U}_{x^*y^*} \cdot x + \mathbf{U}_{y^*y^*})$

$+ x \cdot \mathbf{U}_{x^*} \cdot y + y \cdot (\mathbf{U}_{x^*} \cdot x + \mathbf{U}_{y^*}) =$

$y^2 \cdot \mathbf{U}_{y^*y^*} + y \cdot \mathbf{U}_{y^*} = 0$, d.h.

$$\mathbf{U}_{y^*y^*} + \frac{1}{y^*} \mathbf{U}_{y^*} = 0$$

Integration als gewönhliche Dgl.

$\text{dSolve}(U''+\frac{1}{y}*U'=0,y,U)$

$$\{U=\ln(y)\cdot \text{const}(2)+\text{const}(1)\}$$

Somit

$\mathbf{U}(x^*,y^*)=\ln(y^*)\cdot C_1(x^*)+C_2(x^*)$ und

$\mathbf{u(x,y)=ln(|y|)\cdot C_1(xy)+C_2(xy)}$

Beispiel: $C_1(t)=t*e^t$, $C_2(t)=\sqrt{t}$

$\text{Define } u(x,y)=\ln(y)\cdot x\cdot y\cdot e^{x\cdot y}+\sqrt{x\cdot y}$

done

$x^2\cdot\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))-2\cdot x\cdot y\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)+y^2\cdot\frac{d^2}{dy^2}(u(\blacktriangleright$

$$\frac{x^2\cdot\left(4\cdot x\cdot y^3\cdot(x\cdot y)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln(y)\cdot e^{x\cdot y}+8\cdot y^2\cdot(x\cdot y)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln(y\blacktriangleright\right.}{4\cdot(x\cdot y)^{\frac{3}{2}}}$$

expand(ans)

$0=0$

c) $a=1$, $b=-1$, $c=1$ ergibt $b^2-ac=0$, **parabol. PDG**

charakteristische Dgl.:

$(y')^2+2y'+1=0$, d.h. $(y'+1)^2=0$

$\text{dSolve}(y'+1=0,x,y)$

$$\{y=-x+\text{const}(1)\}$$

ergibt eine **Charakteristik**

$y(x)=-x+C_1$ und $x=C_2$ (frei gewählt)

Koord.-Transf. mit $g(x,y)=\text{const.}=x+y$ und

$h(x,y)=\text{const.}=x$:

$x^*=x+y$ und $y^*=x$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(x+y) & \frac{d}{dy}(x+y) \\ \frac{d}{dx}(x) & \frac{d}{dy}(x) \end{bmatrix}\right)$$

$$-1$$

Mit der frei gewählten Charakteristik muss die det-Bedingung (2.2) überprüft werden, die die umkehrbare Eindeutigkeit der Transformation sichert.

Ableitungen:

$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot 1+\mathbf{U}_{y^*}\cdot 1=\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*}$

$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot 1+\mathbf{U}_{y^*}\cdot 0=\mathbf{U}_{x^*}$

hieraus:

$u_{xx}=\mathbf{U}_{x^*x^*}+2\mathbf{U}_{x^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}$

$u_{xy}=\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{x^*y^*}$

$u_{yy}=\mathbf{U}_{x^*x^*}$

Einsetzen:

$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=$

$\mathbf{U}_{x^*x^*}+2\mathbf{U}_{x^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}-2\cdot(\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{x^*y^*})+\mathbf{U}_{x^*x^*}=$

$\mathbf{U}_{y^*y^*}=0$

Integration:

$\mathbf{U}_{y^*}=C(x^*)$

erneute Integration:

$\mathbf{U}(x^*,y^*)=y^*\cdot C(x^*)+D(x^*)$

und

$u(x,y)=x\cdot C(x+y)+D(x+y)$

=======================

Beispiel: $C_1(t)=t*e^t$, $C_2(t)=\sqrt{t}$

Define $u(x,y)=x\cdot(x+y)\cdot e^{x+y}+\sqrt{x+y}$

done

$$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))-2\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)+\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))=0$$

$$\frac{4\cdot x^2\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{x+y}+4\cdot x\cdot y\cdot(x+y)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{x+y}+16\cdot x\cdot(x+y)}{4\cdot(x+y)}$$

expand(ans)

0=0

Aufg. E3.18

============

a=1, b=1, c=−3 ergibt $b^2-ac=4>0$, **hyperbol. PDG**

charakteristische Dgl.:

$(y')^2-2y'-3=0$, d.h. $y'=1\pm2$

dSolve(y'=3,x,y)

{y=3·x+const(1)}

dSolve(y'=−1,x,y)

{y=−x+const(1)}

x*=x+y und y*=3x−y

Ableitungen:

$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot1+\mathbf{U}_{y^*}\cdot3=\mathbf{U}_{x^*}+3\mathbf{U}_{y^*}$

$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot1+\mathbf{U}_{y^*}\cdot(-1)=\mathbf{U}_{x^*}-\mathbf{U}_{y^*}$

hieraus:

$u_{xx}=\mathbf{U}_{x^*x^*}+2\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot3+\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot9$

$u_{xy}=\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot(-1)+3\mathbf{U}_{y^*x^*}+3\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot(-1)$

$u_{yy} = \mathbf{U}_{x^*x^*} + 2\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot(-1) + \mathbf{U}_{y^*y^*}$

Einsetzen:

$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} =$

$\mathbf{U}_{x^*x^*} + 6\mathbf{U}_{x^*y^*} + 9\mathbf{U}_{y^*y^*} + 2\cdot(\mathbf{U}_{x^*x^*} + 2\mathbf{U}_{x^*y^*} - 3\mathbf{U}_{y^*y^*})$

$-3(\mathbf{U}_{x^*x^*} - 2\mathbf{U}_{x^*y^*} + \mathbf{U}_{y^*y^*}) =$

$16\mathbf{U}_{x^*y^*} = 0$

Integration nach y*, dann nach x*:

$\mathbf{U}_{x^*} = C(x^*)$ und $\mathbf{U} = A(x^*) + B(y^*)$, d.h.

$u(x,y) = A(x+y) + B(3x-y) = A(x+y) + D(x-y/3)$

Anpassung an die Anfangsbedingungen:

$u(x,0) = A(x) + D(x) = 3x^2$

$u_y(x,0) = A'(x+y) + D'(x-y/3)*(-1/3)|y=0$

$\qquad = A'(x) - D'(x)/3 = 0$

dSolve({A'+D'=6x,A'-D'/3=0},x,{A,D})

$$\left\{A = \frac{3\cdot x^2}{4} + \mathrm{const}(2), D = \frac{9\cdot x^2}{4} + \mathrm{const}(1)\right\}$$

$A(x+y) = \dfrac{3\cdot(x+y)^2}{4} + C1,\ D(x-y/3) = \dfrac{9\cdot(x-y/3)^2}{4} + C2,$

Define $u(x,y) = \dfrac{3\cdot(x+y)^2}{4} + C1 + \dfrac{9\cdot(x-y/3)^2}{4} + C2$

done

$u(x,0) = 3\cdot x^2$

$$3\cdot x^2 + C1 + C2 = 3\cdot x^2$$

C1+C2=0 setzen.

$\frac{d}{dy}(u(x,y))|y=0$

0

$$\text{simplify}\left(\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}+\frac{9\cdot(x-y/3)^2}{4}\right)$$

$$3\cdot x^2+y^2$$

Ergebnis: $\mathbf{u(x,y)=3\cdot x^2+y^2}$
================

Aufg. E3.20
============

$(x^2u_x)_x=x^2u_{yy}$ mit den AB $u(x,0)=x$ und $u_y(x,0)=1$

Transformation der PDG mit der Subst.
$v(x,y)=x*u(x,y)$:

$u_x=\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{x}\right)=\frac{v_x x-v}{x^2}$ ergibt $x^2u_x=v_x x-v$

Weiter:
$\frac{d}{dx}(v_x x-v)=v_{xx}x+v_x-v_x=v_{xx}x.$

Nun
$u_y=\frac{d}{dy}\left(\frac{v}{x}\right)=\frac{v_y}{x}$ ergibt $u_{yy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{v_y}{x}\right)=\frac{v_{yy}}{x}$, d.h.
$x^2u_{yy}=x*v_{yy}$
Damit ergibt sich die hyperbolische PDG: $v_{xx}-v_{yy}=0$.

charakteristische Dgl. mit a=1, b=0 und c=-1:
$(y')^2=1$, d.h. $y'=\pm1$.
$y=x+C_1$ bzw. $y=-x+C_2$ ergeben z.B. die
Transformationen
$x^*=g(x,y)=x-y$ und $y^*=h(x,y)=x+y$

Umrechnung der Ableitungen:
$u_x=\mathbf{V}_{x^*}+\mathbf{V}_{y^*}$

$u_y = -V_{x^*} + V_{y^*}$

und

$u_{xx} = V_{x^*x^*} + V_{x^*y^*} + V_{y^*x^*} + V_{y^*y^*}$

$u_{yy} = V_{x^*x^*} - V_{x^*y^*} - V_{y^*x^*} + V_{y^*y^*}$

Hieraus ergibt sich die Normalform $V_{x^*y^*} = 0$

Integration: $V_{x^*} = C(x^*)$ und

$$V = \int C(x^*)\,dx^* + B(y^*) = A(x^*) + B(y^*)$$

Rücktransformation: $v(x,y) = A(x-y) + B(x+y)$

schließlich die **allgemeine Lösung der PDG:**

$$u(x,y) = \frac{1}{x} * (A(x-y) + B(x+y))$$

==========================

Berücksichtigung der AB:

$$u(x,0) = \frac{1}{x} * (A(x) + B(x)) = x$$

und

$$u_y(x,0) = \frac{1}{x} * (-A'(x-y) + B'(x+y))|y=0$$

$$= \frac{1}{x} * (-A'(x) + B'(x)) = 1$$

Damit ergibt sich die Hilfsaufgabe $A + B = x^2$ und $-A' + B' = x$

dSolve({A'+B'=2x,-A'+B'=x},x,{A,B})

$$\left\{A = \frac{x^2}{4} + \text{const}(2), B = \frac{3 \cdot x^2}{4} + \text{const}(1)\right\}$$

Somit

$$\frac{1}{x} * (A(x-y) + B(x+y)) = \frac{1}{x} * \left(\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{3 \cdot (x+y)^2}{4} + C \right)$$

Define $u(x,y)=\frac{1}{x}*\left(\frac{(x-y)^2}{4}+\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}+C\right)$

done

$u(x,0)=x$

$$\frac{x^2+C}{x}=x$$

Somit C=0

Ergebnis:

Define $u(x,y)=\frac{1}{x}*\left(\frac{(x-y)^2}{4}+\frac{3\cdot(x+y)^2}{4}\right)$

done

simplify(u(x,y))

$$\frac{y^2}{x}+x+y$$

Die gesuchte Funktion lautet: $u(x,y)=x+y+\frac{y^2}{x}$

Probe:

$\frac{d}{dx}\left(x^2*\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)=x^2*\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))$

$$2\cdot x=2\cdot x$$

$u(x,0)$

$$x$$

$\frac{d}{dx}(u(x,y))|y=0$

$$1$$