6.HA E3.6,12-16,19
====================

Aufg. E3.6:
=============
Koordinatentransformation, vgl. [1] S.256o.

$x^*=g(x,y)=x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)$
$y^*=h(x,y)=-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)$

mit $\alpha=\frac{\pi}{4}=45°$.

in Vektorform mit Matrix **A**:

$$\begin{bmatrix}x^*\\y^*\end{bmatrix}=\mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\-\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

det(**A**) ist die **Funktionaldeterminate** der Koordinatentransformation:

$$\det(\mathbf{A})=\left\|\begin{bmatrix}g_x & g_y\\h_x & h_y\end{bmatrix}\right\|=(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2=1\neq 0$$

Umkehrtransformation bei det(**A**)≠0 vorhanden:

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\-\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\cos(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2} & \frac{-\sin(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2}\\\frac{\sin(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2} & \frac{\cos(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2}\end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x* \\ y* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x* \\ y* \end{bmatrix}$$

Umrechnung der Ableitungen von $u(x,y)$ in die neuen Koordinaten $u(x(x*,y*),y(x*,y*))=\mathbf{U}(x*,y*)$:

$u_x=\mathbf{U}_x*\cdot\cos(\alpha)+\mathbf{U}_y*\cdot(-\sin(\alpha))$
$u_y=\mathbf{U}_x*\cdot\sin(\alpha)+\mathbf{U}_y*\cdot\cos(\alpha)$

Gleichsetzen $u_x=u_y$ ergibt mit $\cos(\alpha)=\sin(\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$\mathbf{U}_x*\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}-\mathbf{U}_y*\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=\mathbf{U}_x*\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}+\mathbf{U}_y*\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$, d.hh

$\mathbf{U}_y*=0$ (vereinfachte PDG nach Koordinatentransformation)

Lösung:

$\mathbf{U}(x*,y*)=C(x*)=C\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(x+y)\right)=w(x+y)$,

d.h. $\mathbf{u(x,y)=w(x+y)}$.

Aufg. E3.12:
==============

$u_{xx}=0$ ergibt $u(x,y)=C1(y)\cdot x+C2(y)+C$
$u_{xy}=0$ ergibt

$$u(x,y)=\int_{\square}^{\square} D1(x)dx+D2(y)=F1(x)+C+D2(y)$$

$u_{yy}=0$ ergibt $u(x,y)=E1(x)\cdot y+E2(x)+C$

wobei die auftretenden Funktionen
C1,C2,F1,D2,E1,E2 zusammenpassen müssen,
d.h.
$C2(y)=D2(y)=E1(x)\cdot y$ mit E1=const.
und $E2(x)=F1(x)=C1(y)\cdot x$ mit C1=const.

Ergebnis:
$u(x,y)=C1\cdot x+E1\cdot y+C$, wobei C1,E1 und C
Integrationskonstanten sind.

Aufg. E3.13:
=============
Ausgangspunkt Formel (2.1) der V:
$a\cdot u_{xx}+2b\cdot u_{xy}+c\cdot u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$

a)
$a=x^2$, $b=x\cdot y$, $c=y^2$ ergeben (Def.1 der V):
$b^2-ac=0$, d.h. **parabolische** PDG

b)
3.5a) $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=0$ ergeben

$b^2-ac>0$, d.h. **hyperbolische** PDG

3.5d) $a=1$, $b=0$, $c=0$ ergeben
$b^2-ac=0$, d.h. **parabolische** PDG

3.5e) $a=0$, $b=0$, $c=1$ ergeben
$b^2-ac=0$, d.h. **parabolische** PDG

c)
$a=1$, $b=x$, $c=y$ ergeben
$b^2-ac=x^2-y>0$, d.h. **hyperbolische** PDG für $y<x^2$
$b^2-ac=x^2-y=0$, d.h. **parabolische** PDG für $y=x^2$
$b^2-ac=x^2-y>0$, d.h. **elliptische** PDG für $y>x^2$

d), vgl. a)
$a=x^2$, $b=x\cdot y$, $c=y^2$ ergeben
$b^2-ac=0$, d.h. **parabolische** PDG

Aufg. E3.14:
=============
a) $u_{xx}+x\cdot y\cdot u_{yy}=0$ mit $x<0$ und $y>0$, d.h.
$a=1$, $b=0$, $c=x\cdot y$ und $b^2-ac=-x\cdot y>0$,
d.h. **hyperbolische** PDG

Eine passende Koordinatentransformation
$x^*=g(x,y)$, $y^*=h(x,y)$ für die hyperbolische PDG
führt auf die Normalform

$\mathbf{U}_{x^*y^*}=F^{**}(x^*,y^*,\mathbf{U},\mathbf{U}_{x^*},\mathbf{U}_{y^*})$ (vereinfachte PDG
nach Koordinatentransformation)

oder mit nochmaliger Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

(Drehung um $\alpha=45°$, vgl. **E3.**6) auf die andere
Normalform einer hyperbolischen PDG

$\tilde{u}_{mm}-\tilde{u}_{nn}=\tilde{F}(m,n,\tilde{u},\tilde{u}_m,\tilde{u}_n)$

Zur Ermittlung der passenden Koordinatentransformation
$x^*=g(x,y)$, $y^*=h(x,y)$ wird die **charakteristische Dgl.**
$a\cdot(y')^2-2b\cdot y'+c=0$ gelöst:
==================

$$y'=\frac{1}{a}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-a\cdot c}\right)=\pm\sqrt{-x\cdot y}$$, d.h.

$$\text{dSolve}\left(y'=\sqrt{-x\cdot y},x,y\right)|x<0 \text{ and } y>0$$
$$\left\{y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x\cdot \text{const}(1)\cdot\sqrt{-x}-9\cdot(\text{const}(1))^2\right)}{36}\right\}$$

$$\text{dSolve}\left(y'=-\sqrt{-x\cdot y},x,y\right)|x<0 \text{ and } y>0$$
$$\left\{y=\frac{-\left(4\cdot x^3+12\cdot x\cdot \text{const}(1)\cdot\sqrt{-x}-9\cdot(\text{const}(1))^2\right)}{36}\right\}$$

Die Lösungen
$$y=\frac{-\left(4\cdot x^3\pm 12\cdot x\cdot C\cdot\sqrt{-x}-9\cdot C^2\right)}{36}$$
============================

heißen **Charakteristiken.**

Die impliziten Lösungsdarstellungen $C=g(x,y)$ bzw. $C=h(x,y)$

$$\text{solve}\left(y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x\cdot C\cdot\sqrt{-x}-9\cdot C^2\right)}{36},C\right)$$
$$\left\{C=\frac{-2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}-2\cdot\sqrt{y},C=\frac{-2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}+2\cdot\sqrt{y}\right\}$$

$$\text{solve}\left(y=\frac{-\left(4\cdot x^3+12\cdot x\cdot C\cdot\sqrt{-x}-9\cdot C^2\right)}{36},C\right)$$

$$\left\{C=\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}-2\cdot\sqrt{y},C=\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}+2\cdot\sqrt{y}\right\}$$

sind passende Koordinatentransformationen:

$$x^*=g(x,y)=\frac{-2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}+2\cdot\sqrt{y}=\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+2\cdot\sqrt{y}$$

==

$$y^*=h(x,y)=\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{-x}}{3}+2\cdot\sqrt{y}=-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+2\cdot\sqrt{y}$$

==

(Auch andere Transformationen lassen sich aus den obigen Charakteristiken gewinnen, die sich jedoch nur in den Vorzeichen oder Variablen unterscheiden.)

Umrechnung der Ableitungen von $u(x,y)$ in die neuen Koordinaten $u(x(x^*,y^*),y(x^*,y^*))=\mathbf{U}(x^*,y^*)$, vgl. **E3.**6,

$$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\sqrt{-x}\cdot(-1)+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\sqrt{-x}=(-\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\sqrt{-x},$$

$$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=(\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$$

hieraus:

$$u_{xx}=(\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot\sqrt{-x}-\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot\sqrt{-x}+\mathbf{U}_{y^*x^*}\cdot\sqrt{-x}\cdot(-1)+$$

$$U_{y^*y^*}\cdot\sqrt{-x}\,)\cdot\sqrt{-x}+(-U_{x^*}+U_{y^*})\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}\cdot(-1)$$

$$u_{yy}=(U_{x^*x^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+U_{x^*y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+U_{y^*x^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+$$

$$U_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,)\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+(U_{x^*}+U_{y^*})\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot y^{-\frac{3}{2}}$$

mit der PDG folgt mit $U_{x^*y^*}=U_{y^*x^*}$ (Satz von Schwarz)

$$u_{xx}+x\cdot y\cdot u_{yy}=$$

$$(U_{x^*x^*}\cdot\sqrt{-x}-2\cdot U_{x^*y^*}\cdot\sqrt{-x}+U_{y^*y^*}\cdot\sqrt{-x}\,)\cdot\sqrt{-x}+$$

$$(U_{x^*}-U_{y^*})\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}+$$

$$x\cdot y\cdot(U_{x^*x^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+2\cdot U_{x^*y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+U_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,)\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+$$

$$x\cdot y\cdot(U_{x^*}+U_{y^*})\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot y^{-\frac{3}{2}}=$$

$$(U_{x^*}-U_{y^*})\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}+4x\cdot U_{x^*y^*}-(U_{x^*}+U_{y^*})\cdot\frac{x}{2\sqrt{y}}=0$$

Hieraus ergibt sich

$$U_{x^*y^*}=-(U_{x^*}-U_{y^*})\cdot\frac{1}{8}\cdot(-x)^{-\frac{3}{2}}+(U_{x^*}+U_{y^*})\cdot\frac{1}{8\sqrt{y}},$$

d.h.

$$U_{x^*y^*}=U_{x^*}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-(-x)^{-\frac{3}{2}}\right)+U_{y^*}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+(-x)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

==

und mit der ursprünglichen Koordinatentransformation

$$\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+2\cdot\sqrt{y}=x^* \quad (1)$$

$$-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+2\cdot\sqrt{y}=y^* \quad (2)$$

folgt

(1)+(2): $\sqrt{y}=\frac{x^*+y^*}{4}$, d.h. $\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{4}{x^*+y^*}$ und

mit (1) nun

$$(-x)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(x^*-2\cdot\sqrt{y}\right)=\frac{3}{2}x^*-\frac{3}{4}(x^*+y^*)=\frac{3}{4}(x^*-y^*),$$

d.h. $(-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3(x^*-y^*)}$

Damit $\frac{1}{\sqrt{y}}-(-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{x^*+y^*}-\frac{4}{3(x^*-y^*)}=$

$$\frac{12(x^*-y^*)-4(x^*+y^*)}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=\frac{8x^*-16y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}$$

und $\frac{1}{\sqrt{y}}+(-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{x^*+y^*}+\frac{4}{3(x^*-y^*)}=$

$$\frac{12(x^*-y^*)+4(x^*+y^*)}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=\frac{16x^*-8y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}$$

Endergebnis:

$$\mathbf{U}_{x^*y^*}=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{x^*-2y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{2x^*-y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}$$
==

übergang in die andere Normalform mit

$m=\frac{x^*+y^*}{\sqrt{2}}$ und $n=\frac{-x^*+y^*}{\sqrt{2}}$

Umrechnung der Ableitungen von $\mathbf{U}(x^*,y^*)$ in die neuen Koordinaten $\mathbf{U}(x^*(m,n),y^*(m,n))=\tilde{u}(m,n)$, vgl. **E3.**6,

$$\mathbf{U}_{x^*}=\tilde{u}_m\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\tilde{u}_n\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=(\tilde{u}_m-\tilde{u}_n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\mathbf{U}_{y^*}=\tilde{u}_m\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\tilde{u}_n\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=(\tilde{u}_m+\tilde{u}_n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

linke Seite der obigen PDG:

$$\mathbf{U}_{x^*y^*}=(\tilde{u}_{mm}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\tilde{u}_{mn}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\tilde{u}_{nm}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\tilde{u}_{nn}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=(\tilde{u}_{mm}-\tilde{u}_{nn})\cdot\frac{1}{2}$$

Weiter:

$$\begin{bmatrix}x^*\\y^*\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix},\text{ denn}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Somit $x^*=(m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y^*=(m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hieraus:

$$\frac{x^*-2y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=$$

$$\frac{(m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-2(m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{3\left(\left((m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left((m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot(m+n)-\frac{\sqrt{2}\cdot(m-n)}{2}}{3\cdot\left(\frac{(m+n)^2}{2}-\frac{(m-n)^2}{2}\right)}$$

simplify(ans)

$$\frac{\sqrt{2}\cdot(m+3\cdot n)}{12\cdot m\cdot n}$$

$$\frac{2x^*-y^*}{3\left((x^*)^2-(y^*)^2\right)}=$$

$$\frac{2(m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-(m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{3\left(\left((m-n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left((m+n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}\cdot(m+n)}{2}-\sqrt{2}\cdot(m-n)}{3\cdot\left(\frac{(m+n)^2}{2}-\frac{(m-n)^2}{2}\right)}$$

simplify(ans)

$$\frac{-\sqrt{2}\cdot(m-3\cdot n)}{12\cdot m\cdot n}$$

rechte Seite der obigen PDG:

$$U_{x}*\cdot\frac{x*-2y*}{3\left((x*)^2-(y*)^2\right)}+U_{y}*\cdot\frac{2x*-y*}{3\left((x*)^2-(y*)^2\right)}=$$

$$(\tilde{u}_m-\tilde{u}_n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot(m+3\cdot n)}{12\cdot m\cdot n}+(\tilde{u}_m+\tilde{u}_n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{2}\cdot(m-}{12\cdot m\cdot}\blacktriangleright$$

$$\frac{(m+3\cdot n)\cdot(\tilde{u}_m-\tilde{u}_n)}{12\cdot m\cdot n}-\frac{(m-3\cdot n)\cdot(\tilde{u}_m+\tilde{u}_n)}{12\cdot m\cdot n}$$

simplify(ans)

$$\frac{\tilde{u}_m}{2\cdot m}-\frac{\tilde{u}_n}{6\cdot n}$$

Endergebnis (andere Normalform):

$\tilde{u}_{mm}-\tilde{u}_{nn}=\frac{\tilde{u}_m}{m}-\frac{\tilde{u}_n}{3n}$

================

b) $u_{xx}+x\cdot y\cdot u_{yy}=0$ mit $x>0$ und $y>0$, d.h.

$a=1$, $b=0$, $c=x\cdot y$ und $b^2-ac=-x\cdot y<0$,

d.h. **elliptische** PDG

Zur Ermittlung der passenden Koordinatentransformation $x*=g(x,y)$, $y*=h(x,y)$ wird die **charakteristische Dgl.**

$a\cdot(y')^2-2b\cdot y'+c=0$ gelöst:
==================

$$y'=\frac{1}{a}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-a\cdot c}\right)=\pm\sqrt{-x\cdot y}=\pm j\sqrt{x\cdot y}$$, d.h. die Lösung der Dgl. ist dann ebenfalls komplex:

$$\mathrm{dSolve}\left(y'=j\sqrt{x\cdot y},x,y\right)|x>0 \text{ and } y>0$$

$$\left\{y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot \mathrm{const}(1)\cdot j-9\cdot(\mathrm{const}(1))^2\right)}{36}\right\}$$

Die Lösung

$$y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot C\cdot j-9\cdot C^2\right)}{36}$$

============================

heißt **Charakteristik.**

Die implizite Lösungsdarstellung ist
$C=g(x,y)+j\cdot h(x,y)$

$$\mathrm{solve}\left(y=\frac{-\left(4\cdot x^3-12\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot C\cdot j-9\cdot C^2\right)}{36},C\right)$$

$$\left\{C=-2\cdot\sqrt{y}-\frac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot j}{3},C=2\cdot\sqrt{y}-\frac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot j}{3}\right\}$$

d.h. z.B. auch $C\cdot j=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+j\cdot 2\cdot\sqrt{y}$

Realteil und Imaginärteil ergeben die erforderliche

Koordinatentransformation:

$$x^*=g(x,y)=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \quad y^*=h(x,y)=2\cdot\sqrt{y}$$

================   ================

(Auch andere Transformationen lassen sich aus den obigen Charakteristiken gewinnen, die sich jedoch nur in den Vorzeichen oder Variablen unterscheiden.)

Umrechnung der Ableitungen von $u(x,y)$ in die neuen Koordinaten $u(x(x^*,y^*),y(x^*,y^*))=\mathbf{U}(x^*,y^*)$, vgl. **E3.**6,

$$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\sqrt{x}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot 0=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\sqrt{x}\ ,$$

$$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot 0+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$$

hieraus:

$$u_{xx}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot \mathbf{x}+\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot 0+\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot x+\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$u_{yy}=\mathbf{U}_{y^*x^*}\cdot 0+\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{y}-\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}=\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{y}$$
$$-\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}$$

mit der PDG folgt

$u_{xx}+x\cdot y\cdot u_{yy}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot x+\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\cdot y\cdot(\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot\frac{1}{y}$

$-\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{3}{2}})=0,$

d.h.

$\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}=-\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$, d.h.

Endergebnis:

$\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}=-\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{1}{3x^*}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{1}{y^*}$

==============================

Aufg. E3.15:

=============

$u_{xx}+y\cdot u_{yy}=0$ mit a=1, b=0 und c=y

a) hyperbolisch für $b^2-ac=-y>0$, d.h. $y<0$ (untere Halbebene)

b) parabolisch für $b^2-ac=-y=0$, d.h. $y=0$ (x-Achse)

c) elliptisch für $b^2-ac=-y<0$, d.h. $y>0$ (obere Halbebene)

d) $y<0$ ergibt die charakteristische Gleichung:

$y'=\frac{1}{a}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-a\cdot c}\right)=\pm\sqrt{-y}$, d.h.

$\text{dSolve}\left(y'=\sqrt{-y},x,y\right)|y<0$

$$\left\{y=\frac{-(x-\text{const}(1))^2}{4}\right\}$$

$\mathrm{dSolve}\left(y'=-\sqrt{-y},x,y\right)|y<0$

$$\left\{y=\frac{-(x+\mathrm{const}(1))^2}{4}\right\}$$

Die Lösungen

$$y=\frac{-(x+C)^2}{4}$$

==========

heißen **Charakteristiken.**

$\mathrm{solve}\left(y=\frac{-(x-C)^2}{4},C\right)$

$$\left\{C=x-2\cdot\sqrt{-y},C=x+2\cdot\sqrt{-y}\right\}$$

$\mathrm{solve}\left(y=\frac{-(x+C)^2}{4},C\right)$

$$\left\{C=-x-2\cdot\sqrt{-y},C=-x+2\cdot\sqrt{-y}\right\}$$

Die impliziten Lösungsdarstellungen C=g(x,y)
bzw. C=h(x,y)
sind passende Koordinatentransformationen:

$x^*=g(x,y)=x+2\cdot\sqrt{-y}$

==================

$y^*=h(x,y)=-x+2\cdot\sqrt{-y}$

===================

(Auch andere Transformationen lassen sich aus den obigen Charakteristiken gewinnen, die sich jedoch nur in den Vorzeichen oder Variablen unterscheiden.)

Umrechnung der Ableitungen von $u(x,y)$ in die neuen Koordinaten $u(x(x^*,y^*),y(x^*,y^*))=\mathbf{U}(x^*,y^*)$, vgl. **E3.**6,

$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot 1+\mathbf{U}_{y^*}\cdot(-1)=\mathbf{U}_{x^*}-\mathbf{U}_{y^*}$,

$$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot\frac{-1}{\sqrt{-y}}+\mathbf{U}_{y^*}\cdot\frac{-1}{\sqrt{-y}}=(\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\frac{-1}{\sqrt{-y}}$$

Weiter

$$u_{xx}=\mathbf{U}_{x^*x^*}-\mathbf{U}_{x^*y^*}-\mathbf{U}_{y^*x^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}$$

$$u_{yy}=(\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{x^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*x^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*})\cdot\frac{1}{-y}+$$

$$(\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)(-y)^{-\frac{3}{2}}$$

mit der PDG folgt mit $\mathbf{U}_{x^*y^*}=\mathbf{U}_{y^*x^*}$ (Satz von Schwarz)

$$u_{xx}+y\cdot u_{yy}=$$

$$\mathbf{U}_{x^*x^*}-2\cdot\mathbf{U}_{x^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}-(\mathbf{U}_{x^*x^*}+2\cdot\mathbf{U}_{x^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*})+$$

$$(\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\frac{1}{2}\cdot(-y)\cdot(-y)^{-\frac{3}{2}}=0$$

Endergebnis:

$$\mathbf{U}_{x^*y^*}=(\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\frac{1}{8\cdot\sqrt{-y}},\ \text{d.h.}$$

$$\mathbf{U}_{x^*y^*}=(\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*})\cdot\frac{1}{2\cdot(x^*+y^*)}$$

============================

e) $y\cdot u_{xx}+2y\cdot u_{xy}+(x+y)\cdot u_{yy}=0$ mit $a=y$, $b=y$ und

$c=x+y$

hyperbolisch für $b^2-ac=y^2-y\cdot(x+y)=-x\cdot y>0$,
d.h. $\mathbf{x\cdot y<0}$ **(II. oder IV. Quadrant)**

parabolisch für $b^2-ac=-x\cdot y=0$,
d.h. $\mathbf{x\cdot y=0}$ **(x-Achse oder y-Achse: x=0 oder y=0)**

elliptisch für $b^2-ac=-x\cdot y<0$,
d.h. $\mathbf{x\cdot y>0}$ **(I. oder III. Quadrant)**

Aufg. E3.16:
=============

$a=1$, $b=2$, $c=5$ bedeutet: $b^2-ac=-1<0$ elliptisch.

$y'=\frac{1}{a}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-a\cdot c}\right)=2\pm\mathbf{j}$ ergibt $y=(2\pm\mathbf{j})\cdot x+C$, d.h.
$C=-2x+y\pm\mathbf{j}\cdot x$

$x^*=g(x,y)=-2x+y$, $y^*=h(x,y)=x$

$u_x=\mathbf{U}_{x^*}\cdot(-2)+\mathbf{U}_{y^*}\cdot 1=-2\cdot\mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*}$,
$u_y=\mathbf{U}_{x^*}\cdot 1+\mathbf{U}_{y^*}\cdot 0=\mathbf{U}_{x^*}$

$u_{xx}=-2\cdot\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot(-2)-2\cdot\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot 1+\mathbf{U}_{y^*x^*}\cdot(-2)+\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot 1$
$\quad=4\cdot\mathbf{U}_{x^*x^*}-4\cdot\mathbf{U}_{x^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}$
$u_{xy}=-2\cdot\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot 1-2\cdot\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot 0+\mathbf{U}_{y^*x^*}\cdot 1+\mathbf{U}_{y^*y^*}\cdot 0=$
$\quad-2\cdot\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{x^*y^*}$
$u_{yy}=\mathbf{U}_{x^*x^*}\cdot 1+\mathbf{U}_{x^*y^*}\cdot 0=\mathbf{U}_{x^*x^*}$

Einsetzen in die PDG:

$u_{xx}+4\cdot u_{xy}+5\cdot u_{yy}+u_x+2\cdot u_y=$

$4\cdot \mathbf{U}_{x^*x^*}-4\cdot \mathbf{U}_{x^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}+4\cdot(-2\cdot \mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{x^*y^*})+$

$5\cdot \mathbf{U}_{x^*x^*}-2\cdot \mathbf{U}_{x^*}+\mathbf{U}_{y^*}+2\cdot \mathbf{U}_{x^*}=$

$\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}+\mathbf{U}_{y^*}=0$

Endergebnis:

$\mathbf{U}_{x^*x^*}+\mathbf{U}_{y^*y^*}=-\mathbf{U}_{y^*}$

=================

Aufg. E3.19:

$(x-y)\cdot u_{xy}-u_x+u_y=0$ ist offensichtlich eine hyperbolische PDG für $x\neq y$.

Subst. $v(x,y)=(x-y)\cdot u(x,y)$ ergibt $u=\frac{v}{x-y}$

Hieraus folgt:

$$u_x=\frac{v_x\cdot(x-y)-v\cdot 1}{(x-y)^2}=(v_x\cdot(x-y)-v)\cdot(x-y)^{-2}$$

$$u_y=\frac{v_y\cdot(x-y)-v\cdot(-1)}{(x-y)^2}$$

$$u_{xy}=(v_{xy}\cdot(x-y)-v_x-v_y)\cdot(x-y)^{-2}+$$
$$(v_x\cdot(x-y)-v)\cdot(-2)\cdot(x-y)^{-3}\cdot(-1)$$

Somit:

$(x-y)\cdot u_{xy}-u_x+u_y=$

$$\frac{v_{xy}\cdot(x-y)-v_x-v_y}{x-y}+2\cdot\frac{v_x\cdot(x-y)-v}{(x-y)^2}-\frac{v_x\cdot(x-y)-v}{(x-y)^2}+$$

$$\frac{v_y\cdot(x-y)+v}{(x-y)^2}=v_{xy}=0$$

Integration: $v_x=C(x)$ und

$$v=\int_{\square}^{\square} C(x)\,dx+D(y)=E(x)+D(y)$$

Endergebnis:

$u(x,y)=\dfrac{E(x)+D(y)}{x-y}$, wobei D und E beliebige differenzierbare Funktionen sind.