5.HA E3.1,5
==============

Aufg. 3.1a)

$u(x,y)=x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)+y\cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$ ergibt folgende

1.Ableitungen:

Notation ohne die innere Funktion $\frac{y}{x}$,

Strich-Symbol bezeichnet die äußere Abl. nach $t=\frac{y}{x}$,

$$u_x=f+x\cdot f'\cdot\frac{-y}{x^2}+y\cdot g'\cdot\frac{-y}{x^2}=f+f'\cdot\frac{-y}{x}+g'\cdot\frac{-y^2}{x^2}$$

$$u_y=x\cdot f'\cdot\frac{1}{x}+g+y\cdot g'\cdot\frac{1}{x}=f'+g+g'\cdot\frac{y}{x}$$

Nun die 2. Ableitungen:

$$u_{xx}=f'\cdot\frac{-y}{x^2}+f''\cdot\frac{y^2}{x^3}+f'\cdot\frac{y}{x^2}+g''\cdot\frac{y^3}{x^4}+g'\cdot\frac{2y^2}{x^3}\quad|\cdot x^2$$

$$u_{yy}=f''\cdot\frac{1}{x}+g'\cdot\frac{1}{x}+g'\cdot\frac{1}{x}+g''\cdot\frac{y}{x^2}\quad|\cdot y^2$$

$$u_{xy}=f'\cdot\frac{1}{x}+f''\cdot\frac{-y}{x^2}-f'\cdot\frac{1}{x}+g''\cdot\frac{-y^2}{x^3}+g'\frac{-2y}{x^2}\quad|\cdot 2xy$$

Hieraus folgt durch Einsetzen und Zusammenfassen

$x^2\cdot u_{xx}+2xy\cdot u_{xy}+y^2\cdot u_{yy}=0.$ ■

Aufg. 3.1b)

Rechnung im CAS

Define $u(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$

done

$$\frac{d}{dx}(u(x,y))$$

$$\frac{x-a}{x^2+y^2+a^2+b^2-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))$$

$$\frac{-\left(x^2-y^2+a^2-b^2-2\cdot a\cdot x+2\cdot b\cdot y\right)}{\left(x^2+y^2+a^2+b^2-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y\right)^2}$$

$$\frac{d}{dy}(u(x,y))$$

$$\frac{y-b}{x^2+y^2+a^2+b^2-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))$$

$$\frac{x^2-y^2+a^2-b^2-2\cdot a\cdot x+2\cdot b\cdot y}{\left(x^2+y^2+a^2+b^2-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y\right)^2}$$

Hieraus folgt durch Einsetzen und Zusammenfassen

$$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))+\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))=0. \blacksquare$$

Aufg. 3.1c)

$u(x,y)=x^2\cdot f\left(\frac{y}{x^2}\right)$ ergibt folgende 1.Ableitungen:

Notation ohne die innere Funktion $\frac{y}{x^2}$,

Strich-Symbol bezeichnet die äußere Abl. nach

$t=\frac{y}{x^2}$,

$u_x=2x\cdot f+x^2\cdot f'\cdot\frac{-2y}{x^3}\quad|\cdot x$

$u_y=x^2\cdot f'\cdot\frac{1}{x^2}\qquad|\cdot y$

Hieraus folgt durch Einsetzen und Zusammenfassen
$x\cdot u_x+2y\cdot u_y=2u$. ■

Aufg. 3.5a)

$u_{xy}+u_x+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2=0$ ist eine inhom. lin. Dgl. 1.Ordn. für $g(\boldsymbol{y})=u_x(x,\boldsymbol{y})$ mit der Veränderlichen $\boldsymbol{y}$ (x festhalten).

Integration der Dgl. nach *y*:

$$\mathrm{dSolve}\left(u_x'+u_x+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2=0,y,u_x\right)$$
$$\left\{u_x=e^{-y}\cdot\mathrm{const}(1)-x\cdot y^2+2\cdot x\cdot y-2\cdot x\right\}$$

oder mit der Umbezeichnung in g(y):

$$\mathrm{dSolve}\left(g'+g+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2=0,y,g\right)$$
$$\left\{g=e^{-y}\cdot\mathrm{const}(1)-x\cdot y^2+2\cdot x\cdot y-2\cdot x\right\}$$

Für die Integrationskonst. const(1) gilt
const(1)=C1(x).

Nun Integration nach x:

$$\mathrm{dSolve}\left(u'=e^{-y}\cdot C1-x\cdot y^2+2\cdot x\cdot y-2\cdot x,x,u\right)$$
$$\left\{u=C1\cdot x\cdot e^{-y}-\frac{x^2\cdot y^2}{2}+x^2\cdot y-x^2+\mathrm{const}(1)\right\}$$

$$u(x,y)=\int u_x dx = C1(x)\cdot x\cdot e^{-y}-\frac{x^2\cdot y^2}{2}+x^2\cdot y-x^2+C2(y)$$

Für die Integrationskonst. const(1) gilt jetzt const(1)=C2(y).

Zusammenfassend mit $C1(x)\cdot x=A(x)$ und $C2(y)=B(y)$:

$$\mathbf{u(x,y)=A(x)}\cdot e^{-y}-\frac{x^2\cdot y^2}{2}+\mathbf{x}^2\cdot(y-1)+\mathbf{B(y)}$$

Aufg. 3.5b)

$u_{xx}+u=0$ ist eine gewöhnl. hom. lin. Dgl. 2.Ordnung

dSolve(u''+u=0,x,u)

$\{u=\cos(x)\cdot const(1)+\sin(x)\cdot const(2)\}$

Zusammenfassend mit const(1)=A(y) und const(2)=B(y):

$$\mathbf{u(x,y)=\cos(x)\cdot A(y)+\sin(x)\cdot B(y)}$$
$$\mathbf{=a(y)\cdot\sin(x+b(y))}$$

Zuletzt Notation mit Phasenverschiebung.

Aufg. 3.5c)

analog zu 3.5a)

$u_{xy}+u_x=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ ist eine inhom. lin. Dgl. 1.Ordn. für $g(\boldsymbol{y})=u_x(x,\boldsymbol{y})$ mit der Veränderlichen $\boldsymbol{y}$ (x festhalten).

Integration der Dgl. nach y:

dSolve$(u_x'+u_x=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y},y,u_x)$

$$\left\{u_x=e^{-y}\cdot \text{const}(1)+x\cdot y-x\right\}$$

oder mit der Umbezeichnung in g(y):

dSolve$(g'+g=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y},y,g)$

$$\left\{g=e^{-y}\cdot \text{const}(1)+x\cdot y-x\right\}$$

Für die Integrationskonst. const(1) gilt const(1)=C1(x).

Nun Integration nach x:

dSolve$\left(u'=e^{-y}\cdot C1+x\cdot y-x,x,u\right)$

$$\left\{u=C1\cdot x\cdot e^{-y}+\frac{x^2\cdot y}{2}-\frac{x^2}{2}+\text{const}(1)\right\}$$

$$u(x,y)=\int_{\square}^{\square} u_x dx=C1(x)\cdot x\cdot e^{-y}+\frac{x^2\cdot y}{2}-\frac{x^2}{2}+C2(y)$$

Für die zweite Integrationskonst. const(1) gilt jetzt const(1)=C2(y).

Zusammenfassend mit $C1(x)\cdot x=A(x)$ und $C2(y)=B(y)$:

$$u(x,y)=A(x)\cdot e^{-y}+\frac{x^2}{2}\cdot(y-1)+B(y)$$

Aufg. 3.5d)

$u_{xx}=0$ ist eine gewöhnl. hom. lin. Dgl. 2.Ordnung (y fest)

dSolve(u''=0,x,u)

$$\{u=x\cdot const(1)+const(2)\}$$

Zusammenfassend mit const(1)=A(y) und const(2)=B(y):

$u(x,y)=A(y)\cdot x+B(y)$ als allgem. Lösung der Dgl.

Anfangsbedingungen für x=1: $u(1,y)=y^3$ und $u_x(1,y)=y^2$ ergeben:

dSolve$\left(u''=0,x,u,x=1,u=y^3,x=1,u'=y^2\right)$

$$\{u=y^3+x\cdot y^2-y^2\}$$

Zusammenfassend mit $A(y)=y^2$ und $B(y)=y^3-y^2$:

$u(x,y)=y^2\cdot(x+y-1)$

Aufg. 3.5e)

$u_{yy}=2$ ist eine gewöhnl. hom. lin. Dgl. 2.Ordnung (x fest)

dSolve(u''=2,y,u)

$$\{u=y^2+y\cdot const(2)+const(1)\}$$

Zusammenfassend mit const(1)=A(x) und const(2)=B(x):

$u(x,y)=A(x)+B(x)\cdot y+y^2$

Anfangsbedingungen für y=0: $u(x,0)=1$ und $u_y(x,0)=x$ ergeben:

dSolve(u''=2,y,u,y=0,u=1,y=0,u'=x)

$$\{u=y^2+y\cdot const(2)+1\}$$

Der dSolve-Befehl arbeitet hier nicht korrekt!

Zusammenfassend mit A(x)=1 und B(x)=x:

$u(x,y)=y^2+x\cdot y+1$

Probe:

Define $u(x,y)=y^2+B(x)\cdot y+1$

done

$$\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))=2$$

$$2=2$$

$$u(x,0)=1$$

$$1=1$$

$$\frac{d}{dy}(u(x,y))=x|y=0$$

$$B(x)=x$$

Aufg. 3.5f)

$u_{xy}=x+y$ mit $u_x=g(y)$, x fest.

Integration nach y:

dSolve(g'=x+y,y,g)

$$\left\{g=\frac{y^2}{2}+x\cdot y+\text{const}(1)\right\}$$

$$u_x(x,y)=\frac{y^2}{2}+x\cdot y+C1(x)$$

Integration nach x:

$$\text{dSolve}\left(u'=\frac{y^2}{2}+x\cdot y+C1(x),x,u\right)$$

$$\left\{-\int C1(x)+\frac{y^2}{2}+x\cdot y\,dx+u-\text{const}(1)=0\right\}$$

$$\text{dSolve}\left(u'=\frac{y^2}{2}+x\cdot y,x,u\right)$$

$$\left\{u=\frac{x^2\cdot y}{2}+\frac{x\cdot y^2}{2}+\text{const}(1)\right\}$$

Ergebnis (allg. Läsung der PDG):

$$u(x,y)=B(x)+\frac{x^2\cdot y}{2}+\frac{x\cdot y^2}{2}+A(y)=\frac{x\cdot y}{2}\cdot(x+y)+B(x)+A(y$$

Anfangsbedingungen: $u(x,0)=x$, $u(0,y)=y^2$

$$\text{Define } u(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}\cdot(x+y)+B(x)+A(y)$$

done

$u(x,0)=x$

$A(0)+B(x)=x$

$u(0,y)=y^2$

$A(y)+B(0)=y^2$

Ergebnis (spezielle Lösung der PDG) mit
$-A(0)-B(0)=C$:

$$u(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}\cdot(x+y)+x+y^2+C$$

Probe ergibt C=0:

Define $u(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}\cdot(x+y)+x+y^2+C$

done

$u(x,0)=x$

$x+C=x$

$u(0,y)=y^2$

$y^2+C=y^2$

Mit der geänderten AB erhält man keine Lösung:

Define $u(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}\cdot(x+y)+B(x)+A(y)$

done

$u(x,0)=x$

$A(0)+B(x)=x$

$\frac{d}{dy}(u(x,y))=1|x=0$

$\frac{d}{dy}(A(y))=1$

d.h. $A(y)=\text{const.}=C$

Probe:

Define $u(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}\cdot(x+y)+x-C+C$

done

u(x,0)=x

x=x

$\frac{d}{dy}(u(x,y))|x=0$

0

d.h. $\frac{d}{dy}(u(x,y))=1|x=0$ ist nicht erfüllt!

(ohne Probe würde es zu einer Scheinlösung kommen!)

Aufg. 3.5g)

analog zu a) bzw. c)

$u_{xy}+u_x+x+y+1=0$ ist eine inhom. lin. Dgl. 1.Ordn. für $g(\boldsymbol{y})=u_x(x,\boldsymbol{y})$ mit der Veränderlichen $\boldsymbol{y}$ (x festhalten).

Integration der Dgl. nach y:

dSolve(u_x'+u_x+x+y+1=0,y,u_x)

$\{u_x=e^{-y}\cdot const(1)-x-y\}$

oder mit der Umbezeichnung in g(y):

dSolve(g'+g+x+y+1=0,y,g)

$\{g=e^{-y}\cdot const(1)-x-y\}$

Für die Integrationskonst. const(1) gilt const(1)=C1(x).

Nun Integration nach x:

$$\text{dSolve}\left(u'=e^{-y}\cdot C1-x-y,x,u\right)$$

$$\left\{u=C1\cdot x\cdot e^{-y}-\frac{x^2}{2}-x\cdot y+\text{const}(1)\right\}$$

$$u(x,y)=\int_{\square}^{\square} u_x dx= C1(x)\cdot x\cdot e^{-y}-\frac{x^2}{2}-x\cdot y+C2(y)$$

Für die Integrationskonst. const(1) gilt jetzt const(1)=C2(y).

Zusammenfassend mit $C1(x)\cdot x=A(x)$ und $C2(y)=B(y)$:

$$\mathbf{u(x,y)=A(x)}\cdot e^{-y}-\frac{x^2}{2}-x\cdot y+\mathbf{B(y)}$$

Aufg. 3.5h)

Lösung der PDG $u_y=\frac{x}{y}u_x$ **mithilfe des totalen Differenzials $du=u_xdx+u_ydy$,**
d.h.

$$du=u_xdx+\frac{x}{y}u_xdy=\left(1+\frac{x}{y}\cdot y'\right)\cdot u_xdx.$$

Betrachtet man nun eine Höhenlinie der Fläche u(x,y) gilt dort u=const. und du=0, d.h.
für die **Höhenlinien u=const.** gilt auf der Fläche u die sogen. **charakteristische Gleichung**:

$$1+\frac{x}{y}\cdot y'=0.$$

Hieraus folgt

$$\text{dSolve}\left(1+\frac{x}{y}\cdot y'=0, x, y\right)$$

$$\left\{y=\frac{\text{const}(1)}{|x|}\right\}$$

Jede Höhenlinie (**Charakteristik** oder **charakteristische Kurve** der PDG) hat die Gleichung xy=c, d.h. **u(x,y)=φ(xy)**, wobei die äußere Funktion **φ(t)** beliebig wählbar ist.
(Für u=const. ist **xy=c** und damit **φ(c)=const.)**

Diese Lösungsmethode heißt **Charakteristikenmethode**, vgl. auch Bartsch [1], S. 618 oder Preuß/Kirchner [3], S.88.

Lösungsweg nach [1] und [3]:
Normalform der PDG als **$Pu_x+Qu_y=R$**, d.h. mit P=x, Q=-y und R=0:
$xu_x-yu_y=0$.
Proportion du:dy:dx=R:Q:P ergibt die gewöhnlichen Einzeldgln.

dy:dx=Q:P, d.h. y'=-y/x bzw. $1+\frac{x}{y}\cdot y'=0$ (s.o.)

und
du=0, d.h. u=const. (s.o.).
usw.