4.HA F5.3, 8-11, 14

Aufg. 5.3

Zerlegung des Integranden in 2 Partialbrüche

$$\mathrm{expand}\left(\frac{1}{3z^2+27}, z\right)$$

$$\frac{j}{18\cdot(3\cdot j-z)}+\frac{j}{18\cdot(3\cdot j+z)}$$

Damit gilt

$$\oint_C \frac{1}{3z^2+27}\,dz = -\frac{j}{18}\times\oint_C \frac{1}{z-3j}\,dz + \frac{j}{18}\times\oint_C \frac{1}{z+3j}\,dz$$

Sei $z_1=3j$ und $z_2=-3j$.

1. Falls weder z_1 und z_2 im Innengebiet von C liegen,

ist $f(z)=\dfrac{1}{3z^2+27}$ holomorph in C und es gilt:

$$\oint_C \frac{1}{3z^2+27}\,dz = 0 \quad \text{(CIS)}$$

2. Falls z_1 und z_2 im Innengebiet von C liegen, gilt

$$\oint_C \frac{1}{3z^2+27}\,dz = -\frac{j}{18}\times\oint_{C_1}\frac{1}{z-3j}\,dz + \frac{j}{18}\times\oint_{C_2}\frac{1}{z+3j}\,dz\,,$$

wobei C_1 und C_2 kleine Kreise um z_1 bzw. z_2 bedeuten:

$$\oint_{C_1}\frac{1}{z-z_1}\,dz = 2\pi j \text{ und } \oint_{C_2}\frac{1}{z-z_2}\,dz = 2\pi j, \text{ d.h.}$$

$$\oint_C \frac{1}{3z^2+27}\,dz = -\frac{j}{18}\times 2\pi j + \frac{j}{18}\times 2\pi j = 0$$

3. Falls nur z_1 im Innengebiet von C liegt, gilt

$$\oint_C \frac{1}{3z^2+27}\,dz = -\frac{j}{18}\times 2\pi j + \frac{j}{18}\times 0 = \frac{\pi}{9}$$

4. Falls nur z_2 im Innengebiet von C liegt, gilt

$$\oint_C \frac{1}{3z^2+27}\,dz = -\frac{j}{18}\times 0 + \frac{j}{18}\times 2\pi j = -\frac{\pi}{9}$$

5. Falls z_1 oder z_2 auf dem Rand von C liegen,

existiert das Integral nicht (Integration über eine Polstelle hinweg.)

Aufg. 5.8
==========

Vorbetrachtung: (vgl. LV am 20.04.2010)

Integration von $f(\zeta)=\frac{1}{\zeta}$ entlang eines Weges C (links der Polstelle $\zeta_0=0$) mit Blattwechsel:
C: Geradenstück von $\zeta_1=-1+\mathbf{j}$ nach $\zeta_2=-1-\mathbf{j}$,
d.h. $\zeta(t)=-1+\mathbf{j}+t\times(-2\mathbf{j})$, $0\le t\le 1$.

$$\int_C^0 \frac{1}{\zeta}\,d\zeta=\int_0^1 \frac{1\times(-2\mathbf{j})}{-1+\mathbf{j}+t\times(-2\mathbf{j})}\,dt=$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t-\frac{-1+\mathbf{j}}{2\mathbf{j}}}\,dt=$$

$$\ln\left(1-\frac{-1+\mathbf{j}}{2\mathbf{j}}\right)-\ln\left(0-\frac{-1+\mathbf{j}}{2\mathbf{j}}\right)$$

$$\frac{\pi\cdot\mathbf{j}}{2}$$

Nebenrechnung: beide Zahlen im gleichen Blatt
(Endpunkt im IV.Quadranten, Anfangspunkt im III.Quadranten)

$$1-\frac{-1+\mathbf{j}}{2\mathbf{j}}$$

$$\frac{-\mathbf{j}}{2}+\frac{1}{2}$$

$$0-\frac{-1+\mathbf{j}}{2\mathbf{j}}$$

$$\frac{-j}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\ln\left(1-\frac{-1+j}{2j}\right)=\ln\left|\frac{-j}{2}+\frac{1}{2}\right|+j\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\ln\left(0-\frac{-1+j}{2j}\right)=\ln\left|\frac{-j}{2}-\frac{1}{2}\right|+j\times\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Somit

$$\ln\left(1-\frac{-1+j}{2j}\right)-\ln\left(0-\frac{-1+j}{2j}\right)=\ln\left|\frac{-j}{2}+\frac{1}{2}\right|+j\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\ln\left|\frac{-j}{2}-\frac{1}{2}\right|+j\times\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi\cdot j}{2}$$

Nun Integration von $f(\zeta)=\frac{1}{\zeta}$ mit Stammfunktion:

$$\int_{-1+j}^{-1-j}\frac{1}{\zeta}\,d\zeta$$

$$\frac{-3\cdot\pi\cdot j}{2}$$

Das Ergebnis ist falsch wegen Nichtbeachtung eines Blattwechsels

$$\int_{\square}^{\square}\frac{1}{\zeta}\,d\zeta$$

$$\ln(\zeta)$$

Es gilt also korrekt:

$\ln_1(-1-j)-\ln_0(-1+j)=$

$\ln(-1-j)+1\times2\pi j-\ln(-1+j)$

$$\frac{\pi\cdot j}{2}$$

Weitergehende Erläuterung

(vgl. Merkblatt Grundstudium Mathematik 1):

Die ln(ζ)-Funktion erzeugt ln-Werte in einem festen Parallelstreifen der Breite $2\pi\mathbf{j}$ (z.B. Parallelstreifen D_0 von $-\pi\mathbf{j}$ bis $\pi\mathbf{j}$),

d.h. verläuft in einer ζ-Ebene die Integrationskurve C nicht über die negative reelle Achse (Re(ζ)-Achse),

so entstehen für die Kurvenpunkte $\zeta=r\times e^{\mathbf{j}t}$ keine Winkel über $t=\pi$ hinaus (bzw. kleiner als $t=-\pi$) und die ln(ζ)-Werte liegen in einem festen Parallelstreifen.

Verläuft jedoch die Kurve vom II.Quadranten in den III.Quadranten hinein, bedeutet dies ein Blattwechsel (z.B. von Blatt 0 nach Blatt 1) und damit für die ln(ζ)-Werte ein Wechsel in den benachbarten Parallelstreifen nach oben (z.B. von D_0 nach D_1), weil der Winkel $t=\pi$ überschritten wird.

Verläuft hingegen die Kurve vom III.Quadranten in den II.Quadranten hinein, bedeutet dies ein Blattwechsel (z.B. von Blatt 0 nach Blatt -1) und damit für die ln(ζ)-Werte ein Wechsel in den benachbarten Parallelstreifen nach unten (z.B. von D_0 nach D_{-1}), weil der Winkel $t=-\pi$ unterschritten wird.

Wir kommen nun zur eigentlichen Aufg. 5.8
und treffen die Fallunterscheidung wie folgt (die Polstellen liegen nicht auf C, vgl. Aufgabenstellung!)

Wir betrachten dazu die geschlossene Kurve aus C und der Strecke von 0 bis 1:

1. C und die Strecke von 0 bis 1 umschließen keine Polstelle (CIS, Formel (1.4)):

$$\int_{C}^{\square} f(z)\,dz + \int_{1}^{0} \frac{1}{t^{2}+1}\,dt = 0, \text{ d.h.}$$

$$\int_{C}^{\square} f(z)\,dz = -\int_{1}^{0} \frac{1}{t^{2}+1}\,dt =$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{t^{2}+1}\,dt$$

$$\frac{\pi}{4}$$

2. C und die Strecke von 0 bis 1 umschließen die Polstelle $z_1=\mathbf{j}$:

PBZ:

$$\text{expand}\left(\frac{1}{t^{2}+1}, t\right)$$

$$\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})} - \frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}$$

$$\int_{C}^{\square} f(z)\,dz + \int_{1}^{0} \frac{1}{t^{2}+1}\,dt =$$

$$\int_{C}^{\square} \frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})} - \frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}\,dz + \int_{1}^{0} \frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})} - \frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}\,dt =$$

$$\left(\int_{C}^{\square}\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})}\,dz+\int_{1}^{0}\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})}\,dt\right)+\left(\int_{C}^{\square}\frac{-\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}\,dz+\int_{1}^{0}\frac{-\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}\right.$$

$$0+\frac{-\mathbf{j}}{2}\times 2\pi\mathbf{j}$$

$$\pi$$

d.h.

$$\int_{C}^{\square} f(z)\,dz=$$

$$\pi-\int_{1}^{0}\frac{1}{t^{2}+1}\,dt$$

$$\frac{5\cdot\pi}{4}$$

3. C und die Strecke von 0 bis 1 umschließen die Polstelle $z_2=-\mathbf{j}$:

$$\int_{C}^{\square} f(z)\,dz+\int_{1}^{0}\frac{1}{t^{2}+1}\,dt=$$

$$\int_{C}^{\square}\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})}-\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}\,dz+\int_{1}^{0}\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})}-\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}\,dt=$$

$$\left(\int_{C}^{\square}\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})}\,dz+\int_{1}^{0}\frac{\mathbf{j}}{2\cdot(t+\mathbf{j})}\,dt\right)+\left(\int_{C}^{\square}\frac{-\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}\,dz+\int_{1}^{0}\frac{-\mathbf{j}}{2\cdot(t-\mathbf{j})}\right.$$

$$\frac{\mathbf{j}}{2}\times 2\pi\mathbf{j}+0$$

$$-\pi$$

d.h.

$$\int_{C}^{\square} f(z)\,dz =$$

$$-\pi - \int_{1}^{0} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$\frac{-3\cdot\pi}{4}$$

4. C und die Strecke von 0 bis 1 umschließen beide Polstellen $z_1=j$ und $z_2=-j$:

$$\int_{C}^{\square} f(z)\,dz + \int_{1}^{0} \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$\int_{C}^{\square} \frac{j}{2\cdot(t+j)} - \frac{j}{2\cdot(t-j)}\,dz + \int_{1}^{0} \frac{j}{2\cdot(t+j)} - \frac{j}{2\cdot(t-j)}\,dt =$$

$$\left(\int_{C}^{\square} \frac{j}{2\cdot(t+j)}\,dz + \int_{1}^{0} \frac{j}{2\cdot(t+j)}\,dt\right) + \left(\int_{C}^{\square} \frac{-j}{2\cdot(t-j)}\,dz + \int_{1}^{0} \frac{-j}{2\cdot(t-j)}\right.$$

$$\frac{j}{2}\times 2\pi j - \frac{j}{2}\times 2\pi j$$

$$0$$

d.h. $\int_{C}^{\square} f(z)\,dz =$

$$0 - \int_{1}^{0} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$\frac{\pi}{4}$$

Aufg. 5.9
==========

a) $\oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi j$, da die Polstelle $z_1=2j$
(Sigularität) innerhalb von C_1 liegt (Skizze!)
(C_1 im math. pos. Sinn orientiert)
Bem.: $|z_1-z_0|=|j-1|=\sqrt{2}<4=r$, d.h. Abstand von z_1
zu z_0 kleiner als der Radius r.

$\oint_{C_2} \frac{1}{z-z_0} dz = 0$ nach dem CIS, da die Polstelle

außerhalb der Ellipse C_2 liegt, d.h. $f(z)=\frac{1}{z-z_0}$ ist

innerhalb von C_2 holomorph.

b) PBZ:
$\text{expand}\left(\frac{z}{(z-1-2j)\times(z-1)}, z\right)$

$$\frac{j}{2\cdot(z-1)}+\frac{1-\frac{j}{2}}{z-1-2\cdot j}$$

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{j}{2}\times\frac{1}{z-1}+\left(1-\frac{j}{2}\right)\times\frac{1}{z-(1+2\cdot j)} dz =$$

$$\frac{j}{2}\times\oint_{C_1} \frac{1}{z-1} dz+\left(1-\frac{j}{2}\right)\times\oint_{C_1} \frac{1}{z-(1+2\cdot j)} dz =$$

$$\frac{j}{2}\times 2\pi j+\left(1-\frac{j}{2}\right)\times 2\pi j=2\pi j,$$

da beide Polstellen innerhalb des Kreises liegen:

$|1-(1+j)|$

$$1$$

$|1+2\cdot j-(1+j)|$

$$1$$

c) PBZ:

$$\mathrm{expand}\left(\frac{1}{\left(z^2+4\right)\times(z+1)},z\right)$$

$$\frac{1}{5\cdot(z+1)}+\frac{-\frac{1}{10}+\frac{j}{20}}{z+2\cdot j}+\frac{-\frac{1}{10}-\frac{j}{20}}{z-2\cdot j}$$

C ist ein Kreis (quadratische Ergänzung!):

$(x-1)^2+(y-1)^2=9$, d.h. $z_0=1+j$, $r=3$.

$|-1-(1+j)|$

$$\sqrt{5}$$

$|2j-(1+j)|$

$$\sqrt{2}$$

$|-2j-(1+j)|$

$$\sqrt{10}$$

Wegen $\sqrt{10}>3$ liegt die Polstelle $-2j$ nicht im Kreis.

Mit dem verallgemeinerten CIS folgt:

$$\oint_C f(z)dz=$$

$$\frac{1}{5}\times\oint_C \frac{1}{z+1}\,dz+\left(-\frac{1}{10}+\frac{j}{20}\right)\times\oint_C \frac{1}{z+2j}\,dz+\left(-\frac{1}{10}-\frac{j}{20}\right)\times\oint_C \frac{1}{z-2j}\blacktriangleright$$

$$\frac{1}{5}\times 2\pi j+\left(-\frac{1}{10}+\frac{j}{20}\right)\times 0+\left(-\frac{1}{10}-\frac{j}{20}\right)\times 2\pi j$$

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{j}{5}\right)\cdot\pi$$

Aufg. 5.10
==========

a) $F(z)=\frac{1}{2}\times z^2+5$ ist eine Stammfunktion zu $f(z)=z$,

denn $F'(z)=z$.
$f(z)$ ist überall holomorph. Somit gilt

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1)$$

Define $F(z)=\frac{1}{2}\times z^2+5$

done

$F(-1+j)-F(-1-3j)$

$4-4\cdot j$

b) $F(z)=j\times\ln(z+j)+5$ ist innerhalb eines Blattes

(z.B. Blatt 0) eine Stammfunktion zu $f(z)=\frac{j}{z+j}$,

denn $F'(z)=\frac{j}{z+j}$.

Die Integrationskurve verläuft links von der Polstelle $-j$ von $-1-3j$ über $-1-j$ nach $-1+j$ und verläuft damit bei $-1-j$ vom vorhandenen Blatt in ein darunter liegendes Blatt (vgl. weitergehende Erläuterung in Aufg. **F5.**3).

Damit ergibt sich folgende Lösung (mit z_1 im Blatt 0 und z_2 im Blatt -1):

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2)+j\times(-1)\times 2\pi j-F(z_1)$$

Wir definieren die ln-Funktion im k-ten Blatt wie folgt:

Define F(z,k)=$j\times(\ln(z+j)+k\times 2\pi j)+5$

done

F(-1+j,-1)-F(-1-3j,0)

$$\left(\frac{\ln(5)}{2}+\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\cdot j-2\cdot\pi\cdot j\right)\cdot j-\left(\frac{\ln(5)}{2}-\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cdot\right.\right.$$

cExpand(ans)

$$-2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\pi$$

approx(ans)

2.214297436

Das Ergebnis kann auch als **2×arctan(2)** angegeben werden:

approx($2\cdot\tan^{-1}(2)$)

2.214297436

Es gilt die Umrechnung $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan(2)$.

Aufg. 5.11

==========

a) PBZ:

$$\text{expand}\left(\frac{4z}{(z-8)\times(z+6j)},z\right)$$

$$\frac{\frac{64}{25}-\frac{48\cdot j}{25}}{z-8}+\frac{\frac{36}{25}+\frac{48\cdot j}{25}}{z+6\cdot j}$$

$|8-(1+j)|$

$$5\cdot\sqrt{2}$$

$|-6j-(1+j)|$

$$5\cdot\sqrt{2}$$

Wegen $5\cdot\sqrt{2}>6=r$ liegen beide Polstellen außerhalb des Kreises. Somit ergibt sich unmittelbar

$\oint_C f(z)dz=0$, da $f(z)$ innerhalb des Kreises holomorph ist.

b) Zerlegung von $f(z)=\frac{z^2}{z-2}$

$\text{expand}\left(\frac{z^2}{z-2},z\right)$

$$z+\frac{4}{z-2}+2$$

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C (z+2)dz+4\times\oint_C \frac{1}{z-2}dz=0+4\times 2\pi j=8\pi j$$

Da erste Teilintegral ist 0 wegen des CIS (z+2 ist über all holomorph.)

Aufg. 5.14
==========

a) das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+a^2}\,dx\,,\ a>0,\ \text{ist im Reellen schwer}$$

berechenbar.

Im Bartsch S.780, Nr. (80), findet man das Integral
(Variablen umbezeichnet)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha \times t)}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2} \times e^{-|\alpha|}$$ und mit passender

Substitution löst man die obige Aufgabe:

Es sei $\alpha>0$ und $\frac{\alpha}{3}=a$, Subst. $\alpha \times t=3x$, d.h. $dt=\frac{3}{\alpha}dx$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha \times t)}{t^2+1}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{\left(\frac{3}{\alpha}x\right)^2+1}\,\frac{3}{\alpha}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} \times \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 \times \frac{3}{\alpha}$$

Somit gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a} \times e^{-3a}$$

**Berechnung über ein komplexes Kurven-
integral mit übergang zu einer passenden
komplexen Funktion**

----

für die gerade Funktion $\frac{\cos(3x)}{x^2+a^2}$ wird die gesamte reelle Achse betrachtet:

$f(z)=\frac{e^{3zj}}{z^2+a^2}$ und Integration über einen geschlossenen Weg C entlang der x-Achse (von z=-R bis z=R, später $R\to\infty$), dann über den oberen Halbkreis von z=R über z=Rj bis z=-R (Skizze!).

f(z) ist innerhalb von C holomorph bis auf die Polstelle bei z=aj (a>0):

$$\oint_C f(z)\,dz =$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{3xj}}{x^2+a^2}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{3R\times(\cos(t)+j\sin(t))j}}{R^2\times e^{j2t}+a^2}\times\left(R\times e^{jt}\times j\right)dt =$$

$$2\pi j\times\left(e^{-3\cdot a}\times\frac{1}{2ja}\right)=\frac{\pi}{a}\times e^{-3\cdot a}$$

Im ersten Teilintegral gilt z=x,
im zweiten Teilintegral wird die Parameterdarstellung $z(t)=R\times e^{jt}=R\times(\cos(t)+j\sin(t))$, $0\le t\le\pi$, genutzt.

Für den Integranden wurden die PBZ und die Reihendarstellung genutzt:

$$\frac{1}{z^2+a^2}=\frac{A}{z+ja}+\frac{B}{z-ja} \quad \text{mit } A=-B=\frac{-1}{2ja}$$

$$\frac{1}{(z-ja)}\times\text{taylor}\left(e^{j3z},z,2,ja\right)$$

$$\frac{e^{-3\cdot a}-\frac{9\cdot(z-a\cdot j)^2\cdot e^{-3\cdot a}}{2}+3\cdot(z-a\cdot j)\cdot e^{-3\cdot a}\cdot j}{z-a\cdot j}$$

Nur die Potenz $\frac{1}{z-aj}=(z-aj)^{-1}$ mit dem Koeffizienten $e^{-3\cdot a}\times B=e^{-3\cdot a}\times\frac{1}{2ja}$ spielt eine Rolle (die anderen Summanden sind holomorph und ergeben keinen Integralanteil). Der spezielle Koeffizient zur Potenz $(z-aj)^{-1}$ heißt **Residuum.**

Abschließend ist der Halbkreis im Grenzfall auszuwerten, vgl. b):

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\pi} f(R\times e^{jt})\times Rj\times e^{jt}\,dt\right)=0.$$

Endergebnis:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(3x)}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\times\oint_C f(z)dz=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{a}\times e^{-3\cdot a}=\frac{\pi}{2a}\times e^{-3\cdot a}$$

b) Das CAS (ClassPad) liefert ein numerisches Ergebnis:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x\cdot\left(x^2+1\right)}\,dx$$

1.358212155

Das exakte Ergebnis lautet:

$$\frac{\pi}{2}\times\left(1-e^{-2}\right)$$

1.358212161

Der Integrand ist eine gerade Funktion.

Wir betrachten eine geschlossene Kurve C (math. pos. orientiert) in der Gauß'schen Zahlenebene, die die reelle Achse enthält:
C liegt anteilig in der oberen Halbebene mit dem oberen Halbkreis von z=R über z=R**j** nach z=-R (R>1, später R→∞). Die reelle Achse wird noch durch einen kleinen oberen Halbkreis von z=-r über z=r**j** nach z=r (0<r<1, später r→0) unterbrochen, um den Koordinatenursprung mit der Polstelle z=0 zu umgehen. Damit gibt es innerhalb von C nur die Polstelle z=**j**.

Es gilt nun mit der ungeraden Funktion $\frac{\cos(2x)}{x\cdot\left(x^2+1\right)}$

und der geraden Funktion $\frac{\sin(2x)}{x\cdot\left(x^2+1\right)}$:

$$\int_0^{R} \frac{\sin(2x)}{x\cdot\left(x^2+1\right)}\,dx = \frac{1}{2\mathbf{j}}\int_{-R}^{R} \frac{\cos(2x)+\mathbf{j}\sin(2x)}{x\cdot\left(x^2+1\right)}\,dx$$

Übergang in die komplexe Zahlenebene mit

$f(z)=\frac{1}{2\mathbf{j}}\times\frac{e^{\mathbf{j}2z}}{z\cdot\left(z^2+1\right)}$ und PBZ für $\frac{1}{z\cdot\left(z^2+1\right)}$:

$$\mathrm{expand}\left(\frac{1}{z\cdot(z^2+1)},z\right)$$

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{2\cdot(z+j)}-\frac{1}{2\cdot(z-j)}$$

Somit $f(z)=\frac{1}{2j}\times\frac{e^{j2z}}{z}-\frac{1}{4j}\times\frac{e^{j2z}}{z+j}-\frac{1}{4j}\times\frac{e^{j2z}}{z-j}$ und

Beachtung der Polstelle innerhalb von C:

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C \frac{j\times e^{-2}}{4\cdot(z-j)}dz=\frac{j\times e^{-2}}{4}\times 2\pi j=-\frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

Wir betrachten dazu die Reihenentwicklung des

Summanden $\frac{1}{2j}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{e^{j2z}}{z-j}$ nach Potenzen von

$(z-j)$, wobei dann nur die Potenz $\frac{1}{z-j}=(z-j)^{-1}$

eine Rolle spielt.

Integrale über $(z-j)^m$, $m\geq 0$, sind Null und liefern keinen Anteil (holomorphe Anteile).

$$-\frac{1}{4j\cdot(z-j)}\times\mathrm{taylor}\left(e^{j2z},z,2,j\right)$$

$$\frac{-\left(2\cdot(z-j)^2\cdot e^{-2}-2\cdot(z-j)\cdot e^{-2}\cdot j-e^{-2}\right)\cdot j}{4\cdot(z-j)}$$

Abschließend sind die Halbkreise im Grenzfall auszuwerten

mit $z=z(t)=R\times e^{jt}, 0\leq t\leq\pi$, bzw.

$z=z(t)=r\times e^{jt}, \pi\geq t\geq 0$,

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\pi} f\left(R\times e^{jt}\right)\times R j\times e^{jt}\,dt\right) \quad \text{und}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(\int_0^{\pi} f\left(r\times e^{jt}\right)\times r j\times e^{jt}\,dt\right)$$

Es gilt:

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\pi} f\left(R\times e^{jt}\right)\times R j\times e^{jt}\,dt\right)=0, \quad \text{denn}$$

$$\left|\int_0^{\pi} f\left(R\times e^{jt}\right)\times R j\times e^{jt}\,dt\right| \le$$

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{2jR\times(\cos(t)+j\sin(t))}}{R\times e^{jt}\times\left(R^2\times e^{2jt}+1\right)}\times R j\times e^{jt}\right| dt =$$

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{-2R\times\sin(t)}}{\left(R^2\times e^{2jt}+1\right)}\right| dt \le \int_0^{\pi}\frac{e^{-2R\times\sin(t)}}{\left(R^2-1\right)}\,dt \to 0 \quad \text{für } R\to\infty$$

($\sin(t)>0$ im betrachteten t-Intervall).

und

$$-\int_0^{\pi} f\left(r\times e^{jt}\right)\times r j\times e^{jt}\,dt =$$

$$\frac{-1}{2j}\times\int_0^{\pi}\frac{e^{2jr\times(\cos(t)+j\sin(t))}}{r\times e^{jt}\times\left(r^2\times e^{2jt}+1\right)}\times r j\times e^{jt}\,dt$$

$$=\frac{-1}{2j}\times\int_0^{\pi}\frac{e^{2jr\times(\cos(t)+j\sin(t))}}{r^2\times e^{2jt}+1}\times j\,dt \;\rightarrow$$

$$\frac{-1}{2j}\times\int_0^{\pi}\frac{e^{0}}{(0+1)}\times j\,dt=-\frac{\pi}{2}$$ für $r\rightarrow 0$.

Endergebnis:

$$\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)+j\sin(2x)}{x\cdot\left(x^2+1\right)}dx-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}e^{-2}$$ ergibt

$$\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)+j\sin(2x)}{x\cdot\left(x^2+1\right)}dx=\frac{\pi}{2}\times\left(1-e^{-2}\right).$$

c) reelle Integration des uneigentlichen Integrals (echt gebrochen rationale Funktion) möglich:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}$$

Das CAS (ClassPad) liefert das exakte Ergebnis!

Rechnung im Reellen mit PBZ ist aufwändig, Faktorisierung des Nenners:

$\mathrm{rFactor}\left(1+x^4\right)$

$$\left(x+\left(\frac{1}{2}+\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(x\triangleright\right.$$

$$\text{expand}\left(\left(x+\left(\frac{1}{2}+\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\right)$$

$$x^2+\sqrt{2}\cdot x+1$$

$$\text{expand}\left(\left(x+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{i}}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\right)$$

$$x^2-\sqrt{2}\cdot x+1$$

Ansatz PBZ im Reellen:

$\frac{1}{1+x^4}=\frac{A\times x+B}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{C\times x+D}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}$ mit Hauptnenner

durchmultiplizieren:

DelVar A,B,C,D

done

$$1=(A\times x+B)\times\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)+(C\times x+D)\times\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)\Rightarrow\text{equa}\triangleright$$

$$1=\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)\cdot(C\cdot x+D)+\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)\cdot(A\cdot x+B)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{equation}|x=0\\ \text{equation}|x=1\\ \text{equation}|x=-1\\ \text{equation}|x=2\end{array}\right|_{A,B,C,D}$$

$$\left\{A=\frac{3\cdot\sqrt{2}-4}{2\cdot\left(-\sqrt{2}+2\right)^2},B=\frac{1}{2},C=\frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\cdot\left(-\sqrt{2}+2\right)},D=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right.}{-2\cdot\sqrt{2}+4}\triangleright\right.$$

simplify(ans)

$$\left\{A=\frac{\left(3\cdot\sqrt{2}-4\right)\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)^2}{8},B=\frac{1}{2},C=\frac{-\sqrt{2}}{4},D=\frac{1}{2}\right\}$$

Stammfunktionen:

$$\frac{(3\cdot\sqrt{2}-4)\cdot(\sqrt{2}+2)^2}{8} \Rightarrow A$$

$$\frac{(3\cdot\sqrt{2}-4)\cdot(\sqrt{2}+2)^2}{8}$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow B$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow C$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow D$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\text{Define } F1(x)=\int_{\square}^{\square} \frac{A\times x+B}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}\,dx$$

done

$$\text{Define } F2(x)=\int_{\square}^{\square} \frac{C\times x+D}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}\,dx$$

done

Define F(x)=F1(x)+F2(x)

done

$$\lim_{x\to\infty} (F(x))$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}(F(x))$$

0

Rechnung mittels CIS und PBZ unter Beachtung der Polstellen:

$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ hat vier komplexe Polstellen z_k, $k=0,1,2,3$:

$\mathrm{solve}\left(z^4+1=0,z\right)$

$$\left\{z=\left(-\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2},z=\left(-\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2},z=\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2},z=\left(\frac{1}{2}\right.\right.\blacktriangleright$$

Hauptwurzel $z_0=\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}$, 1. Nebenwurzel

$z_1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}$, beide oberhalb der reellen Achse.

Wir betrachten in der oberen Halbebene die Strecke von $z=-R$ bis $z=R$ (auf der reellen Achse) und dann den oberen Halbkreis von $z=R$ über $z=Rj$ nach $z=-R$ ($R>1$, später $R\to\infty$) als geschlossene Kurve C (math. pos. orientiert). Nach dem CIS gilt:

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=0}^{3}\left(\oint_C \frac{A_k}{z-z_k}dz\right) = A0\times 2\pi j + A1\times 2\pi j + A2\times 0$$

$+ A3\times 0 = (A0 + A1)\times 2\pi j$

$\mathrm{rFactor}\left(z^4+1\right)$

$$\left(z+\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(z+\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(z+\left(-\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(z\blacktriangleright\right.$$

Kennt man die Koeffizienten aus der PBZ, ist die Aufgabe praktisch gelöst:

DelVar A0,A1,A2,A3

done

$$\frac{1}{z^4+1}=\frac{A0}{z+\left(-\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{A1}{z+\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{A2}{z+\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{A3}{z+\left(-\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}$$

Hieraus (Abspeicherung der Gleichung unter dem Namen **equation**):

$$1=\frac{A0\times\left(z^4+1\right)}{z+\left(-\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{A1\times\left(z^4+1\right)}{z+\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{A2\times\left(z^4+1\right)}{z+\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{|}{z+|}$$

$$1=\frac{A0\cdot\left(z^4+1\right)}{z+\left(-\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{A1\cdot\left(z^4+1\right)}{z+\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{A2\cdot\left(z^4+1\right)}{z+\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}+\frac{|}{z+|}$$

Berechnung der Koeffizienten der PBZ unter Nutzung spezieller z-Werte in der **equation**:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{equation}|z=0\\ \text{equation}|z=1\\ \text{equation}|z=-1\\ \text{equation}|z=2\end{array}\right|_{A0,A1,A2,A3}$$

$$\left\{A0=\left(-\frac{1}{8}-\frac{j}{8}\right)\cdot\sqrt{2},A1=\left(\frac{1}{8}-\frac{j}{8}\right)\cdot\sqrt{2},A2=\left(\frac{1}{8}+\frac{j}{8}\right)\cdot\sqrt{2},A3=\right.$$

$$\int_C^{D} f(z)dz=$$

$$\left(\left(-\frac{1}{8}-\frac{j}{8}\right)\cdot\sqrt{2}+\left(\frac{1}{8}-\frac{j}{8}\right)\cdot\sqrt{2}\right)\times 2\pi j$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{2}$$

Das Integral über den Halbkreis $z(t)=R\times e^{jt}, 0\le t\le\pi$, verschwindet für $R\to\infty$.

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{1\times R\times e^{jt}\times j}{\left(R\times e^{jt}\right)^4+1}dt\right|\le\int_0^{\pi}\left|\frac{1\times R\times e^{jt}\times j}{\left(R\times e^{jt}\right)^4+1}\right|dt\le$$

$$\int_0^{\pi}\frac{R}{\left|R\times e^{jt}\right|^4-1}dt=\frac{R}{R^4-1}\times\int_0^{\pi}1dt=\frac{R\times\pi}{R^4-1}\to 0 \text{ für } R\to\infty.$$

Das Integral über die reelle Achse ($R\to\infty$) ist somit:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{2}, \text{ d.h.}$$

für die gerade Funktion im Integranden erhält man das Endergebnis:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4} \quad .$$