3.HA F5.1, 2, 4-7
====================

Aufg. 5.1

Zerlegung des Integrals in 4 Teilintegrale über die vorgeg. Wegstücke, vgl. **F1.**29

C_1: $z(t)=-2+2j+t\times(1-2j)$, $0\le t\le 1$,
C_2: $z(t)=e^{j\pi\times(1-t)}$, $0\le t\le 1$,
C_3: $z(t)=1+t$, $0\le t\le 1$,
C_4: $z(t)=2\times(1+jt)$, $0\le t\le 1$.

$$\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz+\ \dots\ +\oint_{C_4} f(z)dz$$

$$=\sum_{k=1}^{4}\left(\int_0^1 f(z(t))\times z'(t)dt\right)$$

$$=(1+j)\times\int_0^1\frac{1-2j}{-2+2j+t\times(1-2j)}dt+$$

$$(1+j)\times\int_0^1\frac{e^{j\pi\times(1-t)}\times(-j\pi)}{e^{j\pi\times(1-t)}}dt+$$

$$(1+j)\times\int_0^1\frac{1}{1+t}dt+$$

$$(1+j)\times\int_0^1\frac{2j}{2\times(1+jt)}dt$$

NR im CAS:

$$(1+j)\times\int_0^1 \frac{1-2j}{-2+2j+t\times(1-2j)}\,dt \Rightarrow I_1$$

$$(-1-j)\cdot\left(\frac{3\cdot\ln(2)}{2}-\frac{\pi\cdot j}{4}\right)$$

$$(1+j)\times\int_0^1 \frac{e^{j\pi\times(1-t)}\times(-j\pi)}{e^{j\pi\times(1-t)}}\,dt \Rightarrow I_2$$

$$(1-j)\cdot\pi$$

$$(1+j)\times\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt \Rightarrow I_3$$

$$(1+j)\cdot\ln(2)$$

$$(1+j)\times\int_0^1 \frac{2j}{2\times(1+jt)}\,dt \Rightarrow I_4$$

$$(1+j)\cdot\left(\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\pi\cdot j}{4}\right)$$

Ergebnis:

$I_1+I_2+I_3+I_4$

$$(1-j)\cdot\pi+(1+j)\cdot\ln(2)+(-1-j)\cdot\left(\frac{3\cdot\ln(2)}{2}-\frac{\pi\cdot j}{4}\right)+(1+j)\cdot\left(\frac{1}{\ }\right.$$

simplify(ans)

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$$

Direkte Berechnung im Holomorphiegebiet (über Stammfunktion):

$$\int_{-2+2j}^{2+2j} \frac{1+j}{z}\,dz$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$$

denn es gilt z.B. im Blatt 0 (Hauptwerte des ln(...) im Parallelstreifen D_0):

$$\text{Define } F(z)=\int \frac{1+j}{z}\,dz$$

done

F(z)

$$(1+j)\cdot\ln(z)$$

$$(1+j)\times(\ln(2+2j)-\ln(-2+2j))$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\right)\cdot\pi$$

Aufg. 5.2, vgl. Aufg. F1.30c)
(quadratische Ergänzung, Kreisgeichung um 1+j mit Radius $\sqrt{2}$)

C: $z(t)=1+j+\sqrt{2}\times e^{jt}$, $0\le t\le 2\pi$.

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z(t))\times z'(t)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\,j\times e^{jt}}{\left(1+j+\sqrt{2}\times e^{jt}-1\right)\times\left(\left(1+j+\sqrt{2}\times e^{jt}\right)^2+1\right)}dt$$

0

Das Ergebnis 0 ist falsch, da innerhalb des

Kreisgebietes
singuläre Stellen liegen: $z_1=1$ und $z_2=j$ (CIS, Formel (1.4) trifft nicht zu)

PBZ und Integration der einzelnen Partialbrüche auf Kreisen um die Singularität:

$$\mathrm{expand}\left(\frac{1}{(z-1)\times\left((z)^2+1\right)},z\right)$$

$$\frac{1}{2\cdot(z-1)}+\frac{-\frac{1}{4}-\frac{j}{4}}{z+j}+\frac{-\frac{1}{4}+\frac{j}{4}}{z-j}$$

$$\int_0^{2\pi} f(z(t))\times z'(t)dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)}+\frac{-\frac{1}{4}-\frac{j}{4}}{z+j}+\frac{-\frac{1}{4}+\frac{j}{4}}{z-j}\right)\times z'(t)dt=$$

$$\frac{1}{2}\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\, j\times e^{jt}}{\left(1+\sqrt{2}\times e^{jt}-1\right)}\right)dt+$$

$$\left(-\frac{1}{4}-\frac{j}{4}\right)\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\, j\times e^{jt}}{\left(1+j+\sqrt{2}\times e^{jt}+j\right)}\right)dt+$$

$$\left(-\frac{1}{4}+\frac{j}{4}\right)\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\, j\times e^{jt}}{\left(j+\sqrt{2}\times e^{jt}-j\right)}\right)dt$$

NR im CAS:

erstes Integral mit Kreis um $z_0=1$:

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,\mathbf{j}\times e^{\mathbf{j}t}}{2\cdot\left(1+\sqrt{2}\times e^{\mathbf{j}t}-1\right)}\right)dt$$

$$\pi\cdot\mathbf{j}$$

Mit dem CIS hat man sofort $\frac{1}{2}\times2\pi\mathbf{j}=\pi\mathbf{j}$

zweites Integral verschwindet
(hier: reines Holomorphiegebiet in C):

$$\left(-\frac{1}{4}-\frac{\mathbf{j}}{4}\right)\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,\mathbf{j}\times e^{\mathbf{j}t}}{\left(1+\mathbf{j}+\sqrt{2}\times e^{\mathbf{j}t}+\mathbf{j}\right)}\right)dt$$

$$0$$

drittes Integral mit Kreis um $z_0=\mathbf{j}$:

$$\left(-\frac{1}{4}+\frac{\mathbf{j}}{4}\right)\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}\,\mathbf{j}\times e^{\mathbf{j}t}}{\left(\mathbf{j}+\sqrt{2}\times e^{\mathbf{j}t}-\mathbf{j}\right)}\right)dt$$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{j}}{2}\right)\cdot\pi$$

Mit dem CIS hat man sofort $\left(-\frac{1}{4}+\frac{\mathbf{j}}{4}\right)\times2\pi\mathbf{j}=-\frac{\pi}{2}\times(1+\mathbf{j})$

Ergebnis:

$$\pi\cdot\mathbf{j}+0+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{j}}{2}\right)\cdot\pi$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathbf{j}}{2}\right)\cdot\pi$$

Aufg. 5.4

f(z)=z ist überall holomorph (CRD erfüllt!):

u(x,y)=x, v(x,y)=y

$u_x=v_y=1$ und $u_y=-v_x=0$

eine Stammfunktion ist $F(z)=\frac{z^2}{2}$ (Ableitung $F'(z)=f(z)=z$)

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,dz$$

$$\frac{z_1^2}{2}-\frac{z_0^2}{2}$$

factorOut(ans, $\frac{1}{2}$)

$$\frac{-\left(-z_1^2+z_0^2\right)}{2}$$

factor(ans)

$$\frac{(z_1+z_0)\cdot(z_1-z_0)}{2}$$

oder: Parameterdarstellung $z(t)=z_0+t\times(z_1-z_0)$, $0\le t\le 1$.

$$\int_0^1 (z_0+t\times(z_1-z_0))\times(z_1-z_0)\,dt$$

$$\frac{z_1^2}{2}-\frac{z_0^2}{2}$$

Aufg. 5.5

Gemäß F3.13d) ist f(z) nicht holomorph, d.h. Integration entlang der vorgeg. Kurve

a) C: $z(t)=-1+t,\ 0\le t\le 2.$

$$\int_{C}^{\square} f(z)\,dz = \int_{0}^{2} f(z(t))\times z'(t)\,dt =$$

$$\int_{0}^{2} (-1+t)\times 1\,dt$$

$$0$$

b) s_1: $z(t)=-1+t\mathbf{j},\ 0\le t\le 1.$

$$\int_{0}^{1} (-1-t\mathbf{j})\times \mathbf{j}\,dt$$

$$-\mathbf{j}+\frac{1}{2}$$

s_2: $z(t)=t+\mathbf{j},\ -1\le t\le 1.$

$$\int_{-1}^{1} (t-\mathbf{j})\times 1\,dt$$

$$-2\cdot\mathbf{j}$$

s_3: $z(t)=1+\mathbf{j}t,\ 1\ge t\ge 0.$

$$\int_{1}^{0} (1-\mathbf{j}t)\times \mathbf{j}\,dt$$

$$-\mathbf{j}-\frac{1}{2}$$

Ergebnis (Summe der Teilintegrale):

$$-j+\frac{1}{2}-2\cdot j-j-\frac{1}{2}$$

$$-4\cdot j$$

c) C sei eine geschlossene Jordankurve mit $z(t)=x(t)+jy(t)$, $a\le t\le b$, im math. pos. Sinn orientiert.

$$\int_C f(z)dz=\int_0^2 f(z(t))\times z'(t)dt=$$

$$\int_a^b (x(t)-jy(t))\times(x'(t)+jy'(t))dt=$$

$$\int_a^b (x(t)\times x'(t)+y(t)\times y'(t))dt \;+$$

$$j\times\int_a^b (x(t)\times y'(t)-y(t)\times x'(t))dt$$

Das erste Teilintegral hat die Stammfunktion $F(t)=\frac{1}{2}\times\left((x(t))^2+(y(t))^2\right)$ mit $F(a)=F(b)$.

Damit verschwindet das erste Teilintegral:

$$\int_a^b (x(t)\times x'(t)+y(t)\times y'(t))dt=F(b)-F(a)=0.$$

Das zweite Teilintegral beinhaltet die Leibniz'sche Sektorformel:

$$A=\frac{1}{2}\times\int_a^b (x(t)\times y'(t)-y(t)\times x'(t))dt\text{ , d.h.}$$

$\oint_C f(z)dz = 2A\mathbf{j}$, wobei A den Flächeninhalt der von C umrandeten Fläche bezeichnet.

Hinweis:
Leibniz'sche Sektorformel als Kurvenintegral 2.Art im Vektorfeld notiert:

$$A=\frac{1}{2}\times\int_a^b (x(t)\times y'(t)-y(t)\times x'(t))dt =$$

$$\oint_C \begin{bmatrix}-y/2\\ x/2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}dt = \oint_C -\frac{y}{2}dx+\frac{x}{2}dy$$

vgl. Bartsch, S.524 o.

Aufg. 5.6
f(z)=Re(z), vgl. F3.13a) (nicht holomorph),
Integral analog 5.5a) zu bearbeiten.
Lösung: 2+**j**

Aufg. 5.7

PBZ nutzen:

$$\text{expand}\left(\frac{1}{1+z^2}, z\right)$$

$$\frac{j}{2\cdot(j-z)}+\frac{j}{2\cdot(j+z)}$$

Lösung:

für C_1: π, für C_2: $-\pi$, für C_3: 0