2.HA F3.2-7, 9-11, 13b,c

==============================

Aufg. 3.2

a)

Define f(z)=z

done

$\frac{d}{dz}(f(z))$

1

b)

Define $f(z)=e^{2z}$

done

$\frac{d}{dz}(f(z))$

$2\cdot e^{2\cdot(x+y\cdot j)}$

c)

Define f(z)=ln(cos(z))

done

$\frac{d}{dz}(f(z))$

$\frac{-\sin(x+y\cdot j)}{\cos(x+y\cdot j)}$

simplify(ans)

$-\tan(x+y\cdot j)$

d)

Define $f(z)=z^{-3}+9\times(z^2+3)^4+\sin(z)$

done

$\frac{d}{dz}(f(z))$

$\frac{72\cdot(x+y\cdot j)^{11}+648\cdot(x+y\cdot j)^{9}+1944\cdot(x+y\cdot j)^{7}+1944\cdot(x}{(x+y\cdot j)^4}$ ▸

expand(ans)

$$\frac{72\cdot x^{11}}{x^4+y^4-6\cdot x^2\cdot y^2+4\cdot x^3\cdot y\cdot j-4\cdot x\cdot y^3\cdot j}-\frac{}{x^4+y^4-6\cdot x^2\cdot}$$

factor$(72\cdot z^7+648\cdot z^5+1944\cdot z^3+1944\cdot z)$

$$72\cdot x^7-504\cdot x\cdot y^6-1512\cdot x^5\cdot y^2+2520\cdot x^3\cdot y^4+648\cdot x^5+3$$

Aufg. 3.3

$x+jy \Rightarrow z$

$$x+y\cdot j$$

Define $f(z)=(\text{conjg}(z))^2$

done

$f(z)$

$$(x-y\cdot j)^2$$

cExpand$(f(z))$

$$x^2-y^2-2\cdot x\cdot y\cdot j$$

Define $u(x,y)=\text{re}((x-y\cdot j)^2)$

done

Define $v(x,y)=\text{im}((x-y\cdot j)^2)$

done

$\{f(z),u(x,y),v(x,y)\}$

$$\{(x-y\cdot j)^2,x^2-y^2,-2\cdot x\cdot y\}$$

$\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))$

$$2\cdot x=-2\cdot x$$

$\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))$

$$-2\cdot y=2\cdot y$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))\\ \frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))\end{array}\right|_{x,y}$$

$\{x=0, y=0\}$

CRD nur für z=0 erfüllt,
d.h. f(z) nur in einem Punkt diff.-bar (per Def.)
und f(z) nirgends holomorph.

Aufg. 3.4

a)

Define $f(z)=z^2$

done

cExpand(f(z))

$x^2-y^2+2\cdot x\cdot y\cdot \mathbf{j}$

Define u(x,y)=re(f(z))

done

u(x,y)

x^2-y^2

Define v(x,y)=im(f(z))

done

v(x,y)

$2\cdot x\cdot y$

b)

$\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))$

$2\cdot x=2\cdot x$

$\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))$

$-2\cdot y=-2\cdot y$

CRD überall erfüllt, d.h. f(z) überall holomorph.

c)

Setze $\mathbf{u}=x^2-y^2=\mathbf{c}$ bzw. $\mathbf{v}=2\cdot x\cdot y=\mathbf{c}$.

Define $y1(x)=\sqrt{x^2-c}$

done

Define $y2(x)=\left|\frac{c}{2x}\right|$

done

Define $x3(y)=0$

done

seq(c,c,−4,4,1)⇒c

$\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

Darstellung der Hyperbeläste

d)

z_0 nach z_1: $z(t)=t\times(1+\mathbf{j})$, $0\le t\le 1$,

z_1 nach z_2: $z(t)=1+\mathbf{j}+t\mathbf{j}$, $0\le t\le 1$,

Define $w1(t)=(t\times(1+\mathbf{j}))^2$

done

Define xt4(t)=re(w1(t))

done

Define yt4(t)=im(w1(t))

done

Define $w2(t)=(1+\mathbf{j}+t\mathbf{j})^2$

done

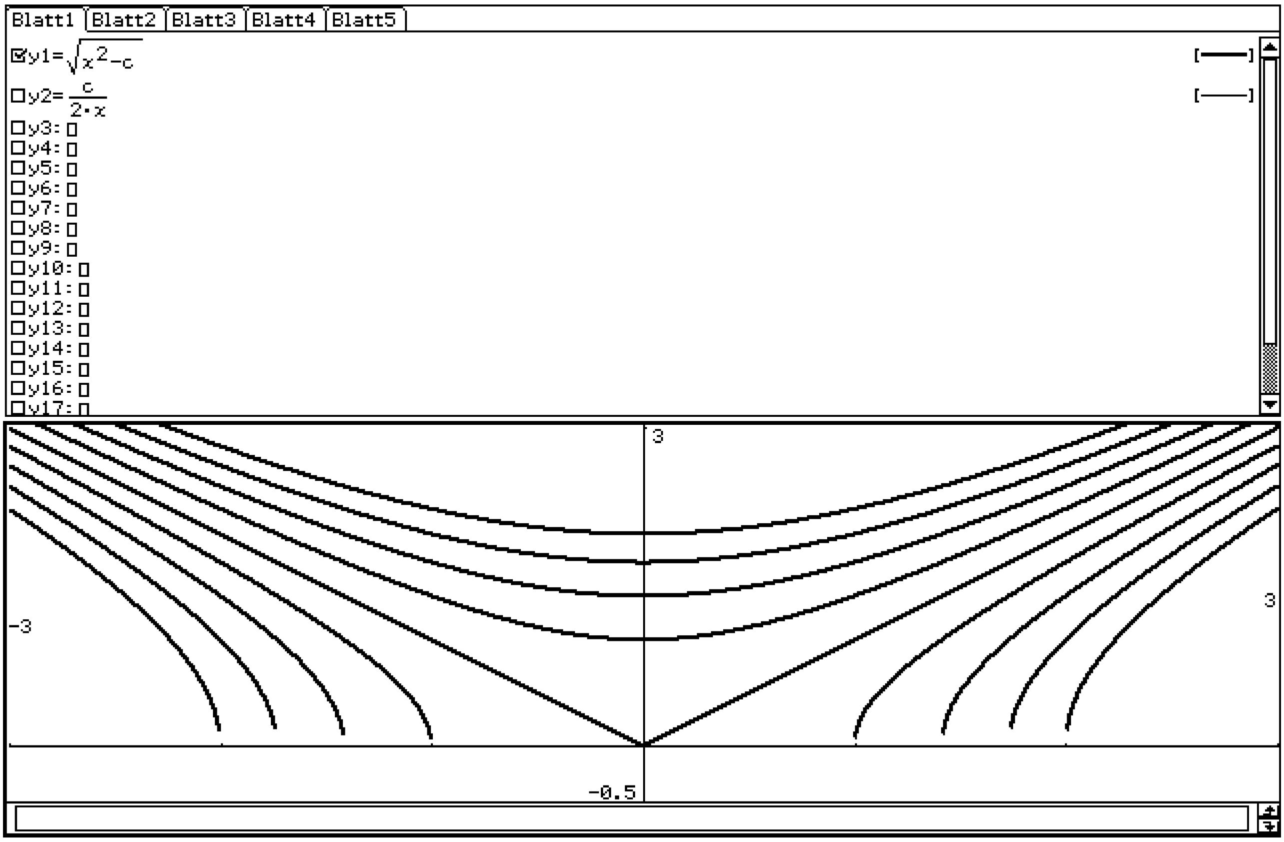
Define xt5(t)=re(w2(t))

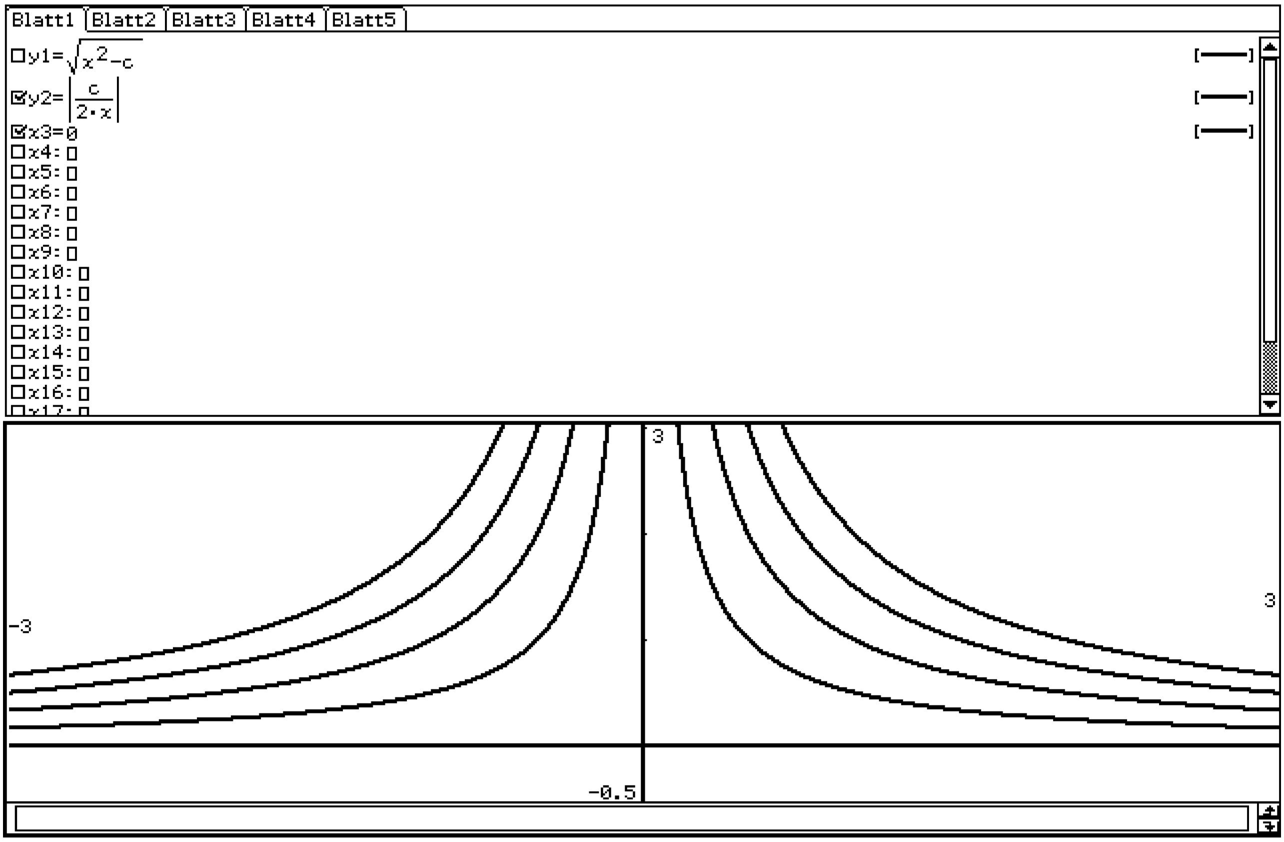
done

Define yt5(t)=im(w2(t))

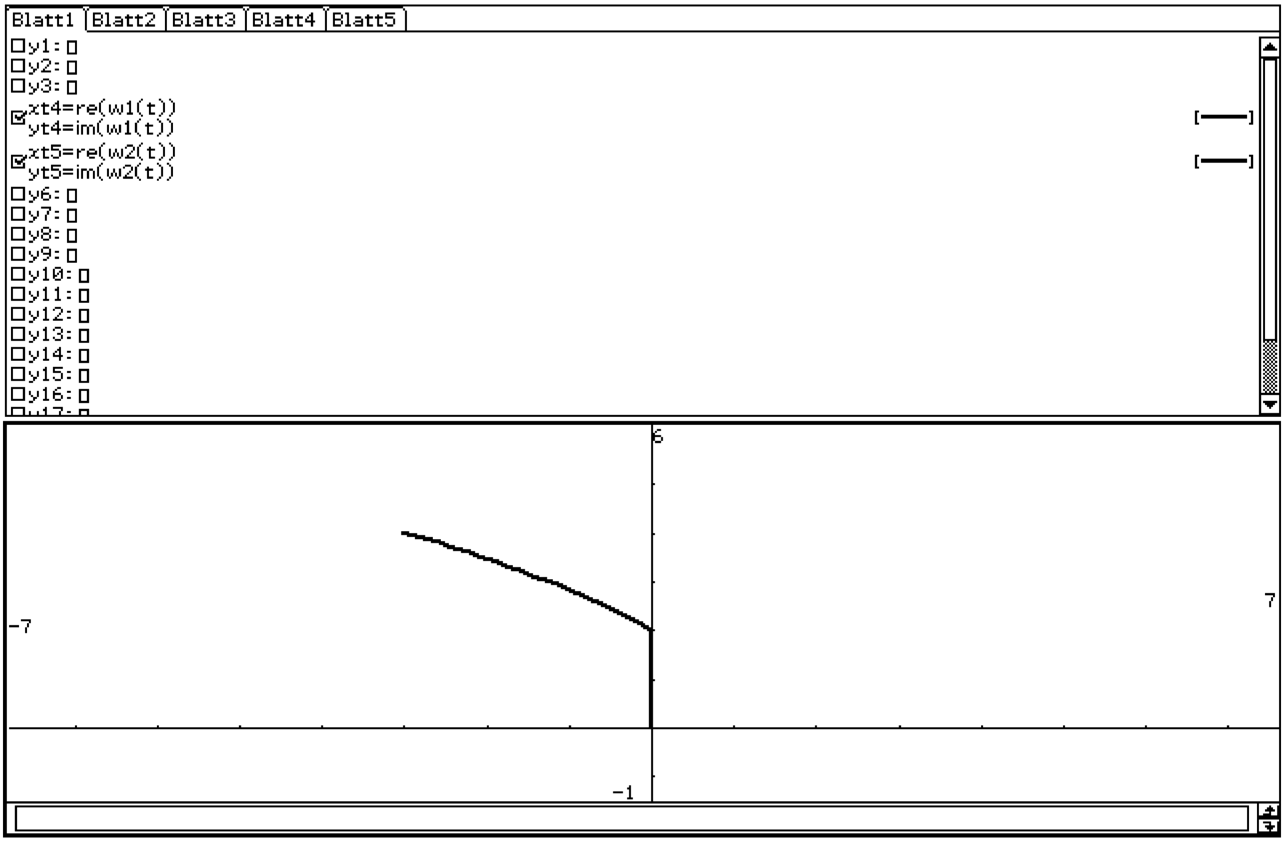
done

Bilder der Kurvenstücke


Blatt1
Blatt2
Blatt3
Blatt4
Blatt5
y1=√(x^2-c)
y2=c/(2·x)
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y12:
y13:
y14:
y15:
y16:
y17:
3
-3
3
-0.5



Blatt1
Blatt2
Blatt3
Blatt4
Blatt5
y1=$\sqrt{x^2-c}$
y2=$\left|\frac{c}{2\cdot x}\right|$
x3=0
x4:
x5:
x6:
x7:
x8:
x9:
x10:
x11:
x12:
x13:
x14:
x15:
x16:
3
-3
3
-0.5


Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1:
y2:
y3:
xt4=re(w1(t))
yt4=im(w1(t))
xt5=re(w2(t))
yt5=im(w2(t))
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y12:
y13:
y14:
y15:
y16:
6
-7
7
-1

Aufg. 3.5

Define $u(x,y)=x^2-y^2$

done

u ist Potentialfunktion:

$$\text{judge}\left(\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))+\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))=0\right)$$

TRUE

$$\frac{d}{dx}(u(x,y))$$

$2\cdot x$

dSolve($v'=2\cdot x,y,v$)

$\{v=2\cdot x\cdot y+\text{const}(1)\}$

Somit $f(z)=u+\mathbf{j}v=x^2-y^2+2\cdot x\cdot y\mathbf{j}+c\mathbf{j}=(x+y\mathbf{j})^2+C=z^2+C$, denn

judge($x^2-y^2+2\cdot x\cdot y\mathbf{j}=(x+y\mathbf{j})^2$)

TRUE

Aufg. 3.6

Define $v(x,y)=e^x \times \sin(y)$

done

v ist Potentialfunktion:

$$\text{judge}\left(\frac{d^2}{dx^2}(v(x,y))+\frac{d^2}{dy^2}(v(x,y))=0\right)$$

TRUE

$$\frac{d}{dy}(v(x,y))$$

$\cos(y)\cdot e^x$

dSolve($u'=\cos(y)\cdot e^x,x,u$)

$$\{u=\cos(y)\cdot e^{x}+const(1)\}$$

Somit

$f(z)=u+jv=\cos(y)\cdot e^{x}+c+je^{x}\times\sin(y)=e^{x}\cdot e^{jy}+c=e^{z}+c$

Aufg. 3.7

Define u(x,y)=x

done

u ist Potentialfunktion:

$$\text{judge}\left(\frac{d^2}{dx^2}(v(x,y))+\frac{d^2}{dy^2}(v(x,y))=0\right)$$

TRUE

$$\frac{d}{dx}(u(x,y))$$

1

dSolve(v'=1,y,v)

$$\{v=y+const(1)\}$$

Somit $f(z)=u+jv=cx+jy+jc=z+C$

Aufg. 3.9

a)

Define $u(x,y)=e^{x}\times\cos(y-1)$

done

$$\text{judge}\left(\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))+\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))=0\right)$$

TRUE

u ist eine Potentialfunktion

Einzelschritte:

$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))$

$$\cos(y-1)\cdot e^{x}$$

$\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))$

$$-\cos(y-1)\cdot e^{x}$$

b)

$\frac{d}{dx}(u(x,y))$

$$\cos(y-1)\cdot e^{x}$$

dSolve(v'=cos(y-1)· e^{x},y,v)

$$\{v=\sin(y-1)\cdot e^{x}+\mathrm{const}(1)\}$$

Somit

$f(z)=u+jv=\cos(y-1)\cdot e^{x}+je^{x}\times\sin(y-1)+cj=e^{x}\cdot e^{j(y-1}$ ▸

Aufg. 3.10

x+jy⇒z

$$x+y\cdot j$$

Define f(z)=conjg(z)-im(z)j

done

f(z)

$$x-2\cdot y\cdot j$$

Define u(x,y)=re(f(z))

done

u(x,y)

$$x$$

Define v(x,y)=im(f(z))

done

v(x,y)

$$-2\cdot y$$

$\text{judge}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))\right)$

FALSE

Damit sind die CRD nicht erfüllt, f(z) ist nicht diff.-bar und damit nicht holomorph.

Aufg. 3.11

a)

Define $f(z)=z^3$

done

Define u(x,y)=re(f(z))

done

u(x,y)

$$-2\cdot x\cdot y^2+x\cdot\left(x^2-y^2\right)$$

Define v(x,y)=im(f(z))

done

v(x,y)

$$2\cdot x^2\cdot y+y\cdot\left(x^2-y^2\right)$$

$\text{judge}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))\right)$

TRUE

$\text{judge}\left(\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))\right)$

TRUE

Einzelschritte:

$\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))$

$$3\cdot x^2-3\cdot y^2=3\cdot x^2-3\cdot y^2$$

$$\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))$$

$$-6\cdot x\cdot y=-6\cdot x\cdot y$$

Damit sind die CRD erfüllt, d.h. f(z) ist überall holomorph.

b)

Define $f(z)=\frac{1}{z}$

done

Define u(x,y)=re(f(z))

done

u(x,y)

$$\frac{x}{x^2+y^2}$$

Define v(x,y)=im(f(z))

done

v(x,y)

$$\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\text{judge}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))\right)$$

TRUE

$$\text{judge}\left(\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))\right)$$

TRUE

Einzelschritte:

$$\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))$$

$$\frac{-\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))$$

$$\frac{-2\cdot x\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-2\cdot x\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Damit sind die CRD für z≠0 erfüllt, d.h. f(z) ist für z≠0 holomorph.

c)

Define f(z)=sin(z)

done

Define u(x,y)=re(f(z))

done

u(x,y)

$\sin(x)\cdot\cosh(y)$

Define v(x,y)=im(f(z))

done

v(x,y)

$\cos(x)\cdot\sinh(y)$

$$\text{judge}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))\right)$$

TRUE

$$\text{judge}\left(\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))\right)$$

TRUE

Einzelschritte:

$$\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))$$

$$\cos(x)\cdot\cosh(y)=\cos(x)\cdot\cosh(y)$$

$$\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))$$

$$\sin(x)\cdot\sinh(y)=\sin(x)\cdot\sinh(y)$$

Damit sind die CRD erfüllt, d.h. f(z) ist überall holomorph.

d)

Define f(z)=cos(z)

done

Define u(x,y)=re(f(z))

done

u(x,y)

$\cos(x)\cdot\cosh(y)$

Define v(x,y)=im(f(z))

done

v(x,y)

$-\sin(x)\cdot\sinh(y)$

$\text{judge}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))\right)$

TRUE

$\text{judge}\left(\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))\right)$

TRUE

Einzelschritte:

$\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))$

$-\sin(x)\cdot\cosh(y)=-\sin(x)\cdot\cosh(y)$

$\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))$

$\cos(x)\cdot\sinh(y)=\cos(x)\cdot\sinh(y)$

Damit sind die CRD erfüllt, d.h. f(z) ist überall holomorph.

Aufg. 3.13

b)

Define f(z)=im(z)

done

Define u(x,y)=re(f(z))

done

u(x,y)

y

Define v(x,y)=im(f(z))

done

v(x,y)

0

$\text{judge}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))\right)$

TRUE

$\text{judge}\left(\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))\right)$

FALSE

Einzelschritte:

$\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))$

0=0

$\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))$ ergibt 1=0

Damit sind die CRD nirgendwo erfüllt, d.h. f(z) ist nicht komplex diff.-bar.

c)

Define f(z)=abs(z)

done

Define u(x,y)=re(f(z))

done

u(x,y)

$\sqrt{x^2+y^2}$

Define v(x,y)=im(f(z))

done

v(x,y)

$$0$$

$$\text{judge}\left(\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))\right)$$

FALSE

Einzelschritte:

$$\frac{d}{dx}(u(x,y))=\frac{d}{dy}(v(x,y))$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$$\frac{d}{dy}(u(x,y))=-\frac{d}{dx}(v(x,y))$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Damit sind die CRD nirgendwo erfüllt, d.h. f(z) ist nicht komplex diff.-bar.
Für (x,y)=(0,0) sind die CRD nicht definiert.