Prof. Dr. L. Paditz - SS2010

Vorl.-Bsp. mit $w=f(z)=z^2$
============================

Zerlegung in Real- und Imaginärteil:
===

Rechenschritte im CAS:

Define f(z)=z^2

done

f(x+**j**y)

$(x+y\cdot j)^2$

cExpand(ans)

$x^2-y^2+2\cdot x\cdot y\cdot j$

Define u(x,y)=re(f(x+**j**y))

done

Define v(x,y)=im(f(x+**j**y))

done

simplify(u(x,y))

x^2-y^2

simplify(v(x,y))

$2\cdot x\cdot y$

Exponetielle Darstellung:
============================

f(r×$e^{j\phi}$)

$r^2\cdot e^{2\cdot\phi\cdot j}$

Vorl.-Bsp. mit w=f(z)=ln(z):
===========================

Rechenschritte im CAS:

Define f(z)=ln(z)

done

f(x+**j**y)

$\ln(x+y\cdot \mathbf{j})$

cExpand(ans)

$$\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{2}-\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{\mathrm{signum}(y)\cdot\pi}{2}\right)\cdot \mathbf{j}$$

Define u(x,y)=re(f(x+**j**y))

done

cExpand(u(x,y))

$$\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{2}$$

Define v(x,y)=im(f(x+**j**y))

done

cExpand(v(x,y))

$$-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\mathrm{signum}(y)\cdot\pi}{2}$$

Man erkennt folgendes:

$$\mathbf{u(x,y)=ln(|z|)=ln}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

und

$$\mathbf{v(x,y)=arg(z)=}\frac{\pi}{2}\times\mathbf{signum}(y)\mathbf{-tan}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Die zuletzt genannte Formel gilt in allen vier Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene ($y\neq 0$).
Im Fall $y=0$ gilt $\arg(x)=0$ ($x>0$) bzw. $\arg(x)=\pi$ ($x<0$).

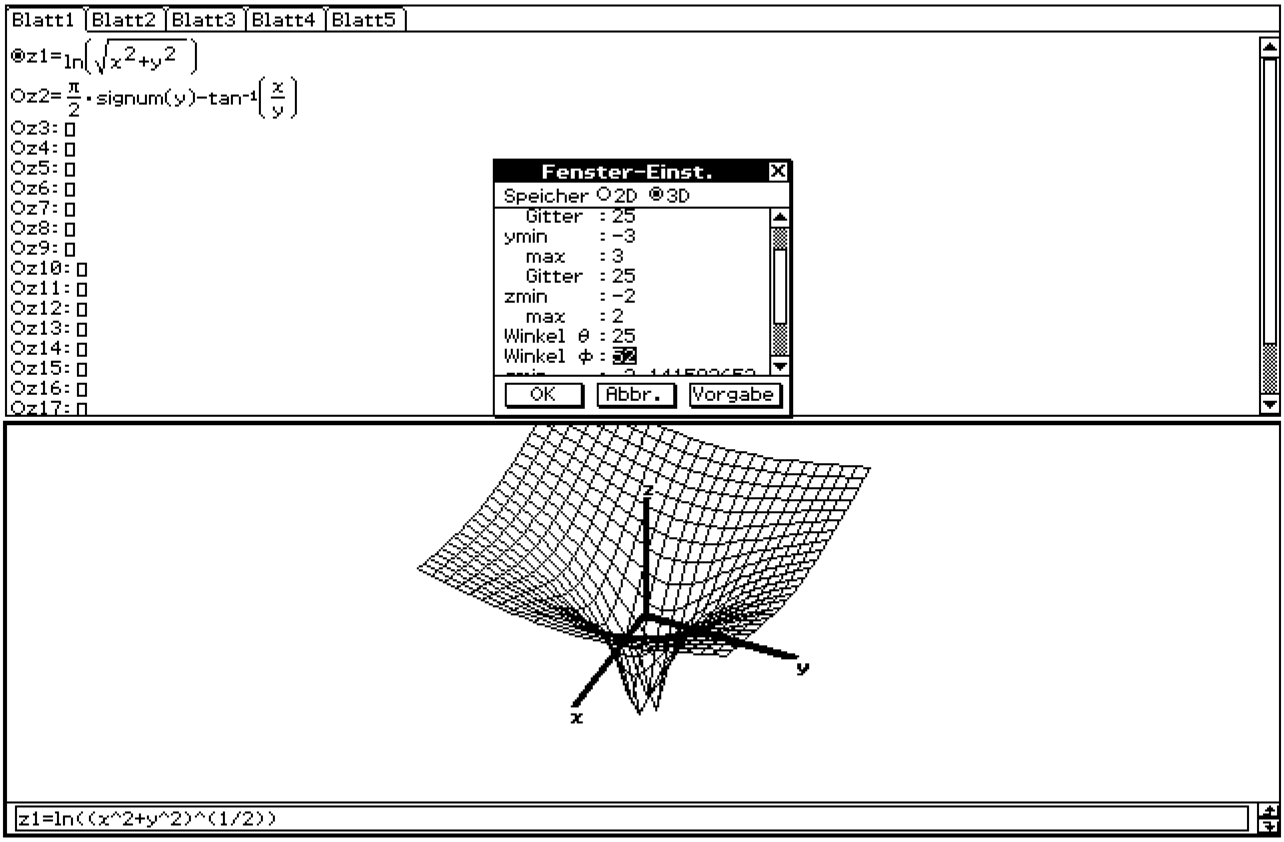
Die Gültigkeit der Formel wird in der Literaturangabe

[4], Paditz(2001): Rechnen und graphische Darstellungen mit komplexen Zahlen, S.19,

diskutiert.

Veranschaulichung der Flächen z1=u(x,y) und z▸	Z1:… Z2:…

Karte mit Höhenlinien: orthogonale Kurvenschare▸	Y1:… Y2:…

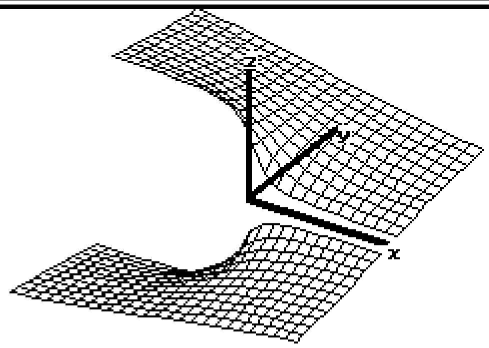

Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=ln(√(x^2+y^2))
z2=π/2·signum(y)−tan^-1(x/y)
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
z12:
z13:
z14:
z15:
z16:
z17:
Fenster-Einst.
Speicher 2D 3D
Gitter : 25
ymin : −3
max : 3
Gitter : 25
zmin : −2
max : 2
Winkel θ : 25
Winkel φ : 32
OK
Abbr.
Vorgabe
z
y
x
z1=ln((x^2+y^2)^(1/2))

Blatt1 | Blatt2 | Blatt3 | Blatt4 | Blatt5

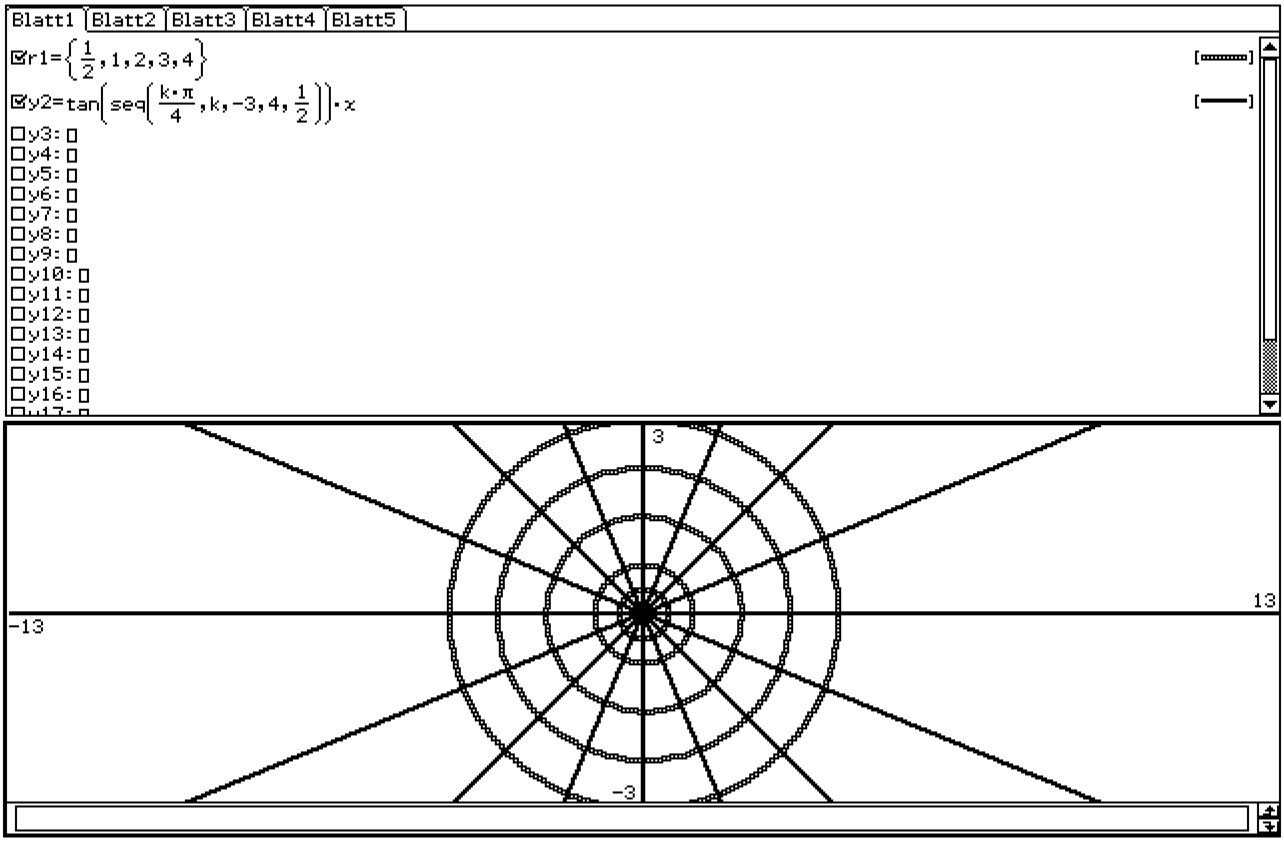
Oz1=$\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

◉z2=$\frac{\pi}{2}\cdot \text{signum}(y)-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

Oz3: □
Oz4: □
Oz5: □
Oz6: □
Oz7: □
Oz8: □
Oz9: □
Oz10: □
Oz11: □
Oz12: □
Oz13: □
Oz14: □
Oz15: □
Oz16: □
Oz17: □



z2=π/2·signum(y)-tan-1(x/y)


Blatt1
Blatt2
Blatt3
Blatt4
Blatt5
r1={1/2,1,2,3,4}
y2=tan(seq(k·π/4,k,-3,4,1/2))·x
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y12:
y13:
y14:
y15:
y16:
3
-13
13
-3

Prof. Dr. L. Paditz, SS2010

Heft F: Kapitel 3
=================

Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Holomorphie

Aufg. 3.1:

$w=f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ist nach Def. 4 stetig,
weil es für jede ε-Umgebung V von $f(z_0)$ eine
δ-Umgebung U von z_0 gibt, die vollständig in V
abgebildet wird:

gemäß Bsp. nach Def. 6:

$$|f(z)-f(z_0)|=\left||z|-|z_0|\right|=\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|$$

$$\le|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\text{ , denn}$$

überlegungen im CAS:

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|^2$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2$$

expand(ans)$\Rightarrow$Term1

$$x^2+y^2+x_0^2+y_0^2-2\cdot\sqrt{(x^2+y^2)\cdot(x_0^2+y_0^2)}$$

$\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^2 \to \text{Term2}$

$$x^2+y^2+x_0^2+y_0^2-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y$$

Vereinfachung der Ungl. Term1≤Term2:

$(\text{Term1}\le\text{Term2})-(x^2+y^2+x_0^2+y_0^2)$

$$-2\cdot\sqrt{(x^2+y^2)\cdot(x_0^2+y_0^2)}\le-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y$$

ans/2

$$-\sqrt{(x^2+y^2)\cdot(x_0^2+y_0^2)}\le\frac{-(2\cdot x_0\cdot x+2\cdot y_0\cdot y)}{2}$$

simplify(ans)×(-1)

$$\sqrt{(x^2+y^2)\cdot(x_0^2+y_0^2)}\ge x_0\cdot x+y_0\cdot y$$

$(x^2+y^2)\cdot(x_0^2+y_0^2)\ge(x_0\cdot x+y_0\cdot y)^2$

$$(x^2+y^2)\cdot(x_0^2+y_0^2)\ge(x_0\cdot x+y_0\cdot y)^2$$

expand(ans)$-(x_0^2\cdot x^2+y_0^2\cdot y^2)$

$$y_0^2\cdot x^2+x_0^2\cdot y^2\ge 2\cdot x_0\cdot y_0\cdot x\cdot y$$

$y_0^2\cdot x^2+x_0^2\cdot y^2-2\cdot x_0\cdot y_0\cdot x\cdot y\ge 0$

$$y_0^2\cdot x^2+x_0^2\cdot y^2-2\cdot x_0\cdot y_0\cdot x\cdot y\ge 0$$

judge(ans)

TRUE

factor$(y_0^2\cdot x^2+x_0^2\cdot y^2-2\cdot x_0\cdot y_0\cdot x\cdot y\ge 0)$

$$(y_0\cdot x-x_0\cdot y)^2\ge 0$$

Die dargestellte Rechnung muss nun rückwärts abgewickelt werden,

um aus der wahren Aussage $(y_0\cdot x-x_0\cdot y)^2\ge 0$
die richtige Ungleichung

$|f(z)-f(z_0)|=\big||z|-|z_0|\big|\leq|z-z_0|$ abzuleiten.

Sei nun $\delta(\epsilon)=\epsilon$ wie im Beisp. nach Def. 6,

dann gilt für $z\in U(z_0)$:

$|f(z)-f(z_0)|\leq|z-z_0|<\delta(\epsilon)=\epsilon$,

d.h. $f(z)\in V(f(z_0))$ für alle $z\in U(z_0)$, d.h. $w=f(z)$ ist überall stetig.

Bemerkung: schnelle Lösungen:
===========

1) $w=f(z)$ ist überall definiert und es gilt die Folgenstetigkeit für beliebiges z_0:

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)) = f(z_0) = f(\lim_{z\to z_0}(z))$$

2) $w=f(z)=u(x,y)+j\times v(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+j\times 0$.
Da $u=\sqrt{x^2+y^2}$ und $v=0$ stetige Fktn. sind, ist auch $w=f(z)$ stetig.

Prof. Dr. L. Paditz, SS2010

Heft F: Kapitel 3
=================

Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Holomorphie

Aufg. 3.8:

Define $u(x,y)=\ln\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$

done

u ist Potentialfkt., wenn die Laplace'sche Dgl.
erfüllt ist, vgl. **Heft E 3.1b)**, und Formel (1.1):

Rechnung im CAS:

$$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))$$

$$\frac{-\left(x^2-y^2+x_0{}^2-y_0{}^2-2\cdot x_0\cdot x+2\cdot y_0\cdot y\right)}{\left(x^2+y^2+x_0{}^2+y_0{}^2-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y\right)^2}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))$$

$$\frac{x^2-y^2+x_0{}^2-y_0{}^2-2\cdot x_0\cdot x+2\cdot y_0\cdot y}{\left(x^2+y^2+x_0{}^2+y_0{}^2-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y\right)^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))+\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))$$

$$0$$

Damit gilt $u_{xx}+u_{yy}=0$.

Das totale Differenzial $v=v(x,y)$ ist wegen der Gültigkeit der CRD (Satz 4) wie folgt festgelegt:

$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$ (Formel (1.2))

v ist eine Stammfkt. gemäß einem **Kurvenintegral 2.Art** (bei Wegunabhängigkeit):

$$v(X,Y)-v(a,b) = \int_{(a,b)}^{(X,Y)} -u_y dx + u_x dy$$

$$\frac{d}{dx}(u(x,y))$$

$$\frac{x-x_0}{x^2+y^2+x_0^2+y_0^2-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y}$$

$$\frac{d}{dy}(u(x,y))$$

$$\frac{y-y_0}{x^2+y^2+x_0^2+y_0^2-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y}$$

Integrationsweg sei der achsenparallele Weg, d.h.

$x=t$ und $y=b$ mit $a...t...X$ und dann $y=t$ und $x=X$ mit $b...t...Y$

Somit:

Define $P(t)=-\frac{d}{dy}(u(x,y))|x=t$ and $y=b$

done

Define $Q(t)=\frac{d}{dx}(u(x,y))|x=X \text{ and } y=t$

done

$$\int_a^X P(t)dt+\int_b^Y Q(t)dt$$

$$\frac{2\cdot X\cdot \tan^{-1}\left(\frac{2\cdot Y-2\cdot y_0}{2\cdot\sqrt{(X-x_0)^2}}\right)}{\sqrt{4\cdot X^2+4\cdot x_0{}^2-8\cdot x_0\cdot X}}-\frac{2\cdot X\cdot \tan^{-1}\left(\frac{2\cdot b-2\cdot y_0}{2\cdot\sqrt{(X-x_0)^2}}\right)}{\sqrt{4\cdot X^2+4\cdot x_0{}^2-8\cdot x_0\cdot X}}-2 \blacktriangleright$$

Das Ergebnis ist nur schwer zu vereinfachen.

Wir kennen die gesuchte Fkt. v und überprüfen deren Richtigkeit:

Define $v(X,Y)=\tan^{-1}\left(\frac{Y-y_0}{X-x_0}\right)+C$

done

$\frac{d}{dX}(v(X,Y))|X=x \text{ and } Y=y$

$$\frac{-(y-y_0)}{x^2+y^2+x_0{}^2+y_0{}^2-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y}$$

$\text{judge}\left(\text{ans}=-\frac{d}{dy}(u(x,y))\right)$

TRUE

$\frac{d}{dy}(v(X,Y))|X=x \text{ and } Y=y$

$$\frac{x-x_0}{x^2+y^2+x_0{}^2+y_0{}^2-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y}$$

$\text{judge}\left(\text{ans}=\frac{d}{dx}(u(x,y))\right)$

TRUE

Damit ist $w=f(z)=u(x,y)+j\times v(x,y)$

Define $f(x,y)=u(x,y)+j\times v(x,y)$

done

$f(x,y)$

$$\frac{\ln\left(x^2+y^2+x_0{}^2+y_0{}^2-2\cdot x_0\cdot x-2\cdot y_0\cdot y\right)}{2}+\left(\tan^{-1}\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)+C\right)\cdot j$$

d.h.

$f(x,y)=\ln\left(|z-z_0|\right)+j\times \arctan\left(\frac{im(z-z_0)}{re(z-z_0)}\right)+j\times C=\ln(z-z_0)+j$▸

==

Vorlesungsbeispiel mit $z_0=0+j\times 0=0$ und $re(z)>0$

Define $u(x,y)=\ln\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)$

done

$$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))+\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))$$

0

v ist eine Stammfkt. gemäß einem **Kurvenintegral 2.Art** (bei Wegunabhängigkeit):

$$v(X,Y)-v(a,b) = \int_{(a,b)}^{(X,Y)} -u_y dx + u_x dy$$

Integrationsweg sei der achsenparallele Weg, d.h.

x=t und y=b mit a...t...X und dann y=t und x=X mit b...t...Y

Somit:

$$\text{Define } P(t)=-\frac{d}{dy}(u(x,y))\,|\,x=t \text{ and } y=b$$

done

$$\text{Define } Q(t)=\frac{d}{dx}(u(x,y))\,|\,x=X \text{ and } y=t$$

done

$$\int_a^X P(t)dt+\int_b^Y Q(t)dt\,|\,X>0 \text{ and } b>0$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{X}{b}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{b}{X}\right)$$

Bem.: Wir nutzen das Additionstheorem

$$\mathbf{arctan(s)+arctan(t)=arctan}\left(\frac{s+t}{1-s\times t}\right)$$

$$-\arctan\left(\frac{X}{b}\right)-\arctan\left(\frac{b}{X}\right)=-\arctan\left(\frac{\frac{X}{b}+\frac{b}{X}}{1-\frac{X}{b}\times\frac{b}{X}}\right)$$

$$=-\arctan\left(\frac{\frac{X}{b}+\frac{b}{X}}{\pm 0}\right)=-\arctan(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}$$

Somit ist $v(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\text{const.}$

Prof. Dr. L. Paditz - SS2010

Aufg. Heft F 3.14:
==================

Die geg. Fkt. u(x,y) ist als **Doppelintegral über dem Bereich B** definiert:

$$\text{Define } u(x,y)=\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\rho(s,t)\times\ln\left(\sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}\right)ds\,dt$$

done

Hierbei ist $\mathbf{B=\{(s,t)|s^2+t^2<1\}}$ das **Innengebiet des Einheitskreises.**

Es handelt sich hier um das sogen. **logarithmische Potential** u(x,y).

Die Parameter (x,y) des Doppelintegrales liegen **außerhalb des Einheitskreises:**
$\mathbf{(x,y)\in\{(x,y)|x^2+y^2>1\}}$.

Damit ist der ln(...) im Integranden stets definiert (niemals ln(Null)).

$\rho(s,t)$ ist eine geeignete Dichtefkt.

Der Integrand ist stetig und stetig partiell differenzierbar nach x und y,
die Differenziation von u darf in das Integral gezogen werden
(Vertauschung von Differenziation und Integration):

$\frac{d}{dx}(u(x,y))$

$$\int\int \frac{(2\cdot x-2\cdot s)\cdot \rho(s,t)}{2\cdot\left(x^2+y^2+s^2+t^2-2\cdot s\cdot x-2\cdot t\cdot y\right)}\,ds\,dt$$

$\frac{d}{dy}(u(x,y))$

$$\int\int \frac{(2\cdot y-2\cdot t)\cdot \rho(s,t)}{2\cdot\left(x^2+y^2+s^2+t^2-2\cdot s\cdot x-2\cdot t\cdot y\right)}\,ds\,dt$$

$\frac{d^2}{dx^2}(u(x,y))$

$$\int\int \frac{-(2\cdot x-2\cdot s)^2\cdot \rho(s,t)}{2\cdot\left(x^2+y^2+s^2+t^2-2\cdot s\cdot x-2\cdot t\cdot y\right)^2}+\frac{\rho(s,}{x^2+y^2+s^2+t^2-} \blacktriangleright$$

$\frac{d^2}{dy^2}(u(x,y))$

$$\int\int \frac{-(2\cdot y-2\cdot t)^2\cdot \rho(s,t)}{2\cdot\left(x^2+y^2+s^2+t^2-2\cdot s\cdot x-2\cdot t\cdot y\right)^2}+\frac{\rho(s,}{x^2+y^2+s^2+t^2-} \blacktriangleright$$

Zusammenfassung der Integranden:

$$\frac{-(2\cdot x-2\cdot s)^2\cdot \rho(s,t)}{2\cdot\left(x^2+y^2+s^2+t^2-2\cdot s\cdot x-2\cdot t\cdot y\right)^2}+\frac{\rho(s,t)}{x^2+y^2+s^2+t^2-2\cdot s} \blacktriangleright$$

$$\frac{-(2\cdot x-2\cdot s)^2\cdot \rho(s,t)}{2\cdot\left(x^2+y^2+s^2+t^2-2\cdot s\cdot x-2\cdot t\cdot y\right)^2}-\frac{(2\cdot y-2\cdot t)^2}{2\cdot\left(x^2+y^2+s^2+t^2-\right.} \blacktriangleright$$

simplify(ans)

0

Damit ist die Laplace'sche Dgl. erfüllt, d.h. u(x,y) ist eine Potenzialfkt.