HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

HTW Dresden

Fakultät Informatik/Mathematik

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Bereits in früheren Zeiten (19. Jahrhundert, Blütezeit der Schulprogramme) stand das schriftliche Wurzelziehen mit elementaren Rechenoperationen im Lehrplan.

In der heutigen Zeit erledigt das ein Taschenrechner.

1875 erschien die 19. Auflage eines Schulbuches der Arithmetik und Algebra des Gymnasialprofessors Dr. Ludwig Kambly (1811-1887), vgl.

https://gateway-bayern.de/BV036085791

Über diesen Link (dort „mehr zum Titel“ auswählen) gelangt man zum Download des Buches, welches vom Deutschen Museum in München komplett digitalisiert wurde.

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Die Elementar-Mathematik,

für

den Schulunterricht bearbeitet

von

Dr. Ludwig Kambly,

Professor und Prorector am Gymnasium zu St. Elisabet in Breslau.

Vollständig in vier Theilen:

Erster Theil.
Arithmetik und Algebra.

Zweiter Theil.
Planimetrie.

Dritter Theil.
Ebene und sphärische Trigonometrie.

Vierter Theil.
Stereometrie.

Erster Theil:

Arithmetik und Algebra.

Neunzehnte Auflage.

Ferdinand Hirt,
Königliche Universitäts- und Verlags-Buchhandlung.
Breslau, 1875.

Inhalt.

Im II. Abschnitt ("Von den relativen oder algebraischen Zahlen") geht es u.a. um die "Quadratwurzel-Ausziehung".

Wir wollen die **Rechenschritte zur ziffernweisen Ermittlung** der Quadratwurzel wie damals mit Zettel und Bleistift nachvollziehen, wobei wir jedoch **zur Kontrolle** eines jeden Schrittes den **ClassPad nutzen**.

Wenn eine Zahl keine rationale Quadratwurzel hat, kann man die Berechnung (signifikanter) Ziffern (Kommastellen) so lange fortsetzen, wie man möchte und dabei die **numerische Genauigkeit des ClassPad** überbieten. vgl. auch

https://de.wikipedia.org/wiki/Schriftliches_Wurzelziehen

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

$\sqrt{520}$

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Datei Edit Einfügen Aktion

$\sqrt{520} = 22,80350...$

-4 subtrahiere $a^2=4,\ a=2$

$120 : 4_2$ (dividiere durch $2a=4$, ergibt $b=2$, da 3 zu groß: $2ab+b^2=129$)

-84

$3600 : 44_8$ ($2ab+b^2=44*8+8^2=352o+64=3584$) nächste Ziffer $c=8$

-3584

$1600 : 456_0$

-0

$160000 : 4560_3$ nächste Ziffer $d=3$: $4560*3+3^2=136809$

-136809

$2319100 : 45606_5$ nächste Ziffer $e=5$: $45606*5+5^2=228030+25=2280325$

-2280325

$3877500 : 456070_0$ nächste Ziffer $f=0$

-0

Algeb Standard Reell 2π

Interessant ist auch die Biographie des Mathematiklehrers Kgl. Prof. Dr.phil.h.c. Ludwig Kambly: s.S.45f

http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2008/6116/pdf/Koessler-Kaak-Kysaeus.pdf

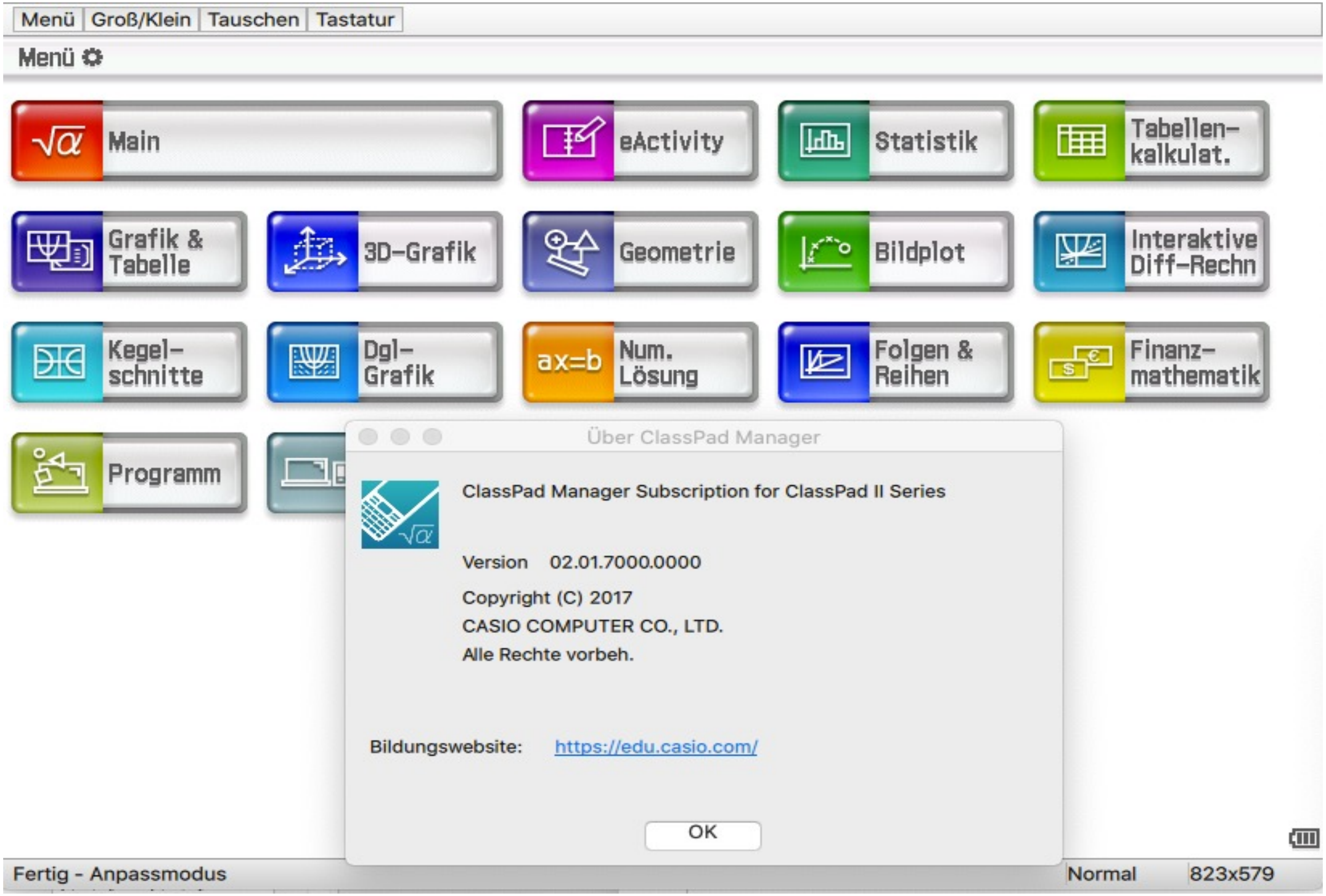
Personenlexikon von Lehrern des 19. Jahrhunderts
Berufsbiographien aus Schul-Jahresberichten und Schulprogrammen
1825 - 1918
mit Veröffentlichungsverzeichnissen
Band: Kaak – Kysaeus

Universitätsbibliothek Gießen
Giessener Elektronische Bibliothek
2008

Geboren am 26. August 1811 in Liegnitz, wurde auf der dortigen Ritterakademie vorgebildet, studierte von Michaelis 1829 an auf der Universität zu Breslau Philosophie, Philologie und namentlich Mathematik. Im Juli 1834 erwarb er sich die unbedingte facultas docendi mit der Befugnis Mathematik, Physik und Deutsch in allen, Geschichte und Geographie, Lateinisch, Griechisch, Französisch und Religion in den mittleren Klassen zu unterrichten.
Sein Probejahr leistete er von Michaelis 1834 bis 1835 an der Ritterakademie zu Liegnitz und als Mitglied des pädagogischen Seminars in Breslau am Magdalenen- und am Friedrichs-Gymnasium ab. Er war dann ein Jahr lang als Hilfslehrer am Gymnasium in Brieg beschäftigt und wurde Michaelis 1836 als achter Kollege (ordentlicher Lehrer) am Elisabeth-Gymnasium zu Breslau angestellt.

Er stieg für die damaligen Verhältnisse verhältnismäßig rasch in die höheren Stufen, wurde zu Neujahr 1842 Oberlehrer, am 13. Mai 1854 Kgl. Professor.
Am 29. Januar 1862, zur 300-jährigen Jubelfeier des Elisabetans, von der Universität Breslau zum Dr. phil. honoris causa promoviert, am 1. Januar 1873 Prorektor. Nach dem Tode des Direktors Dr. Fickert verwaltete er interimistisch das Gymnasium vom 3. Oktober 1880 bis Ostern 1881.
Seinen Antrag auf Versetzung in den Ruhestand zu Ostern 1884 zog infolge der lebhaften Bemühung der Patronatsbehörde zurück und fügte durch Verbleiben im Amte bis Michaelis ein letztes halbes Jahr seiner Dienstzeit hinzu, welche nunmehr volle fünfzig Jahre umfasste. Somit beging er am 30. September sein fünfzigjähriges Dienstjubiläum. Er ging Michaelis 1884 in den Ruhestand und starb am 17. August 1887.

Aktuelle Software: Stand Sept. 2021



Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

Kambly 1875: Arithmetik und Algebra (19. Auflage)

===

S. 50: **Von der Quadratwurzelausziehung aus bestimmten Zahlen ...**

Aufgabe: Aus einer mehrziffrigen ganzen Zahl die Quadratwurzel ziehen

Auflösung: Man theile die gegebene Zahl von rechts nach links in Klassen zu zwei Stellen, subtrahire von der ersten Klasse links, die auch einziffrig sein kann, die nächste subtrahirbare Quadratzahl [a^2] (1, 4, 9, 16, 25 u.s.w.) und schreibe die zugehörige Grundzahl als ersten Theil der gesuchten Wurzel.

Zum Reste nehme man die nächste Klasse herunter, denke sich rechts eine Ziffer abgestrichen und dividire das Uebrige durch das Doppelte [2a] der bereits gefundenen Theilwurzel.
Den Quotienten, welcher die zweite Ziffer [b] der verlangten Wurzel ist, multiplicire man erst mit ihm selbst [b^2], dann mit dem Divisor [2ab] und subtrahire das erhaltene Product [$2ab+b^2$], nehme wieder die nächste Klasse herunter u.s.w., und setze das Verfahren fort, bis alle Klassen herunter genommen sind.

Datei Edit Einfügen Aktion

Bleibt kein Rest, geht die Wurzelausziehung auf, so ist die Wurzel rational und vollständig richtig gefunden.
Bleibt ein Rest, so ist die Wurzel irrational und liegt zwischen der gefundenen und der nächst größeren Zahl, z. B.

```
                    ab
1)          √22|09 = 47 (erste Ziffer a=4, zweite Ziffer b=7)
 (10²)a² = 16 oo
     -----------
2(10)a = 8o| 609  | 60:8=7+Rest4 (zweite Ziffer b=7)
2(10)ab+b² = 609 (2(10)ab+b²=56o+49=609)
     -----------
             000
```

$47 = 10a+b,\ 47^2 = (10a+b)^2 = 100a^2+2*10ab+b^2 = 16oo+56o+49$

In allen diesen Beispielen sind die kleingedruckten Ziffern eigentlich hinzuzudenken.

Algeb Standard Reell 2π

Datei Edit Einfügen Aktion

abc

2) $\sqrt{69|22|24} = 832$ (erste Ziffer a=8, zweite Ziffer b=3, dritte Ziffer c=2)

$(100^2)a^2 = \mathbf{64}$ oo oo

$2(100)a = \mathbf{16}$oo| **522** 24 | **52:16**=3+Rest4 (zweite Ziffer b=3)

$2(100)a(10)b+(10^2)b^2 = \mathbf{489}$ oo $(2(100)a(10)b+(10^2)b^2$=48ooo+9oo=489oo)

$2((100)a+(10)b) = \mathbf{166}$o| **33 24** | **332:166**=2+Rest0 (dritte Ziffer c=2)

$2((100)a+(10)b)c+c^2 =$ **33 24**

$(2((100)a+(10)b)c+c^2=2(100a+10b)2+4=1660*2+4)$

----

00 00

Algeb Standard Reell 2π

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

Datei Edit Einfügen Aktion

abc

3) in Kurzfassung: $\sqrt{3|57|21} = \mathbf{18}9$ (erste Ziffer a=1, zweite Ziffer b=8,
dritte Ziffer c=9)

$a^2 = 1$ (größtmögliche Quadratzahl subtrahieren)

$2a = 2|$ 25(7) | 25:2=8+Rest9, b=8 (Division zur Ermittlung der
nächsten Ziffer 8)

$2ab+b^2 = 224$ (2ab=16o, b^2+64, d.h. Summe=224)

Bem.: b=9 ist zu groß, denn
$2ab+b^2=180+81=261>257$

2(a+b)= **36**o| 33 2(1) | 2(a+b) ist wieder das doppelte Produkt der
gefundenen Zahl 18(=a+b)

332:**36**=9+Rest8, c=9(Division zur Ermittlung der
nächsten Ziffer 9)

Algeb Standard Reell 2π

Datei Edit Einfügen Aktion

$2(a+b)c+c^2 =$ 33 21 (360*9+81=3321)

----

00 00

4) in Kurzfassung: $\sqrt{16|85|99|58} = 4106{,}08791917$

16 erste Ziffer=4 (größtmögliche Quadratzahl subtrahieren)

2a = 8| 08(5) zweite Ziffer=1 (nach Division 8:8=1+Rest0)

$2ab+b^2 =$ 81| 81 (oder b*(2a_+b)=1*(2*40+1)=1*81=81)

49(9) 2ab ist wieder das doppelte Produkt der gefundenen Zahl 41(=a_+b)

49:82=0+Rest49, dritte Ziffer=0 (Division zur Ermittlung der nächsten Ziffer 0)

Algeb Standard Reell 2π

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Datei Edit Einfügen Aktion

4995(8) 2ab ist wieder das doppelte Produkt der gefundenen Zahl 410(=a+b)

4995:820=6+Rest75, vierte Ziffer=6 (Division zur Ermittlung der nächsten Ziffer 6)

$6*8200+6^2=49200+36=$ 49236

7220(0) zwei Nachkommastellen 00 herunterholen (nächste Zweiergruppe)

doppelte Produkt von 4106= 8212 Division $\frac{7220}{8212}$ ergibt 0+Rest (nächste Ziffer 0 = erste Nachkommastelle)

ClassPad: $\sqrt{16859958}=4106.087919$

722000(0) erneut zwei Nachkommastellen 00 herunterholen (nächste Zweiergruppe)

Algeb Standard Reell 2π

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

Datei Edit Einfügen Aktion

Division 722000:82120=8+Rest65040 (nächste Ziffer 8 = zweite Nachkommastelle)

ClassPad: 722000−8∗82120=65040

$8*821200+8^2=$ 6569664 (mit ClassPad)

−−−−−−−−−−−

7220000−6569664= 6503360(0)(nächste Zweiergruppe 00 angefügt)

Division 6503360:(2∗410608)=7+Rest754848 (nächste Ziffer 7)

ClassPad: 6503360−7∗(2∗410608)=754848

7∗2∗4106080+49= 57485169 (mit ClassPad)

−−−−−−−−−−−

65033600−57485169= 75484310(0)(nächste Zweiergruppe 00 angefügt)

Division 75484310:(2∗4106087)=9+Rest1574744 (nächste Ziffer 9)

75484310−9∗(2∗4106087)=1574744

Algeb Standard Reell 2π

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Datei Edit Einfügen Aktion

9*(2*41060870)+81 =   739095741   (mit ClassPad)

754843100-739095741=   157473590(0)(nächste Zweiergruppe 00 angefügt)

                                        Division

157473590:(2*41060879)=1+Rest75351832 (nächste Ziffer 1)

157473590-1*(2*41060879)=75351832

1*(2*410608790)+1=   821217581   (mit ClassPad)

1574735900-821217581=   7535183190(0)(nächste Zweiergruppe 00 angefügt)

                                        Division

7535183190:(2*410608791)=9+Rest144224952 (nächste Ziffer 9)

7535183190-9*(2*410608791)=144224952

9*(2*4106087910)+81=   73909582461   (mit ClassPad)

75351831900-73909582461=   14422494390(0)(nächste Zweiergruppe 00 angefügt)

                                        Division

Algeb   Standard   Reell   2π

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

HOCHSCHULE FÜR
TECHNIK UND WIRTSCHAFT
DRESDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Datei Edit Einfügen Aktion

Division

14422494390:(2*4106087919)=1+Rest6210318552 (nächste Ziffer 1)

14422494390−1*(2*4106087919)=6210318552

1*(2*41060879190)+1= 82121758381 (mit ClassPad)

\-------------

144224943900−82121758381= 621031855190(0)(nächste Zweiergruppe 00 angefügt)

Division

621031855190:(2*41060879191)=7+Rest46179546516 (nächste Ziffer 7)

621031855190−7*(2*41060879191)=46179546516

7*(2*410608791910)+47= 5748523086787 (mit ClassPad)

\--------------

6210318551900−5748523086787= 461795465113 0(0)(nächste Zweiergruppe 00 angefügt) usw.

Kontrolle mit ClassPad:

Algeb Standard Reell 2π

Datei Edit Einfügen Aktion

Kontrolle mit ClassPad:

$4106087919\,17^2$

16859957999538204534889

16859957,**9999**538204534889 Wert **etwas zu klein**

410608791918^2

16859958000359422118724

16859958,**0000**359422118724 Wert **etwas zu groß**

Kambly:

Im Beispiel 4) stellt sich das Verfahren in der einfachsten Form dar, ohne alle für die Praxis überflüssige Zuthat; zugleich ist in demselben der Fall vorgesehen, daß die erste Klasse selbst eine Quadratzahl ist, und als Quotient sich einmal Null ergiebt. Als Probe für dieses Beispiel, in welchem die Wurzelausziehung nicht aufgeht, hat man die Gleichung

$16859958 = 4106^2 + 722.$

Algeb Standard Reell 2π

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

Datei Edit Einfügen Aktion

Beweis. Das Wesen des Verfahrens besteht in der Ermittlung und Verengung der Grenzen, innerhalb deren die Wurzel liegen muß. Nämlich:

Da die höheren Einheiten 10, 100, 1000 u.s.w. die Quadrate 100, 10000, 1000000 u.s.w. ergeben, so muß zu einer Zahl zwischen 100 und 10000 eine zweiziffrige Zahl als Wurzel gehören, zu einer Zahl zwischen 10000 und 1000000 eine dreiziffrige Zahl u.s.w., d.h.:

eine mehr als 2ziffrige Zahl (100 und darüber) hat eine mehr als 1ziffrige
eine mehr als 4ziffrige Zahl (10000 und darüber) hat eine mehr als 2ziffrige Zahl als Wurzel u.s.w.

Darauf beruht die Eintheilung in Klassen zu zwei Stellen. Ist nun die höchste Einheit der Wurzel festgestellt so ergiebt sich die Anzahl dieser Einheiten durch folgende Betrachtung:

40^2, d.i. $(4\cdot 10)^2 = 16\cdot 100$ und 50^2, d.i. $(5\cdot 10)^2 = 25\cdot 100$;

desgl. ist $800^2 = 64\cdot 10000$ und $900^2 = 81\cdot 10000$;

es muß also zu einer Zahl zwischen 1600 und 2500 eine Wurzel zwischen 40 und 50, und zu einer Zahl 640000 und 810000 eine Wurzel zwischen 800 und 900 gehören.

Hierauf beruht die Behandlung der ersten Klasse.

Algeb Standard Reell 2π

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

Datei Edit Einfügen Aktion

Die weitere Bestimmung der Grenzen folgt aus den Formeln §41, Lehrs. 1 und Zus. 2.

Hat man z.B. in Beispiel 1) gefunden, daß $\sqrt{2209}$ zweiziffrig sein und zwischen 40 und 50 liegen muß, und bezeichnet man die fehlenden Einer mit b, so wird

$$\sqrt{2209} = 40 + b,$$

$$2209 = 1600 + 80b + b^2,$$

$$609 = 80b + b^2.$$

Da nun b^2, d.i. b•b viel kleiner sein muß als 80b, so wird 609 nicht viel > 80b, folglich b nicht viel < $\frac{609}{80}$ sein.

Man erhält also b, wenn man mit 80 in 609 dividirt, etwa = 7. Trägt man diesen Werth in $609 = 80b + b^2$ ein,
so ergiebt sich $609 = 560 + 49$.

Algeb Standard Reell 2π

Wurzelziehen, wie zu Urgroßvaters Zeiten

Datei Edit Einfügen Aktion

Hat man z.B. in Beispiel 2) gefunden, daß $\sqrt{692224}$ zwischen 800 und 900 liegt, und bezeichnet man die Anzahl der fehlenden Zehner mit β, ihren Einerwerth mit b, die Einer mit c, so ist

$$\sqrt{692224} = 800 + b + c,$$

$$692224 = 640000 + 1600b + b^2$$
$$+ 2(800 + b)c + c^2,$$

---

folglich $52224 = 1600b + b^2 + 2(800 + b)c + c^2$.

Da es sich nun zunächst um die Bestimmung von b handelt, so lasse man einstweilen $2(800 + b)c + c^2$ hinweg, und es bleibt

$$52224 < 1600b + b^2.$$

Vernachläßigt man noch b^2, welches im Vergleich zu 1600b unbeachtet bleiben darf, da b höchstens = 90 sein kann, so hat man |

Algeb Standard Reell 2π

Datei Edit Einfügen Aktion

$52224 < 1600b$, mithin b, d.i. $10\beta < \frac{52224}{1600}$; β ergiebt sich also durch Division von 16000 in 52224, etwa = 3, also b = 30.

Trägt man diesen Werth in

$$52224 = 1600b + b^2 + 2(800 + b)c + c^2 \text{ ein,}$$

so erhält man $52224 = 48000 + 900 + 1660c + c^2$, folglich

$$3324 = 1660c + c^2.$$

Den Werth von c ermittelt mam nunmehr, wie im vorigen Exempel b, indem man mit 1660 in 3324 dividirt.

Es ergiebt sich 2 und $3324 = 3320 + 4$.

Im dritten Beispiel würde die Division der 200 in 25721 den Quotient $12 \cdot 10$ geben, da aber $b < 100$ sein muß, so kann nur 90 genommen werden, und auch dieß würde falsch sein, weil

$$25721 < 200 \cdot 90 + 90^2 \text{ d.i.}$$
$$< 18000 + 8100 \text{ ist.}$$

Algeb Standard Reell 2π

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!