SS2018 -Rechteckimpuls- Prof. Paditz

Gegeben ist der Impuls f(x), $-\pi<x\le\pi$,

$$f(x)=\begin{cases}-1, -\pi<x<0\\ 0,\ x=0\\ 1,\ 0<x<\pi\\ 0,\ x=\pi\end{cases}$$

periodische Fortsetzung $f(x+T)=f(x)$, $T=2\pi$,

Unstetigkeitsstellen $x=\pm k\pi$, $k\in\mathbf{N}=\{0,1,2,...\}$

Define y1(x)=signum(sin(x))

done

2D-Grafik

Grafikformat: zeichne pixelweise

f(x) ist ein ungerade Fkt.,d.h. $a_k=0$, $k\in\mathbf{N}$.

Define $b(k)=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(k*x)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin(k*x)\,dx\right)$

done

b(k)

$$\frac{\frac{1-\cos(k\cdot\pi)}{k}+\frac{\cos(2\cdot k\cdot\pi)-\cos(k\cdot\pi)}{k}}{\pi}$$

simplify(ans)

$$\frac{1+\cos(2\cdot k\cdot\pi)-2\cdot\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot\pi}$$

$$\frac{1+\cos(2\cdot k\cdot\pi)-2\cdot\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot\pi}=\frac{1+1-2\cdot\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot\pi}$$

$$\frac{1+1-2\cdot\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot\pi}=\frac{2\cdot(1-\cos(k\cdot\pi))}{k\cdot\pi}$$

aus Symmetriegründen (ungerade Fkt.) gilt

Define $b(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(k*x)\,dx$

done

b(k)

$$\frac{2\cdot(1-\cos(k\cdot\pi))}{k\cdot\pi}$$

$$\frac{2\cdot(1-\cos(k\cdot\pi))}{k\cdot\pi}=\frac{2\cdot\left(1-(-1)^k\right)}{k\cdot\pi}$$

Fourierpolynom:

Define $y2(x)=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{2\cdot\left(1-(-1)^k\right)}{k\cdot\pi}\sin(k*x)\right)$

done

2D-Grafik

komplexe Darstellung:

trigToExp(sin(k*x))

$$\frac{-(e^{k\cdot x\cdot i}-e^{-k\cdot x\cdot i})\cdot i}{2}$$

expand(ans)

$$\frac{-e^{k\cdot x\cdot i}\cdot i}{2}+\frac{e^{-k\cdot x\cdot i}\cdot i}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{2\cdot(1-(-1)^{k})}{k\cdot\pi}\,\frac{-e^{k\cdot x\cdot i}\cdot i}{2}\right)+\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{2\cdot(1-(-1)^{k})}{k\cdot\pi}\,e^{-k\cdot}\cdots\right.$$

$$\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{2\cdot(1-(-1)^{k})}{k\cdot\pi}\,\frac{-e^{k\cdot x\cdot i}\cdot i}{2}\right)+\sum_{k=-5}^{-1}\left(\frac{2\cdot(1-(-1)^{-k})}{-k\cdot\pi}\,e^{k}\cdots\right.$$

$$\sum_{k=-5,\,k\neq 0}^{5}\left(\frac{2\cdot(1-(-1)^{k})}{k\cdot\pi}\,\frac{-e^{k\cdot x\cdot i}\cdot i}{2}\right)=$$

$$\sum_{k=-5,\,k\neq 0}^{5}\left(\frac{(1-(-1)^{k})}{k\cdot\pi}\,\frac{-e^{k\cdot x\cdot i}\cdot i}{1}\right)=$$

$$\sum_{k=-5,\,k\neq 0}^{5}\left(\frac{((-1)^{k}-1)\cdot i}{k\cdot\pi}\,e^{k\cdot x\cdot i}\right)$$

komplexe Fourierkoeff.:

$$c_k=\frac{((-1)^{k}-1)\cdot i}{k\cdot\pi}$$

Define $c(k)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)*e^{-k\cdot x\cdot i}\,dx+\int_{0}^{\pi}1*e^{-k\cdot x\cdot i}\,dx\right)$

done

c(k)

$$\frac{-\left(\frac{2\cdot i}{k}-\frac{e^{k\cdot\pi\cdot i}\cdot i}{k}-\frac{e^{-k\cdot\pi\cdot i}\cdot i}{k}\right)}{2\cdot\pi}$$

cExpand(ans)

$$-\left(\frac{1}{k\cdot\pi}-\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot\pi}\right)\cdot i$$

$$-\left(\frac{1}{k\cdot\pi}-\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k\cdot\pi}\right)\cdot i=\frac{\left((-1)^{k}-1\right)\cdot i}{k\cdot\pi}$$

Define $c(k)=\frac{\left((-1)^{k}-1\right)\cdot i}{k\cdot\pi}$

done

Define $y3(x)=\sum_{k=1}^{5}\left(c(k)e^{k\cdot x\cdot i}\right)+\sum_{k=-5}^{-1}\left(c(k)e^{k\cdot x\cdot i}\right)$

done

y3(x)

$$\frac{-2\cdot e^{5\cdot x\cdot i}\cdot i}{5\cdot\pi}-\frac{2\cdot e^{3\cdot x\cdot i}\cdot i}{3\cdot\pi}-\frac{2\cdot e^{x\cdot i}\cdot i}{\pi}+\frac{2\cdot e^{-x\cdot i}\cdot i}{\pi}+\frac{2\cdot e^{-3\cdot}}{3\cdot}$$

cExpand(ans)

$$\frac{4\cdot\sin(3\cdot x)}{3\cdot\pi}+\frac{4\cdot\sin(5\cdot x)}{5\cdot\pi}+\frac{4\cdot\sin(x)}{\pi}$$

y2(x)

$$\frac{4\cdot\sin(3\cdot x)}{3\cdot\pi}+\frac{4\cdot\sin(5\cdot x)}{5\cdot\pi}+\frac{4\cdot\sin(x)}{\pi}$$

Berechnung von c_k als Fouriertransformation:

$H(x)$=heaviside(x)

Einheitssprungfunktion (Heaviside-Fkt.)

https://de.wikipedia.org/wiki/Heaviside-Funktion

Define $y4(x)=-(H(x+\pi)-H(x))+(H(x)-H(x-\pi))$

done

Ausgangsimpuls

simplify(y4(x))

$$-H(-\pi+x)-H(\pi+x)+2\cdot H(x)$$

y4(0)

0

$y4(\pi)$

$$\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2\pi} F_x(y4(x))[k]$

$$\frac{2\cdot\cos(k\cdot\pi)\cdot i-2\cdot i+2\cdot k\cdot\delta(k)\cdot\pi-2\cdot k\cdot\cos(k\cdot\pi)\cdot\delta(k)\cdot\pi}{2\cdot k\cdot\pi}$$

simplify(ans)

$$\frac{-(1-\cos(k\cdot\pi))\cdot i}{k\cdot\pi}$$

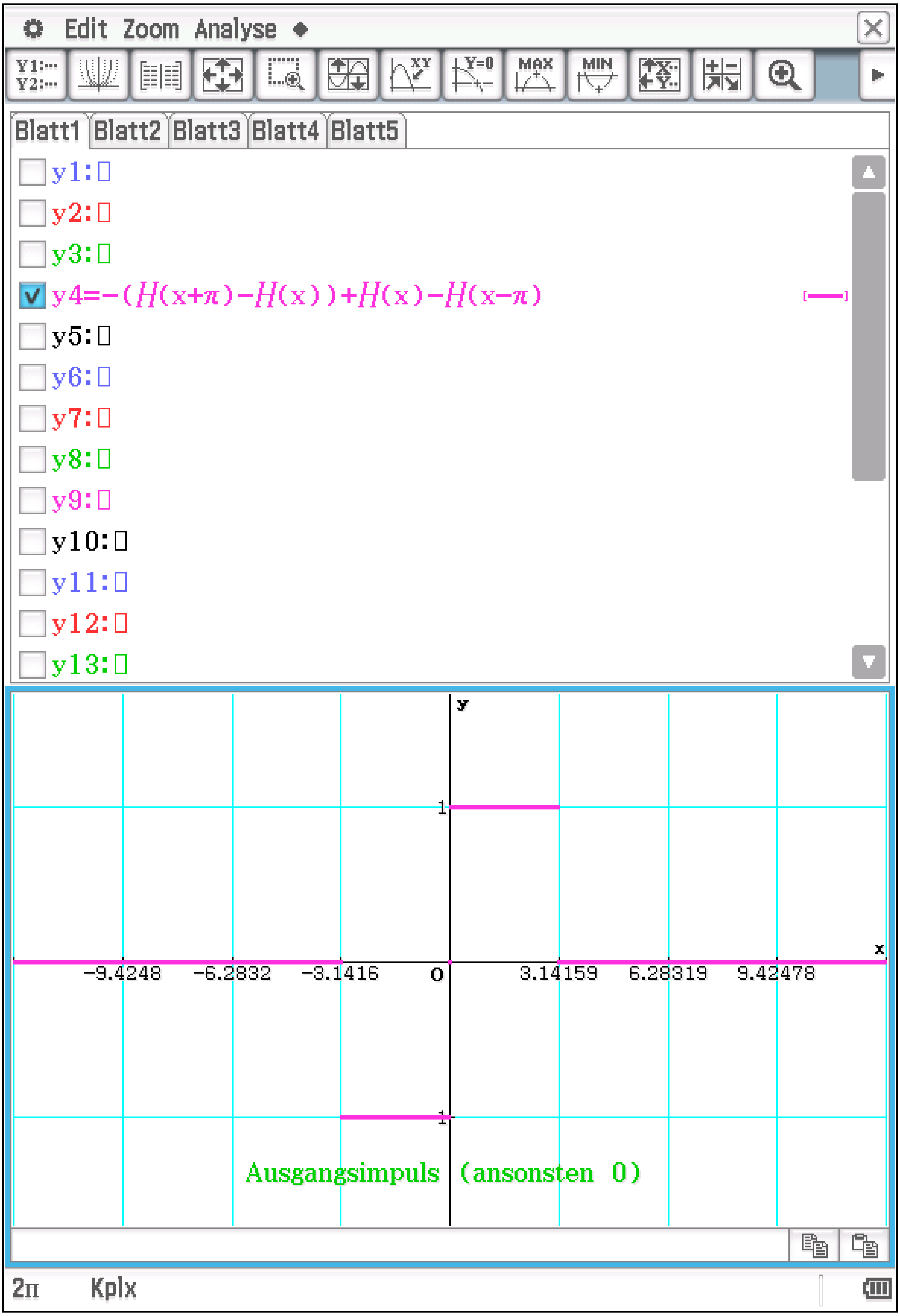
$c_k=\frac{((-1)^k-1)\cdot i}{k\cdot\pi}$, $x=\pm k\pi$, $k=1,2,3,...$

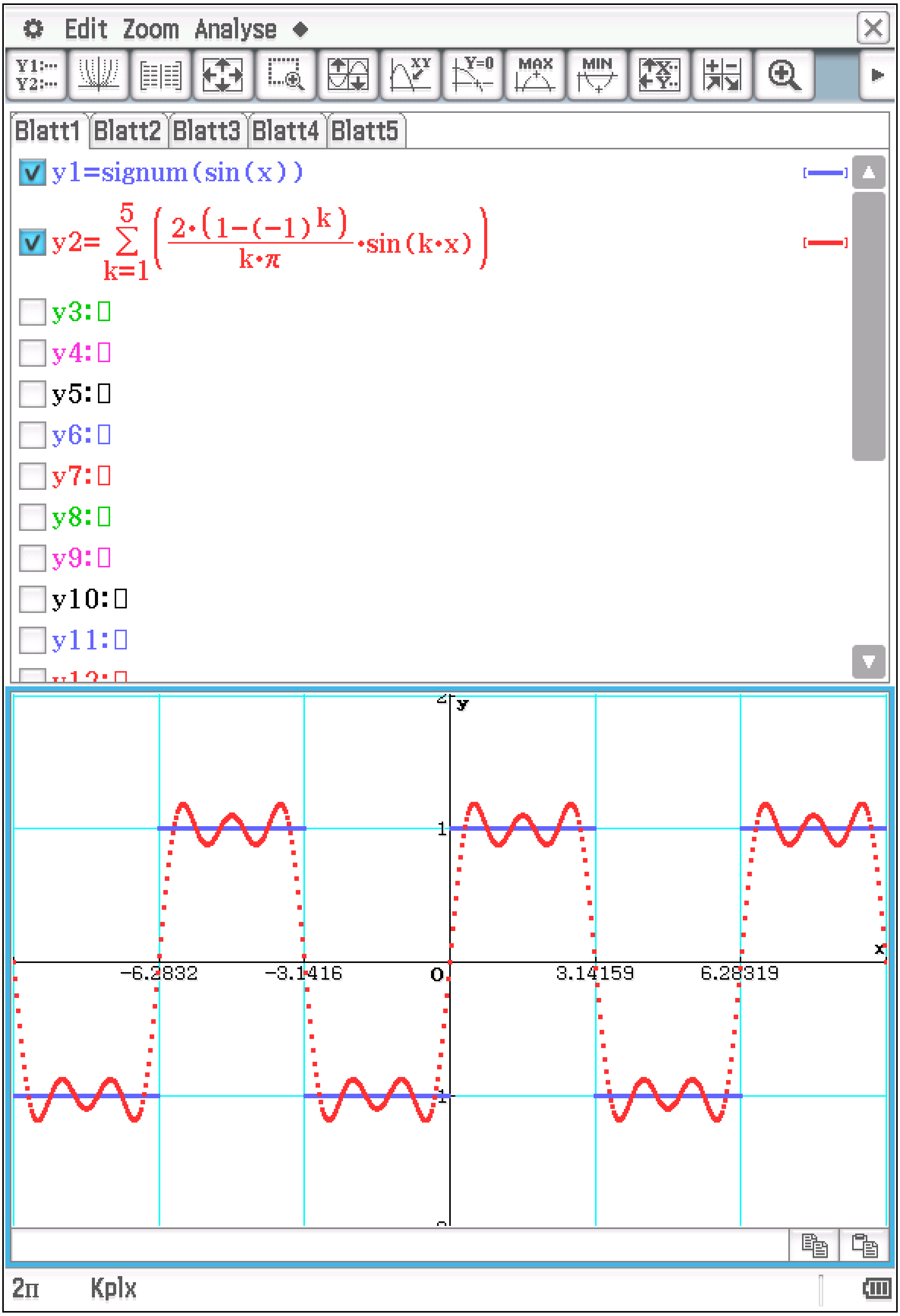
$\lim_{k\to 0}\left(\frac{-(1-\cos(k\cdot\pi))\cdot i}{k\cdot\pi}\right)$

$$0$$

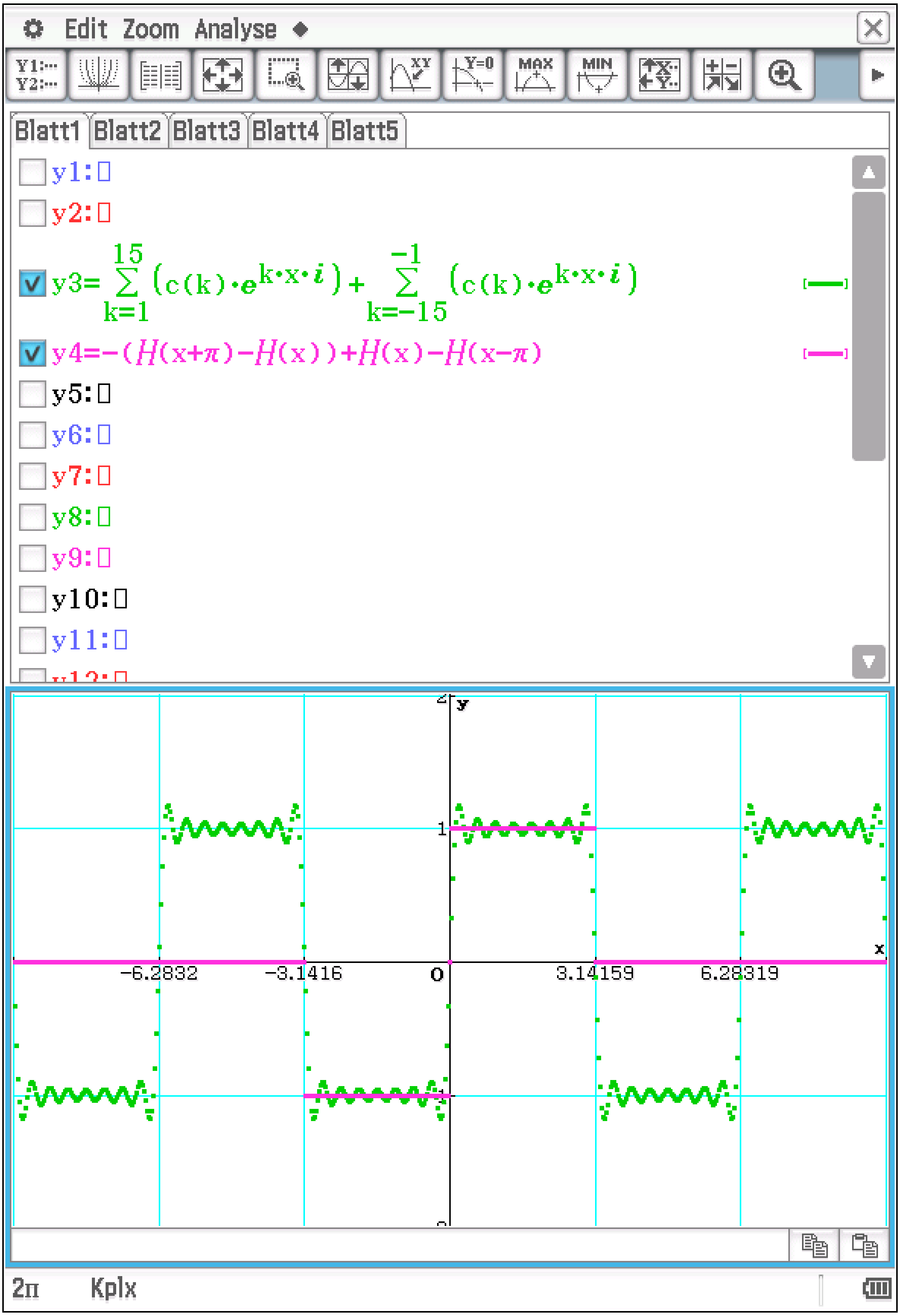
$c_0=0$

Rechteckimpuls





Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=signum(sin(x))
$y2=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{2\cdot(1-(-1)^k)}{k\cdot\pi}\cdot\sin(k\cdot x)\right)$
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y
x
1
-1
-6.2832
-3.1416
0
3.14159
6.28319
2π
Kplx


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1:
y2:
y3= ∑_{k=1}^{15} (c(k)·e^{k·x·i}) + ∑_{k=−15}^{−1} (c(k)·e^{k·x·i})
y4=−(H(x+π)−H(x))+H(x)−H(x−π)
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y
x
−6.2832
−3.1416
0
3.14159
6.28319
1
2π Kplx