

AUFGABE 14

Wir bezeichnen mit p_1 die Streckenlänge von F_1 nach P und mit $p_2 < p_1$ diejenige von F_2 nach P .

Im Dreieck F_1F_2P gelten folgende Gleichungen:

$$p_1^2 = (c+x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad p_2^2 = (c-x)^2 + y^2.$$

Wegen $p_2 < p_1$ gilt $p_2 = p_1 - 330 \times t$. Hieraus erhalten wir

$$p_1^2 = (c+x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad (p_1 - 330 \times t)^2 = (c-x)^2 + y^2.$$

Nun eliminieren wir $p_1 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$ und erhalten

$$\left(\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - 330 \times t \right)^2 = (c-x)^2 + y^2.$$

Vereinfacht:

$$\begin{aligned} \text{expand} \left(\left(\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - 330 \times t \right)^2 - ((c-x)^2 + y^2) = 0 \right) \\ 108900 \cdot t^2 + 4 \cdot c \cdot x - 660 \cdot t \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x} = 0 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \left(108900 \cdot t^2 + 4 \cdot c \cdot x = 660 \cdot t \cdot \sqrt{(c+x)^2 + y^2} \right)^2 \times \frac{1}{16} \\ \frac{(108900 \cdot t^2 + 4 \cdot c \cdot x)^2}{16} = 27225 \cdot t^2 \cdot (x^2 + y^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x) \end{aligned}$$

Es folgen mit $108900 = 330^2$ weitere Umformungen:

$$\text{expand}\left(\frac{((330 \cdot t)^2 + 4 \cdot c \cdot x)^2}{16} - (165 \cdot t)^2 \cdot ((c+x)^2 + y^2)\right) = \epsilon^2$$

$$741200625 \cdot t^4 + c^2 \cdot x^2 - 27225 \cdot t^2 \cdot x^2 - 27225 \cdot t^2 \cdot y^2 - 27225 \cdot t^4$$

Es gilt:

$$\sqrt{27225} \qquad 165$$

$$\sqrt{741200625} \qquad 27225$$

Hieraus folgt:

$$(c^2 - (165 \cdot t)^2) \cdot x^2 - (165 \cdot t)^2 \cdot y^2 = (165 \cdot c)^2 \cdot t^2 - (165 \cdot t)^4$$

und

$$\frac{x^2}{(165 \cdot t)^2} - \frac{y^2}{c^2 - (165 \cdot t)^2} = \frac{-(165 \cdot t)^4 + (165 \cdot c)^2 \cdot t^2}{(c^2 - (165 \cdot t)^2) \cdot (165 \cdot t)^2}$$

$$\text{simplify}\left(\frac{-(165 \cdot t)^4 + (165 \cdot c)^2 \cdot t^2}{(c^2 - (165 \cdot t)^2) \cdot (165 \cdot t)^2}\right)$$

1

Mit $330^2 = 4 \times 165^2$ folgt die vorgegebene Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{(330 \cdot t)^2} - \frac{y^2}{4 \cdot c^2 - (330 \cdot t)^2} = \frac{1}{4} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{x^2}{(165 \cdot t)^2} - \frac{y^2}{c^2 - (165 \cdot t)^2} = 1.$$

AUFGABE 15

a) Aus den Scheitelpunktskoordinaten folgt $b=6$. Der Asymptotenanstieg ist $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{1}{2}$, d.h.

$a=12$. Damit lautet die Hyperbelgleichung mit den übereinanderliegenden Scheitelpunkten

$$\left(\frac{y}{6}\right)^2 - \left(\frac{x}{12}\right)^2 = 1$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü	f(xy)
--------------------------------------	-------

b) Aus den Scheitelpunktskoordinaten folgt $a=10$.

Der Asymptotenanstieg ist $\pm \frac{b}{a} = \pm 5$, d.h.

$b=50$. Damit lautet die Hyperbelgleichung

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 - \left(\frac{y}{50}\right)^2 = 1$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü	f(xy)
--------------------------------------	-------

c) Mit den Formeln auf S. 263 folgt $e^2 = a^2 + b^2 = 13$ und $\pm \frac{b}{a} = \pm 5$, d.h. $a^2 + (5a)^2 = 13$.

Damit gilt $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $b = \sqrt{13 - \frac{1}{2}} = \sqrt{12,5}$. Die Hyperbelgleichung lautet

$$\left(\frac{y}{\sqrt{12,5}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü	f(xy)
--------------------------------------	--------------

d) Die Punkte liegen nebeneinander: $M(1/-2)$, $S(3/-2)$ und $F(4/-2)$. Hieraus folgen $a=2$ und $e=3$.

Damit ist $b=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. Die Hyperbelgleichung lautet

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1.$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü	f(xy)
--------------------------------------	--------------

e) Mit $M(8/7)$ und $F(13/7)$ gilt $e=\sqrt{a^2+b^2}=5$ und

$e=\frac{25}{9}=\sqrt{1+\frac{b}{a}}$, sowie $b=\sqrt{p \times a}$. Hieraus folgen

$$e=\frac{25}{9}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ und somit } \frac{25}{9}=\sqrt{\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{a^2}}.$$

$$\text{solve}\left(\frac{25}{9}=\sqrt{\frac{25}{a^2}}, a\right) | a > 0$$

$$\left\{a=\frac{9}{5}\right\}$$

$$\text{solve}\left(\left(\frac{9}{5}\right)^2+b^2=25, b\right) | b > 0$$

$$\left\{ b = \frac{4 \cdot \sqrt{34}}{5} \right\}$$

Die Hyperbelgleichung lautet

$$\left(\frac{x-8}{\frac{9}{5}} \right)^2 - \left(\frac{y-7}{\frac{4 \cdot \sqrt{34}}{5}} \right)^2 = 1.$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü

f(x,y)

Hinweis:

Ändert man in e) die Vorgabe $\epsilon = \frac{25}{9}$ in $\epsilon = \frac{5}{3}$ ab,

erhält man die vereinfachten Formeln $a=3$ und $b=4$

sowie $\left(\frac{x-8}{3} \right)^2 - \left(\frac{y-7}{4} \right)^2 = 1.$