Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.267

AUFGABE 12

Wir benutzen den im ClassPad vorhandenen Index k statt p.

Weiterhin nehmen wir an, dass der Koordinatenursprung im Erdkugelmittelpunkt liegt. Es sei r=6373km der Erdradius, wobei wir näherungsweise von der Erdkugel ausgehen. Wir bezeichnen die konstante Satellitenhöhe mit h, d.h. h=20183km.
Damit gilt für S_1 bis S_3:

$x_m{}^2+y_m{}^2+z_m{}^2=(r+h)^2$ mit m=1,2,3,

und wir haben folgende zusätzliche Gleichung für N:

$x_k{}^2+y_k{}^2+z_k{}^2=r^2$.

Durch Quadrieren entsteht mit p_1,p_2,p_3 folgendes quadratische Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1{}^2=(x_k-x_1)^2+(y_k-y_1)^2+(z_k-z_1)^2 \\ p_2{}^2=(x_k-x_2)^2+(y_k-y_2)^2+(z_k-z_2)^2 \\ p_3{}^2=(x_k-x_3)^2+(y_k-y_3)^2+(z_k-z_3)^2 \\ (r+h)^2=x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2 \\ (r+h)^2=x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2 \\ (r+h)^2=x_3{}^2+y_3{}^2+z_3{}^2 \\ r^2=x_k{}^2+y_k{}^2+z_k{}^2 \end{array}\right|_{x_k,y_k,z_k}$$

DelVar $x_k, y_k, z_k, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, h, r$

done

Wir gehen nunmehr schrittweise vor und bezeichnen den Abstand von S_1 nach S_2 mit p_{12}.
Der Schnittkreis der Kugeln um S_1 bzw. S_2 hat den Radius $r_{12}=\sqrt{p_1^2-(t\times p_{12})^2}$ mit $t_{12}=\dfrac{p_{12}^2+p_1^2-p_2^2}{2\cdot p_{12}^2}$,

d.h. $r_{12}=\sqrt{p_1^2-\left(\dfrac{p_{12}^2+p_1^2-p_2^2}{2\cdot p_{12}}\right)^2}$.

Wir betrachten dazu die Unterteilung der Strecke von S_1 nach S_2 an der Stelle S_{12}, dem Mittelpunkt des Schnittkreises. $t\times p_{12}$ sei die Streckenlänge von S_1 nach S_{12} und $(1-t)\times p_{12}$ sei die Streckenlänge von S_{12} nach S_2. Es gilt (Pythagoras) für t der Absatz:

$$\text{solve}\left(p_1^2-(t_{12}\times p_{12})^2=p_2^2-((1-t_{12})\times p_{12})^2, t_{12}\right)$$

$$\left\{t_{12}=\frac{p_{12}^2+p_1^2-p_2^2}{2\cdot p_{12}^2}\right\}$$

N liegt auf diesem Schnittkreis, d.h.

$$r_{12}=\text{norm}\left(\begin{bmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+t\times\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\right)\right)\right).$$

Der Vektor von S_1 nach S_2 und der Radiusvektor des Schnittkreises stehen zudem senkrecht zueinander:

$$\operatorname{dotP}\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}+t_{12}\times\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right)\right)\right)=0$$

$$-(x_1-x_2)\cdot(t_{12}\cdot(x_1-x_2)-x_1+x_k)-(y_1-y_2)\cdot(t_{12}\cdot(y_1-y_2)-y_1+y \blacktriangleright$$

Damit liegt der Punkt N in der zuletzt erhaltenen Ebenengleichung für x_k,y_k,z_k.

$$-(x_1-x_2)\cdot(t_{12}\cdot(x_1-x_2)-x_1+x_k)-(y_1-y_2)\cdot(t_{12}\cdot(y_1-y_2)-y_1+y \blacktriangleright$$
$$-(x_1-x_2)\cdot(t_{12}\cdot(x_1-x_2)-x_1+x_k)-(y_1-y_2)\cdot(t_{12}\cdot(y_1-y_2)-y_1+y \blacktriangleright$$

Wir stellen nun in analoger Weise Ebenengleichungen für die Schnittkreise zwischen S_1 und S_3 bzw. S_2 und S_3 auf, indem wir einfach umindizieren:

$$-(x_1-x_3)\cdot(t_{13}\cdot(x_1-x_3)-x_1+x_k)-(y_1-y_3)\cdot(t_{13}\cdot(y_1-y_3)-y_1+y \blacktriangleright$$
$$-(x_1-x_3)\cdot(t_{13}\cdot(x_1-x_3)-x_1+x_k)-(y_1-y_3)\cdot(t_{13}\cdot(y_1-y_3)-y_1+y \blacktriangleright$$

$$-(x_2-x_3)\cdot(t_{23}\cdot(x_2-x_3)-x_2+x_k)-(y_2-y_3)\cdot(t_{23}\cdot(y_2-y_3)-y_2+y \blacktriangleright$$
$$-(x_2-x_3)\cdot(t_{23}\cdot(x_2-x_3)-x_2+x_k)-(y_2-y_3)\cdot(t_{23}\cdot(y_2-y_3)-y_2+y \blacktriangleright$$

Mit den Abkürzungen $x_{12}=x_1-x_2$ usw. vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$-(x_{12})\cdot(t_{12}\cdot(x_{12})-x_1+x_k)-(y_{12})\cdot(t_{12}\cdot(y_{12})-y_1+y_k)-(z_{12})\cdot(\blacktriangleright$$
$$-x_{12}\cdot(t_{12}\cdot x_{12}-x_1+x_k)-y_{12}\cdot(t_{12}\cdot y_{12}-y_1+y_k)-z_{12}\cdot(t_{12}\cdot z_{12}-z_1 \blacktriangleright$$

$$-(x_{13})\cdot(t_{13}\cdot(x_{13})-x_1+x_k)-(y_{13})\cdot(t_{13}\cdot(y_{13})-y_1+y_k)-(z_{13})\cdot(\blacktriangleright$$
$$-x_{13}\cdot(t_{13}\cdot x_{13}-x_1+x_k)-y_{13}\cdot(t_{13}\cdot y_{13}-y_1+y_k)-z_{13}\cdot(t_{13}\cdot z_{13}-z_1 \blacktriangleright$$

$$-(x_{23})\cdot(t_{23}\cdot(x_{23})-x_2+x_k)-(y_{23})\cdot(t_{23}\cdot(y_{23})-y_2+y_k)-(z_{23})\cdot(\blacktriangleright$$
$$-x_{23}\cdot(t_{23}\cdot x_{23}-x_2+x_k)-y_{23}\cdot(t_{23}\cdot y_{23}-y_2+y_k)-z_{23}\cdot(t_{23}\cdot z_{23}-z_2 \blacktriangleright$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} G14 \\ G15 \\ G16 \end{cases}\right|_{x_k, y_k, z_k}$$

$$\left\{ x_k = \frac{-\left(x_{12}^2 \cdot (t_{12} \cdot y_{13} \cdot z_{23} - t_{12} \cdot y_{23} \cdot z_{13}) + t_{13} \cdot x_{13}^2 \cdot y_{23} \cdot z_{12} + 1 \ldots\right.}{\ldots} \right.$$

Damit sind die gesuchten Koordinaten berechnet.

Wir versuchen noch, dass Gleichungssystem verkürzt mithilfe von Matrizen, Vektoren und Determinanten zu beschreiben und zu lösen:

expand(G14)

$$-t_{12} \cdot x_{12}^2 - t_{12} \cdot y_{12}^2 - t_{12} \cdot z_{12}^2 + x_{12} \cdot x_1 - x_{12} \cdot x_k + y_{12} \cdot y_1 - y_{12} \cdot y \ldots$$

expand(G15)

$$-t_{13} \cdot x_{13}^2 - t_{13} \cdot y_{13}^2 - t_{13} \cdot z_{13}^2 + x_{13} \cdot x_1 - x_{13} \cdot x_k + y_{13} \cdot y_1 - y_{13} \cdot y \ldots$$

expand(G16)

$$-t_{23} \cdot x_{23}^2 - t_{23} \cdot y_{23}^2 - t_{23} \cdot z_{23}^2 + x_{23} \cdot x_2 - x_{23} \cdot x_k + y_{23} \cdot y_2 - y_{23} \cdot y \ldots$$

$$\begin{bmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{13} & y_{13} & z_{13} \\ x_{23} & y_{23} & z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$0$$

$$\begin{bmatrix} p_1^2 = (x_k - x_1)^2 + (y_k - y_1)^2 + (z_k - z_1)^2 \\ p_2^2 = (x_k - x_2)^2 + (y_k - y_2)^2 + (z_k - z_2)^2 \\ p_3^2 = (x_k - x_3)^2 + (y_k - y_3)^2 + (z_k - z_3)^2 \end{bmatrix}$$

$\text{expand}(p_1^2 = (x_k - x_1)^2 + (y_k - y_1)^2 + (z_k - z_1)^2)$

$$p_1^2 = x_1^2 + x_k^2 + y_1^2 + y_k^2 + z_1^2 + z_k^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_k - 2 \cdot y_1 \cdot y_k - 2 \cdot z_1 \ldots$$

$p_1^2=r^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2\cdot x_1\cdot x_k-2\cdot y_1\cdot y_k-2\cdot z_1\cdot z_k \rightarrow Gl1$

$$p_1^2=r^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2\cdot x_1\cdot x_k-2\cdot y_1\cdot y_k-2\cdot z_1\cdot z_k$$

$p_2^2=r^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2\cdot x_2\cdot x_k-2\cdot y_2\cdot y_k-2\cdot z_2\cdot z_k \rightarrow Gl2$

$$p_2^2=r^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2\cdot x_2\cdot x_k-2\cdot y_2\cdot y_k-2\cdot z_2\cdot z_k$$

$p_3^2=r^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2-2\cdot x_3\cdot x_k-2\cdot y_3\cdot y_k-2\cdot z_3\cdot z_k \rightarrow Gl3$

$$p_3^2=r^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2-2\cdot x_3\cdot x_k-2\cdot y_3\cdot y_k-2\cdot z_3\cdot z_k$$

$$\left\{\begin{matrix} Gl1 \\ Gl2 \\ Gl3 \end{matrix}\right|_{x_k,y_k,z_k}$$

$$\left\{x_k=\frac{p_1^2\cdot y_3\cdot z_2-p_2^2\cdot y_3\cdot z_1-p_3^2\cdot y_1\cdot z_2+p_3^2\cdot y_2\cdot z_1+r^2\cdot y_1\cdot \ldots}{\ldots}\right.$$

Damit sind die gesuchten Koordinaten berechnet.

Wir versuchen noch, dass Gleichungssystem verkürzt mithilfe von Matrizen, Vektoren und Determinanten zu beschreiben und zu lösen.
Die MatrixA ist nichts anderes als das zweifache Spatprodukt der Ortsvektoren zu S_1 bis S_3, die als linear unabhängig angesehen werden können. Damit ist det(MatrixA)≠0.

$\begin{bmatrix} 2\cdot x_1 & 2\cdot y_1 & 2\cdot z_1 \\ 2\cdot x_2 & 2\cdot y_2 & 2\cdot z_2 \\ 2\cdot x_3 & 2\cdot y_3 & 2\cdot z_3 \end{bmatrix} \rightarrow MatrixA$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot x_1 & 2\cdot y_1 & 2\cdot z_1 \\ 2\cdot x_2 & 2\cdot y_2 & 2\cdot z_2 \\ 2\cdot x_3 & 2\cdot y_3 & 2\cdot z_3 \end{bmatrix}$$

det(MatrixA)

$$8\cdot x_1\cdot y_2\cdot z_3-8\cdot x_1\cdot y_3\cdot z_2-8\cdot x_2\cdot y_1\cdot z_3+8\cdot x_2\cdot y_3\cdot z_1+8\cdot x_3\cdot y_1\cdot \ldots$$

$$\begin{bmatrix} r^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-p_1^2 \\ r^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-p_2^2 \\ r^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2-p_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow rechteS$$

$$\begin{bmatrix} -p_1^2+r^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ -p_2^2+r^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2 \\ -p_3^2+r^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \Rightarrow unbekN$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

$$MatrixA^{-1} \times rechteS$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{-\left(p_1^2-r^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2\right)\cdot(4\cdot y_2\cdot z_3-4\cdot y_3\cdot}{8\cdot x_1\cdot y_2\cdot z_3-8\cdot x_1\cdot y_3\cdot z_2-8\cdot x_2\cdot y_1\cdot z_3+8\cdot x_2\cdot y_3\cdot z_1+8\cdot x_3\cdot y} \\ \dfrac{\left(p_1^2-r^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2\right)\cdot(4\cdot x_2\cdot z_3-4\cdot x_3\cdot z}{8\cdot x_1\cdot y_2\cdot z_3-8\cdot x_1\cdot y_3\cdot z_2-8\cdot x_2\cdot y_1\cdot z_3+8\cdot x_2\cdot y_3\cdot z_1+8\cdot x_3\cdot y} \\ \dfrac{-\left(p_1^2-r^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2\right)\cdot(4\cdot x_2\cdot y_3-4\cdot x_3\cdot}{8\cdot x_1\cdot y_2\cdot z_3-8\cdot x_1\cdot y_3\cdot z_2-8\cdot x_2\cdot y_1\cdot z_3+8\cdot x_2\cdot y_3\cdot z_1+8\cdot x_3\cdot y} \end{array}\right.$$

Define w=+=

$$p_1^2=(x_k-x_1)^2+(y_k-y_1)^2+(z_k-z_1)^2 \Rightarrow Gl1$$

$$p_1^2=(x_1-x_k)^2+(y_1-y_k)^2+(z_1-z_k)^2$$

$$p_2^2=(x_k-x_2)^2+(y_k-y_2)^2+(z_k-z_2)^2 \Rightarrow Gl2$$

$$p_2^2=(x_2-x_k)^2+(y_2-y_k)^2+(z_2-z_k)^2$$

$p_3{}^2=(x_k-x_3)^2+(y_k-y_3)^2+(z_k-z_3)^2 \to Gl3$

$$p_3{}^2=(x_3-x_k)^2+(y_3-y_k)^2+(z_3-z_k)^2$$

simplify(Gl1-Gl2)→Gl4

$$p_1{}^2-p_2{}^2=x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2+z_1{}^2-z_2{}^2-2\cdot x_1\cdot x_k+2\cdot x_2\cdot x_k- \blacktriangleright$$

simplify(Gl2-Gl3)→Gl5

$$p_2{}^2-p_3{}^2=x_2{}^2-x_3{}^2+y_2{}^2-y_3{}^2+z_2{}^2-z_3{}^2-2\cdot x_2\cdot x_k+2\cdot x_3\cdot x_k- \blacktriangleright$$

simplify(Gl3-Gl1)→Gl6

$$-p_1{}^2+p_3{}^2=-x_1{}^2+x_3{}^2-y_1{}^2+y_3{}^2-z_1{}^2+z_3{}^2+2\cdot x_1\cdot x_k-2\cdot x_3\cdot x \blacktriangleright$$

Nunmehr haben wir drei lineare Gleichungen für die unbekannten Koordinaten x_k, y_k, z_k gefunden. Leider ist das lineare Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar, wie die Betrachtung der Koeffizientendeterminante (gleich Null) zeigt:

$$\begin{bmatrix} -2\cdot x_1+2\cdot x_2 & -2\cdot y_1+2\cdot y_2 & -2\cdot z_1+2\cdot z_2 \\ -2\cdot x_2+2\cdot x_3 & -2\cdot y_2+2\cdot y_3 & -2\cdot z_2+2\cdot z_3 \\ 2\cdot x_1-2\cdot x_3 & 2\cdot y_1-2\cdot y_3 & 2\cdot z_1-2\cdot z_3 \end{bmatrix} \to MatrixA$$

$$\begin{bmatrix} -2\cdot x_1+2\cdot x_2 & -2\cdot y_1+2\cdot y_2 & -2\cdot z_1+2\cdot z_2 \\ -2\cdot x_2+2\cdot x_3 & -2\cdot y_2+2\cdot y_3 & -2\cdot z_2+2\cdot z_3 \\ 2\cdot x_1-2\cdot x_3 & 2\cdot y_1-2\cdot y_3 & 2\cdot z_1-2\cdot z_3 \end{bmatrix}$$

det(MatrixA)

$$0$$

Wir benötigen weitere Gleichungen und nutzen die konstante Satellitenhöhe h=20183km mit aus. Es sei r=6373km der Erdradius, wobei wir näherungsweise von der Erdkugel ausgehen.

Dann gilt für N: $x_k{}^2+y_k{}^2+z_k{}^2=r^2$

Für S_1 bis S_3 gilt: $x_m{}^2+y_m{}^2+z_m{}^2=(r+h)^2$ mit m=1,2,3.

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=\left(\sqrt{x_k^2+y_k^2+z_k^2}+h\right)^2 \Rightarrow Gl7$$

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=\left(h+\sqrt{x_k^2+y_k^2+z_k^2}\right)^2$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=\left(\sqrt{x_k^2+y_k^2+z_k^2}+h\right)^2 \Rightarrow Gl8$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=\left(h+\sqrt{x_k^2+y_k^2+z_k^2}\right)^2$$

$$x_3^2+y_3^2+z_3^2=\left(\sqrt{x_k^2+y_k^2+z_k^2}+h\right)^2 \Rightarrow Gl9$$

$$x_3^2+y_3^2+z_3^2=\left(h+\sqrt{x_k^2+y_k^2+z_k^2}\right)^2$$

Damit vereinfachen sich die Gl4 bis Gl6 wie folgt, wenn man ausnutzt, dass

$x_1^2+y_1^2+z_1^2-\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)=0$,

$x_2^2+y_2^2+z_2^2-\left(x_3^2+y_3^2+z_3^2\right)=0$ und

$x_3^2+y_3^2+z_3^2-\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)=0$ gilt.

$$p_1^2-p_2^2=-2\cdot x_1\cdot x_k+2\cdot x_2\cdot x_k-2\cdot y_1\cdot y_k+2\cdot y_2\cdot y_k-2\cdot z_1\cdot z_k+2$$

$$p_1^2-p_2^2=-2\cdot x_1\cdot x_k+2\cdot x_2\cdot x_k-2\cdot y_1\cdot y_k+2\cdot y_2\cdot y_k-2\cdot z_1\cdot z_k+2$$

$$p_2^2-p_3^2=-2\cdot x_2\cdot x_k+2\cdot x_3\cdot x_k-2\cdot y_2\cdot y_k+2\cdot y_3\cdot y_k-2\cdot z_2\cdot z_k+2$$

$$p_2^2-p_3^2=-2\cdot x_2\cdot x_k+2\cdot x_3\cdot x_k-2\cdot y_2\cdot y_k+2\cdot y_3\cdot y_k-2\cdot z_2\cdot z_k+2$$

$$-p_1^2+p_3^2=2\cdot x_1\cdot x_k-2\cdot x_3\cdot x_k+2\cdot y_1\cdot y_k-2\cdot y_3\cdot y_k+2\cdot z_1\cdot z_k-2$$

$$-p_1^2+p_3^2=2\cdot x_1\cdot x_k-2\cdot x_3\cdot x_k+2\cdot y_1\cdot y_k-2\cdot y_3\cdot y_k+2\cdot z_1\cdot z_k-2$$

Weitere Vereinfachung:

$$\frac{p_1^2-p_2^2}{2}=(-x_1+x_2)\cdot x_k+(-y_1+y_2)\cdot y_k+(-z_1+z_2)\cdot z_k \Rightarrow Gl4$$

$$\frac{p_1^2-p_2^2}{2}=-x_k\cdot(x_1-x_2)-y_k\cdot(y_1-y_2)-z_k\cdot(z_1-z_2)$$

$$\frac{p_2^2-p_3^2}{2}=(-x_2+x_3)\cdot x_k+(-y_2+y_3)\cdot y_k+(-z_2+z_3)\cdot z_k \Rightarrow Gl5$$

$$\frac{p_2^2-p_3^2}{2}=-x_k\cdot(x_2-x_3)-y_k\cdot(y_2-y_3)-z_k\cdot(z_2-z_3)$$

$$\frac{-p_1^2+p_3^2}{2}=(x_1-x_3)\cdot x_k+(y_1-y_3)\cdot y_k+(z_1-z_3)\cdot z_k \Rightarrow Gl6$$

$$\frac{-\left(p_1^2-p_3^2\right)}{2}=x_k\cdot(x_1-x_3)+y_k\cdot(y_1-y_3)+z_k\cdot(z_1-z_3)$$

Weiter gilt:

$$\frac{\frac{p_1^2-p_2^2}{2}+x_k\cdot(x_1-x_2)+y_k\cdot(y_1-y_2)}{z_1-z_2}=-z_k=\frac{\frac{p_2^2-p_3^2}{2}+x_k\cdot(x_2 \ldots}{z_2- \ldots}$$

d.h.

$$\frac{p_1^2-p_2^2}{2\cdot(z_1-z_2)}-\frac{p_2^2-p_3^2}{2\cdot(z_2-z_3)}+x_k\cdot\left(\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}-\frac{x_2-x_3}{z_2-z_3}\right)=y_k\cdot\left(\frac{y_2-y_3}{z_2-z_3}-\frac{y \ldots}{z \ldots}\right.$$

$$y_k=\frac{\frac{p_1^2-p_2^2}{2\cdot(z_1-z_2)}-\frac{p_2^2-p_3^2}{2\cdot(z_2-z_3)}+x_k\cdot\left(\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}-\frac{x_2-x_3}{z_2-z_3}\right)}{\left(\frac{y_2-y_3}{z_2-z_3}-\frac{y_1-y_2}{z_1-z_2}\right)}$$

Es sei $f=\pm1$ ein Vorzeichenfaktor.

solve(Gl1, z_k)

$$\left\{z_k=z_1-\sqrt{p_1^2-x_1^2-x_k^2-y_1^2-y_k^2+2\cdot x_1\cdot x_k+2\cdot y_1\cdot y_k}, z_k= \ldots\right.$$

Dann gilt:

$$(z_k-z_2)^2=\left((z_1-z_2)+f\times\sqrt{p_1^2-x_1^2-x_k^2-y_1^2-y_k^2+2\cdot x_1\cdot x_k+ \ldots}\right.$$

$$(z_k-z_2)^2=(z_1-z_2)^2+p_1^2-(x_k-x_1)^2-(y_k-y_1)^2+2\times f\times(z_1-z_2 \ldots$$

$$(z_k-z_3)^2=(z_1-z_3)^2+p_1^2-(x_k-x_1)^2-(y_k-y_1)^2+2\times f\times(z_1-z_3 \ldots$$

In Gl2 und Gl3 eingesetzt:

$$p_2{}^2=(x_k-x_2)^2+(y_k-y_2)^2+(z_k-z_2)^2$$

$$p_2{}^2-p_1{}^2=(x_k-x_2)^2-(x_k-x_1)^2+(y_k-y_2)^2-(y_k-y_1)^2+(z_1-z_2$$

$$\frac{p_2{}^2-p_1{}^2}{(z_1-z_2)}=\frac{(x_k-x_2)^2-(x_k-x_1)^2}{(z_1-z_2)}+\frac{(y_k-y_2)^2-(y_k-y_1)^2}{(z_1-z_2)}+(z_1-$$

$$p_3{}^2=(x_k-x_3)^2+(y_k-y_3)^2+(z_k-z_3)^2$$

$$p_3{}^2-p_1{}^2=(x_k-x_3)^2-(x_k-x_1)^2+(y_k-y_3)^2-(y_k-y_1)^2+(z_1-z_3$$

$$\frac{p_3{}^2-p_1{}^2}{(z_1-z_3)}=\frac{(x_k-x_3)^2-(x_k-x_1)^2}{(z_1-z_3)}+\frac{(y_k-y_3)^2-(y_k-y_1)^2}{(z_1-z_3)}+(z_1-$$

Die Differenz der dividierten Gleichungen ergibt:

$$\frac{p_2{}^2-p_1{}^2}{(z_1-z_2)}-\frac{p_3{}^2-p_1{}^2}{(z_1-z_3)}=$$

$$\frac{(x_k-x_2)^2-(x_k-x_1)^2}{(z_1-z_2)}-\frac{(x_k-x_3)^2-(x_k-x_1)^2}{(z_1-z_3)}+\frac{(y_k-y_2)^2-(y_k}{(z_1-z_2)}$$

Mit der dritten binomischen Formel folgt:

$$(x_k-x_2)^2-(x_k-x_1)^2=((x_k-x_2)+(x_k-x_1))\times((x_k-x_2)-(x_k-x_1)$$

$$\frac{p_2{}^2-p_1{}^2}{(z_1-z_2)}-\frac{p_3{}^2-p_1{}^2}{(z_1-z_3)}=$$

$$\frac{(2x_k-x_1-x_2)\times(x_1-x_2)}{(z_1-z_2)}-\frac{(2x_k-x_1-x_3)\times(x_1-x_3)}{(z_1-z_3)}+\frac{(2y_k-y_1-y_2)}{(z_1-z}$$

$$2x_k\times\left(\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}-\frac{x_1-x_3}{z_1-z_3}\right)+2y_k\times\left(\frac{y_1-y_2}{z_1-z_2}-\frac{y_1-y_3}{z_1-z_3}\right)-\frac{x_1{}^2-x_2{}^2}{z_1-z_2}+\frac{x_1{}^2}{z_1}$$

wegen der obigen Gleichung

$$-\frac{p_1^2-p_2^2}{2\cdot(z_1-z_2)}+\frac{p_1^2-p_3^2}{2\cdot(z_1-z_3)}=+x_k\cdot\left(\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}-\frac{x_1-x_3}{z_1-z_3}\right)+y_k\cdot\left(-\frac{y_1-y_3}{z_1-z_3}\right.$$

ist

$$-\frac{x_1^2-x_2^2}{z_1-z_2}+\frac{x_1^2-x_3^2}{z_1-z_3}-\frac{y_1^2-y_2^2}{z_1-z_2}+\frac{y_1^2-y_3^2}{z_1-z_3}-(z_2-z_3)=0$$

$$\begin{bmatrix} x_1-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_3 \\ y_1-y_2 & y_1-y_3 & y_2-y_3 \\ z_1-z_2 & z_1-z_3 & z_2-z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_3 \\ y_1-y_2 & y_1-y_3 & y_2-y_3 \\ z_1-z_2 & z_1-z_3 & z_2-z_3 \end{bmatrix}$$

$$(x_1-x_2)\times\det\left(\begin{bmatrix} y_1-y_3 & y_2-y_3 \\ z_1-z_3 & z_2-z_3 \end{bmatrix}\right)\to a$$

$$(x_1-x_2)\cdot(y_1\cdot z_2-y_1\cdot z_3-y_2\cdot z_1+y_2\cdot z_3+y_3\cdot z_1-y_3\cdot z_2)$$

$$-(x_1-x_3)\times\det\left(\begin{bmatrix} y_1-y_2 & y_2-y_3 \\ z_1-z_2 & z_2-z_3 \end{bmatrix}\right)\to b$$

$$-(x_1-x_3)\cdot(y_1\cdot z_2-y_1\cdot z_3-y_2\cdot z_1+y_2\cdot z_3+y_3\cdot z_1-y_3\cdot z_2)$$

$$(x_2-x_3)\times\det\left(\begin{bmatrix} y_1-y_2 & y_1-y_3 \\ z_1-z_2 & z_1-z_3 \end{bmatrix}\right)\to c$$

$$(x_2-x_3)\cdot(y_1\cdot z_2-y_1\cdot z_3-y_2\cdot z_1+y_2\cdot z_3+y_3\cdot z_1-y_3\cdot z_2)$$

a+b+c

$$(x_1-x_2)\cdot(y_1\cdot z_2-y_1\cdot z_3-y_2\cdot z_1+y_2\cdot z_3+y_3\cdot z_1-y_3\cdot z_2)-(x_1-x_3)\cdot$$

simplify(ans)

$$0$$

$$-\left(x_1^2-x_2^2\right)\times(z_1-z_3)+\left(x_1^2-x_3^2\right)\times(z_1-z_2)-\left(y_1^2-y_2^2\right)\times(z_1-$$

$$-\left(x_1^2-x_2^2\right)\cdot(z_1-z_3)+\left(x_1^2-x_3^2\right)\cdot(z_1-z_2)-\left(y_1^2-y_2^2\right)\cdot(z_1-$$

simplify(ans)

$$-x_1^2\cdot z_2+x_2^2\cdot z_1-x_3^2\cdot z_1+x_3^2\cdot z_2-y_1^2\cdot z_2+y_2^2\cdot z_1-y_3^2\cdot z_1\cdot$$

expand(ans)

$$-x_1^2\cdot z_2+x_1^2\cdot z_3+x_2^2\cdot z_1-x_2^2\cdot z_3-x_3^2\cdot z_1+x_3^2\cdot z_2-y_1^2\cdot z_2\cdot \blacktriangleright$$

simplify(ans)

$$-x_1^2\cdot z_2+x_2^2\cdot z_1-x_3^2\cdot z_1+x_3^2\cdot z_2-y_1^2\cdot z_2+y_2^2\cdot z_1-y_3^2\cdot z_1\cdot \blacktriangleright$$

Der Schnittkreis zweier Kugeln erscheint in der Projektion als Gerade, da beide Kugelmittelpunkte den gleichen Abstand vom Koordinatenursprung haben!

$$y_k=\frac{\frac{p_1^2-p_2^2}{2\cdot(z_1-z_2)}-\frac{p_2^2-p_3^2}{2\cdot(z_2-z_3)}+x_k\cdot\left(\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}-\frac{x_2-x_3}{z_2-z_3}\right)}{\left(\frac{y_2-y_3}{z_2-z_3}-\frac{y_1-y_2}{z_1-z_2}\right)}$$

$$z_k=-\frac{\frac{p_1^2-p_2^2}{2}+x_k\cdot(x_1-x_2)+y_k\cdot(y_1-y_2)}{z_1-z_2}$$

$$x_k^2+y_k^2+z_k^2=r^2$$

Somit

$$x_k^2+\left(\frac{\frac{p_1^2-p_2^2}{2\cdot(z_1-z_2)}-\frac{p_2^2-p_3^2}{2\cdot(z_2-z_3)}+x_k\cdot\left(\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}-\frac{x_2-x_3}{z_2-z_3}\right)}{\left(\frac{y_2-y_3}{z_2-z_3}-\frac{y_1-y_2}{z_1-z_2}\right)}\right)^2+\left(\frac{p_1 \blacktriangleright}{}\right.$$

$$x_k^2+\frac{\left(\frac{p_1^2-p_2^2}{2\cdot(z_1-z_2)}-\frac{p_2^2-p_3^2}{2\cdot(z_2-z_3)}+x_k\cdot\left(\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}-\frac{x_2-x_3}{z_2-z_3}\right)\right)^2}{\left(\frac{y_1-y_2}{z_1-z_2}-\frac{y_2-y_3}{z_2-z_3}\right)^2}+\frac{\left(p_1 \blacktriangleright\right.}{}$$

□

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.267

AUFGABE 13

Quellenhinweis:
http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/me▸

Es gilt $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7185^2-7181^2}$=239,7165km.

$\mathrm{approx}\left(\sqrt{7185^2-7181^2}\right)$

239.7164992

Damit gilt (Erdradius r=6373km) für den erdnächsten Punkt die Entfernung (Perigäum) **a-e-r=572km.**

$\mathrm{approx}\left(7185-\sqrt{7185^2-7181^2}-6373\right)$

572.2835008

Für den erdfernsten Punkt gilt die Entfernung (Apogäum) **a+e-r=1072km.**

$\mathrm{approx}\left(7185+\sqrt{7185^2-7181^2}-6373\right)$

1051.716499

□

Ellipse im 2D-Grafik-Menü