Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.267

AUFGABE 12

Wir benutzen den im ClassPad vorhandenen Index k statt p.
Weiterhin nehmen wir an, dass der Koordinatenursprung im Erdkugelmittelpunkt liegt. Es sei $r=6373km$ der Erdradius, wobei wir näherungsweise von der Erdkugel ausgehen. Wir bezeichnen die konstante Satellitenhöhe mit h, d.h. $h=20183km$.

Damit gilt für S_1 bis S_3:
$x_m^2+y_m^2+z_m^2=(r+h)^2$ mit $m=1,2,3$,

und wir haben folgende zusätzliche Gleichung für N:
$x_k^2+y_k^2+z_k^2=r^2$.

Durch Quadrieren entsteht mit den quadrierten Abständen p_1^2, p_2^2, p_3^2 folgendes überbestimmte quadratische Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1^2=(x_k-x_1)^2+(y_k-y_1)^2+(z_k-z_1)^2 \\ p_2^2=(x_k-x_2)^2+(y_k-y_2)^2+(z_k-z_2)^2 \\ p_3^2=(x_k-x_3)^2+(y_k-y_3)^2+(z_k-z_3)^2 \\ (r+h)^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ (r+h)^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2 \\ (r+h)^2=x_3^2+y_3^2+z_3^2 \\ r^2=x_k^2+y_k^2+z_k^2 \end{array}\right|_{x_k,y_k,z_k}$$

Wir vereinfachen die ersten drei Gleichungen mithilfe der letzten Gleichungen:

$p_1^2=r^2+(r+h)^2-2\cdot x_1\cdot x_k-2\cdot y_1\cdot y_k-2\cdot z_1\cdot z_k \Rightarrow Gl1$

$$p_1^2=(h+r)^2+r^2-2\cdot x_1\cdot x_k-2\cdot y_1\cdot y_k-2\cdot z_1\cdot z_k$$

$p_2^2=r^2+(r+h)^2-2\cdot x_2\cdot x_k-2\cdot y_2\cdot y_k-2\cdot z_2\cdot z_k \Rightarrow Gl2$

$$p_2^2=(h+r)^2+r^2-2\cdot x_2\cdot x_k-2\cdot y_2\cdot y_k-2\cdot z_2\cdot z_k$$

$p_3^2=r^2+(r+h)^2-2\cdot x_3\cdot x_k-2\cdot y_3\cdot y_k-2\cdot z_3\cdot z_k \Rightarrow Gl3$

$$p_3^2=(h+r)^2+r^2-2\cdot x_3\cdot x_k-2\cdot y_3\cdot y_k-2\cdot z_3\cdot z_k$$

Damit erhalten wir die Lösung sofort über das verbliebene lineare Gleichungssystem.

Wir versuchen noch, dass Gleichungssystem verkürzt mithilfe von Matrizen, Vektoren und Determinanten zu beschreiben und zu lösen.
Die MatrixA ist hierbei nichts anderes als das zweifache Spatprodukt der Ortsvektoren zu S_1 bis S_3, die als linear unabhängig angesehen werden können. Damit ist det(MatrixA)≠0.

$\begin{bmatrix} 2\cdot x_1 & 2\cdot y_1 & 2\cdot z_1 \\ 2\cdot x_2 & 2\cdot y_2 & 2\cdot z_2 \\ 2\cdot x_3 & 2\cdot y_3 & 2\cdot z_3 \end{bmatrix} \Rightarrow MatrixA$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot x_1 & 2\cdot y_1 & 2\cdot z_1 \\ 2\cdot x_2 & 2\cdot y_2 & 2\cdot z_2 \\ 2\cdot x_3 & 2\cdot y_3 & 2\cdot z_3 \end{bmatrix}$$

simplify(det(MatrixA))

$$8\cdot(x_1\cdot y_2\cdot z_3-x_1\cdot y_3\cdot z_2-x_2\cdot y_1\cdot z_3+x_2\cdot y_3\cdot z_1+x_3\cdot y_1\cdot z_2-x_3\cdot y_2 \blacktriangleright$$

$$\begin{bmatrix} r^2+(r+h)^2-p_1{}^2 \\ r^2+(r+h)^2-p_2{}^2 \\ r^2+(r+h)^2-p_3{}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow rechteS$$

$$\begin{bmatrix} (h+r)^2-p_1{}^2+r^2 \\ (h+r)^2-p_2{}^2+r^2 \\ (h+r)^2-p_3{}^2+r^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \Rightarrow unbekN$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

Die Lösung ist damit berechenbar als (vgl. Cramersche Regel)

$$MatrixA^{-1} \times rechteS \Rightarrow unbekN$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\left((h+r)^2-p_1{}^2+r^2\right)\cdot(4\cdot y_2\cdot z_3-4\cdot y_3\cdot z_2)}{8\cdot x_1\cdot y_2\cdot z_3-8\cdot x_1\cdot y_3\cdot z_2-8\cdot x_2\cdot y_1\cdot z_3+8\cdot x_2\cdot y_3\cdot z_1+8\cdot x_3\cdot y} \\ \dfrac{-\left((h+r)^2-p_1{}^2+r^2\right)\cdot(4\cdot x_2\cdot z_3-4\cdot x_3\cdot z_2)}{8\cdot x_1\cdot y_2\cdot z_3-8\cdot x_1\cdot y_3\cdot z_2-8\cdot x_2\cdot y_1\cdot z_3+8\cdot x_2\cdot y_3\cdot z_1+8\cdot x_3\cdot y} \\ \dfrac{\left((h+r)^2-p_1{}^2+r^2\right)\cdot(4\cdot x_2\cdot y_3-4\cdot x_3\cdot y_2)}{8\cdot x_1\cdot y_2\cdot z_3-8\cdot x_1\cdot y_3\cdot z_2-8\cdot x_2\cdot y_1\cdot z_3+8\cdot x_2\cdot y_3\cdot z_1+8\cdot x_3\cdot y} \end{bmatrix}$$

Zusammengefaßt:

$$x_k=\frac{\det\left(\begin{bmatrix}-p_1^2+r^2+(r+h)^2 & y_1 & z_1\\ -p_2^2+r^2+(r+h)^2 & y_2 & z_2\\ -p_3^2+r^2+(r+h)^2 & y_3 & z_3\end{bmatrix}\right)}{2\times\det\left(\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}\right)},$$

$$y_k=\frac{\det\left(\begin{bmatrix}x_1 & -p_1^2+r^2+(r+h)^2 & z_1\\ x_2 & -p_2^2+r^2+(r+h)^2 & z_2\\ x_3 & -p_3^2+r^2+(r+h)^2 & z_3\end{bmatrix}\right)}{2\times\det\left(\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}\right)},$$

$$z_k=\frac{\det\left(\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & -p_1^2+r^2+(r+h)^2\\ x_2 & y_2 & -p_2^2+r^2+(r+h)^2\\ x_3 & y_3 & -p_3^2+r^2+(r+h)^2\end{bmatrix}\right)}{2\times\det\left(\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}\right)}.$$

Auf die Angabe anderer Lösungswege wird an dieser Stelle verzichtet, da diese auf analytisch komplizierte Wurzelterme führen und keine einfachere Lösungsdarstellung liefern.
Man überlege sich in diesem Zusammenhang, dass der Schnitt zweier Kugeln (z.B. um S_1 bzw. S_2 mit den Radien p_1 bzw. p_2) einen Schnittkreis ergibt und dieser im Schnitt mit der dritten Kugel um S_3, Radius p_3, im Allgemeinen zwei mögliche Lösungen

für N ergibt.

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.267

AUFGABE 13

Quellenhinweis:
http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/me▸

Es gilt $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7185^2-7181^2}=239{,}7165$km.

$\text{approx}\left(\sqrt{7185^2-7181^2}\right)$

239.7164992

Damit gilt (Erdradius r=6373km) für den erdnächsten Punkt die Entfernung (Perigäum) **a-e-r=572km.**

$\text{approx}\left(7185-\sqrt{7185^2-7181^2}-6373\right)$

572.2835008

Für den erdfernsten Punkt gilt die Entfernung (Apogäum) **a+e-r=1072km.**

$\text{approx}\left(7185+\sqrt{7185^2-7181^2}-6373\right)$

1051.716499

Ellipse im 2D-Grafik-Menü Y1:··· Y2:···