

AUFGABE 19

Wir sehen uns die Situation in der 3D-Grafik an.

Kugeloberfläche	21:… 22:…
------------------------	--------------

a) In Kugelkoordinaten gelten die Transformationen gemäß Satz 5.9

$$\text{Kugelkoordinaten für } S: \begin{bmatrix} r \\ \angle(\theta) \\ \angle(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \angle(-122^\circ) \\ \angle(54^\circ) \end{bmatrix}$$

Der 36. Breitengrad hat vom Nordpol aus gesehen (90° nördliche Breite) den Winkelabstand 54°. Die Längengrade entsprechen denen, die wir in der Mathematik für die Kugelkoordinaten nutzen.

Umrechnung in kartesische Koordinaten mittels dem **toRect**-Befehl:

$$\text{toRect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \angle(-122^\circ) \\ \angle(54^\circ) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos\left(\frac{61 \cdot \pi}{90}\right) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{4} \\ \frac{-\sin\left(\frac{61 \cdot \pi}{90}\right) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{4} \\ \frac{\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{5} + 5)}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{approx} \left(\text{toRect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \angle(-122^\circ) \\ \angle(54^\circ) \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.4287136904 \\ -0.6860853218 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix}$$

b)

$$\text{Kugelkoordinaten für T: } \begin{bmatrix} r \\ \angle(\theta) \\ \angle(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \angle(140^\circ) \\ \angle(54^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\text{toRect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \angle(140^\circ) \\ \angle(54^\circ) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{9}\right) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{4} \\ \frac{\sin\left(\frac{7 \cdot \pi}{9}\right) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{4} \\ \frac{\sqrt{2 \cdot (-\sqrt{5} + 5)}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{approx} \left(\text{toRect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \angle(140^\circ) \\ \angle(54^\circ) \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.6197429729 \\ 0.5200261 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix}$$

c) Der Radius c des Breitenkreises ergibt sich aus den x - und y -Koordinaten von S bzw. T .

$$\sqrt{\left(\frac{\cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{9}\right) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sin\left(\frac{7 \cdot \pi}{9}\right) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{4}\right)^2} \Rightarrow c$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \left(\left(\cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{9}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{7 \cdot \pi}{9}\right)\right)^2\right) \cdot (\sqrt{5} + 3)}{4}}$$

simplify(c)

$$\frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{5} + 6}}{4}$$

approx(c) ⇒ c

0.8090169944

Der Winkelabstand von S nach T beträgt $(180^\circ - 122^\circ) + (180^\circ - 140^\circ) = 58^\circ + 40^\circ = 98^\circ$.

Damit beträgt die Länge des Kreisbogens

$$2\pi \times c \times \frac{98^\circ}{360^\circ} = 1.383761 \text{ Einheiten, denn}$$

$$\text{approx}\left(2\pi \times c \times \frac{98^\circ}{360^\circ}\right)$$

1.383761005

Mit dem Faktor 6370km ergibt sich eine Flugstrecke von 8815km.

$$\text{approx}\left(2\pi \times c \times \frac{98^\circ}{360^\circ} \times 6370\right)$$

8814.557603

d) Der Großkreis hat den Radius $c = 1$ Längeneinheit.

Der Raumwinkel $\angle SMT$ wird über die Radiusvektoren von M nach S bzw. T berechnet.

Es gilt $\cos(\angle SMT) =$

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} -0.4287136904 \\ -0.6860853218 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.6197429729 \\ 0.5200261 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix}\right) \text{ und somit}$$

$$\text{approx} \left(\cos^{-1} \left(\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} -0.4287136904 \\ -0.6860853218 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.6197429729 \\ 0.5200261 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} \right) \right) \right)$$

1.313567509

in Altgrad $1.313567509 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 75.26^\circ$

$$\text{approx} \left(1.313567509 \times \frac{180}{\pi} \right)$$

75.26187437

Analog zu c) erhalten wir nun eine kürzere Flugstrecke von lediglich 8367km.

$$\text{approx} \left(2\pi \times 1 \times \frac{75.26187437^\circ}{360^\circ} \times 6370 \right)$$

8367.425032

e) Die Ortsvektoren von M nach S bzw. T sind gleichzeitig linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene.

Es sei P(x/y/z) ein weiterer Punkt der Ebene. Dann sind die drei Vektoren von M nach S bzw. T bzw. P linear abhängig und erzeugen eine Null-Determinante:

$$\det \left(\text{augment} \left(\text{augment} \left(\begin{bmatrix} -0.4287136904 \\ -0.6860853218 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.6197429 \\ 0.5200261 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} \right), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$\frac{-299688555649723445 \cdot x}{422730947582950598} - \frac{31136049515063173 \cdot y}{277296813786337191} - \frac{407}{62}$$

approx(ans)

$$-0.7089345064 \cdot x - 0.112284195 \cdot y - 0.6481388654 \cdot z = 0$$

Damit lautet die parameterfreie Ebenengleichung vereinfacht $0.7089 \cdot x + 0.1123 \cdot y + 0.6481 \cdot z = 0$.

Eine Parameterdarstellung wäre hier:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \times \begin{bmatrix} -0.4287136904 \\ -0.6860853218 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} + t \times \begin{bmatrix} -0.6197429729 \\ 0.5200261 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}.$$

Für den Breitenkreis gilt die Parameterdarstellung:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8090169944 \times \cos(t) \\ 0.8090169944 \times \sin(t) \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} \text{ mit } -\pi < t \leq \pi.$$

Für den Großkreis wird die Lösungsmenge der Ebene und der Kugel in Parameterdarstellung gebracht:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } -0.7089345064 \cdot x - 0.112284195 \cdot y - 0.6481388654 \cdot z = 0$$

Mit dem Taschenrechner kann problemlos die vorhandene Ebenengleichung verarbeitet werden.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \mid z = \frac{0.7089345064 \cdot x + 0.112284195 \cdot y}{-0.6481388654} \Rightarrow G11$$

$$x^2 + y^2 + \frac{729032499556 \cdot \left(\frac{600878 \cdot x}{847579} + \frac{443351 \cdot y}{3948472} \right)^2}{306254880409} = 1$$

Für die entstandene Ellipsengleichung nutzen wir den Ansatz $x = a(t) \times \cos(t)$ und $y = a(t) \times \sin(t)$ und bestimmen $a(t)$

$$G11 \mid x = a \times \cos(t) \Rightarrow G12$$

$$y^2 + a^2 \cdot (\cos(t))^2 + \frac{729032499556 \cdot \left(\frac{443351 \cdot y}{3948472} + \frac{600878 \cdot a}{847579} \right)}{306254880409}$$

G12 | $y = a \cdot \sin(t) \Rightarrow$ G13

$$a^2 \cdot (\cos(t))^2 + a^2 \cdot (\sin(t))^2 + \frac{729032499556 \cdot \left(\frac{600878 \cdot a}{847579} + \frac{443351 \cdot a \cdot \sin(t)}{3948472} \right)}{306254880409}$$

Wir vereinfachen zu

$$a^2 + \frac{729032499556 \cdot \left(\frac{600878 \cdot a \cdot \cos(t)}{847579} + \frac{443351 \cdot a \cdot \sin(t)}{3948472} \right)}{306254880409}$$

$$a^2 + 2.38048 \cdot (0.70893 \cdot a \cdot \cos(t) + 0.11228 \cdot a \cdot \sin(t))^2 = 1$$

□

und lösen nach a auf:

$$a^2 + \left(\sqrt{2.380476349} \cdot 0.7089345064 \cdot a \cdot \cos(t) + \sqrt{2.380476349} \cdot 0.11228 \cdot a \cdot \sin(t) \right)^2 = 1.000000$$

Wir rechnen mit gerundeten Zahlen zuende:

$a^2 \cdot \left(1 + (1.09380 \cdot \cos(t) + 0.17324 \cdot \sin(t))^2 \right) = 1$ und erhalten für den Großkreis

$$\text{Define } a(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (1.09380 \cdot \cos(t) + 0.17324 \cdot \sin(t))^2}}$$

done

$$\text{Define } x(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{1 + (1.09380 \cdot \cos(t) + 0.17324 \cdot \sin(t))^2}}$$

done

$$\text{Define } y(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{1 + (1.09380 \cdot \cos(t) + 0.17324 \cdot \sin(t))^2}}$$

done

$$\text{Define } z(t) = \frac{-1.09380 \cdot \cos(t) - 0.17324 \cdot \sin(t)}{\sqrt{1 + (1.09380 \cdot \cos(t) + 0.17324 \cdot \sin(t))^2}}$$

done

f) Die Tangentialebenen finden wir mithilfe der Normalenvektoren in S bzw. T, die den Ortsvektoren von M zu S bzw. T entsprechen. Es sei wieder $P(x/y/z)$ ein Punkt in der Tangentialebene. Der Vektor von P nach S bzw. T ist orthogonal zu dem entsprechenden Normalenvektor.

Für S erhalten wir:

$$0.42871 \cdot x + 0.68609 \cdot y - 0.58779 \cdot z + 1 = 0, \text{ denn}$$

DelVar x,y,z

done

$$\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} -0.4287136904 \\ -0.6860853218 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.4287136904 \\ -0.6860853218 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$0.42871 \cdot (x + 0.42871) + 0.68609 \cdot (y + 0.68609) - 0.58779 \cdot z + 1.00000 = 0.00000$
expand(ans)

$$0.42871 \cdot x + 0.68609 \cdot y - 0.58779 \cdot z + 1.00000 = 0.00000$$

Für T erhalten wir:

$$0.61974 \cdot x - 0.52003 \cdot y - 0.58779 \cdot z + 1 = 0, \text{ denn}$$

$$\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} -0.6197429729 \\ 0.5200261 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.6197429729 \\ 0.5200261 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$0.61974 \cdot (x + 0.61974) - 0.52003 \cdot (y - 0.52003) - 0.58779 \cdot z + 1.00000 = 0.00000$
expand(ans)

$$0.61974 \cdot x - 0.52003 \cdot y - 0.58779 \cdot z + 1.00000 = 0.00000$$