Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.241

AUFGABE 06

Wir ermitteln durch quadratische Ergänzung die Mittelpunkte, Radien und Abstände der Mittelpunkte.

a) k_1: $(y+1)^2+z^2=20$, $M_1(0,-1,0)$, $R_1=\sqrt{20}=4.472$

k_2: $(y-3)^2+(z-4)^2=4$, $M_2(0,3,4)$, $R_2=2$

$\mathrm{norm}\left(\left\|\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}\right\|\right)=4\times\sqrt{2}=5.567$, d.h. es gibt zwei Schnittpunkte:

solve({(y+1)^2+z^2=20,(y-3)^2+(z-4)^2=4},{y,z})

{{y=3,z=2},{y=1,z=4}}

grafische Darstellung zu a)	Y1:⋯ Y2:⋯

b) k_1: $(y-2)^2+(z+3)^2=4$, $M_1(0,2,-3)$, $R_1=2$

k_2: $(y-3)^2+(z+4)^2=25$, $M_2(0,3,-4)$, $R_2=5$

$\mathrm{norm}\left(\left\|\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\3\\-4\end{bmatrix}\right\|\right)=\sqrt{2}=1.414$, d.h. es gibt keinen Schnittpunkt: k_1 liegt in k_2

grafische Darstellung zu b)	Y1:⋯ Y2:⋯

c) k_1: $(y+3)^2+(z-9)^2=4$, $M_1(0,-3,9)$, $R_1=2$

k_2: $(y+3)^2+(z-2)^2=25$, $M_2(0,-3,2)$, $R_2=5$

$\mathrm{norm}\left(\left\|\begin{bmatrix}0\\-3\\9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\-3\\2\end{bmatrix}\right\|\right)=7$, d.h. es gibt einen

Schnittpunkt (Berührpunkt): P(0/-3/7)

grafische Darstellung zu c)	Y1:... Y2:...

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.241

AUFGABE 07

A, B, C liegen auf einem Großkreis der Kugel, d.h. M liegt auch in der durch A, B, C festgelegten Ebene.
Die Differenzvektoren zwischen M(x/y/z) und A, B, C sind linear abhängig und gleich lang.
a) Die Ebenengleichung erhalten wir z.B. als Null-Determinante mit abhängigen Vektoren:

$$\det\left(\text{augment}\left(\text{augment}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)\right)=▸$$

$$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0$$

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)^2-\text{norm}\left(\begin{bmatrix}6\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)^2=0\Rightarrow Gl2$$

$$4\cdot x-2\cdot y-14\cdot z+48=0$$

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)^2-\text{norm}\left(\begin{bmatrix}2\\-4\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)^2=0\Rightarrow Gl3$$

$$-4\cdot x-14\cdot y-22\cdot z+60=0$$

solve({Gl1,Gl2,Gl3},{x,y,z})

$$\left\{x=\frac{596}{749},y=-\frac{1629}{749},z=\frac{2971}{749}\right\}$$

$$\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{596}{749}\\-\frac{1629}{749}\\\frac{2971}{749}\end{bmatrix}\right)^2$$

$$\frac{39933}{749}$$

Die Kreisgleichung lautet damit:

$$\left(x-\frac{596}{749}\right)^2+\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+\left(z-\frac{2971}{749}\right)^2=\frac{39933}{749},$$

$$M\left(\frac{596}{749},-\frac{1629}{749},\frac{2971}{749}\right),\quad c=\sqrt{\frac{39933}{749}}\ .$$

b) Die Parameterdarstellung des Kreises ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems mit den Gleichungen der ebene und der Kugel:

DelVar x,y,z,a

done

$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0 \Rightarrow Gl4$

$$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-172=0$$

$$\left(x-\frac{596}{749}\right)^2+\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+\left(z-\frac{2971}{749}\right)^2=\frac{39933}{749}\Rightarrow Gl5$$

$$\left(x-\frac{596}{749}\right)^2+\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+\left(z-\frac{2971}{749}\right)^2=\frac{39933}{749}$$

solve(Gl4,z)

$$\left\{z=\frac{-(19\cdot x-18\cdot y-86)}{8}\right\}$$

$$Gl5|z=\frac{-(19\cdot x-18\cdot y-86)}{8}\Rightarrow Gl6$$

$$\left(x-\frac{596}{749}\right)^2+\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+\left(\frac{19\cdot x-18\cdot y-86}{8}+\frac{2971}{749}\right)^2=\frac{3993}{749}\blacktriangleright$$

Für x und y wählen wir unter Beachtung der Mittelpunktskoordinaten die Ansätze

$x(t)=\frac{596}{749}+a(t)\times\cos(t),\ y(t)=-\frac{1629}{749}+a(t)\times\sin(t)$

und bestimmen a(t) aus der quadratischen Gleichung:

$Gl6|x=\frac{596}{749}+a\times\cos(t)\Rightarrow Gl7$

$$\left(y+\frac{1629}{749}\right)^2+a^2\cdot(\cos(t))^2+\left(\frac{18\cdot y-19\cdot\left(a\cdot\cos(t)+\frac{596}{749}\right)+}{8}\right.$$

$Gl7|y=-\frac{1629}{749}+a\times\sin(t)\Rightarrow Gl8$

$$a^2\cdot(\cos(t))^2+a^2\cdot(\sin(t))^2+\left(\frac{19\cdot\left(a\cdot\cos(t)+\frac{596}{749}\right)-18\cdot}{8}\right.$$

tCollect(Gl8)⇒Gl9

$$\frac{37\cdot a^2\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot a^2\cdot\sin(2\cdot t)+813\cdot a^2}{128}=\frac{39933}{749}$$

collect(Gl9,a)⇒Gl10

$$a^2\cdot\left(\frac{-171\cdot\sin(2\cdot t)}{32}+\frac{37\cdot\cos(2\cdot t)}{128}+\frac{813}{128}\right)=\frac{39933}{749}$$

Wir benutzen eine der beiden Lösungen und zwar die mit der positven Wurzel:

$$\text{Define }a(t)=\sqrt{\frac{\frac{39933}{749}}{\frac{-171\cdot\sin(2\cdot t)}{32}+\frac{37\cdot\cos(2\cdot t)}{128}+\frac{813}{128}}}$$

done

simplify(a(t))

$$\frac{72\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}}{749}$$

$$\text{Define } a(t)=\frac{72}{749}\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}$$

done

und erhalten mit $0\le t<2\pi$ eine Parameterdarstellung für den Großkreis:

$$\text{Define } x(t)=\frac{596}{749}+a(t)\times\cos(t)$$

done

$$\text{Define } y(t)=-\frac{1629}{749}+a(t)\times\sin(t)$$

done

$$\text{Define } z(t)=\frac{-(19\cdot x(t)-18\cdot y(t)-86)}{8}$$

done

Kontrolle:

x(t)

$$\frac{72\cdot\cos(t)\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}}{749}+\frac{596}{749}$$

y(t)

$$\frac{72\cdot\sin(t)\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}}{749}-\frac{1629}{749}$$

simplify(z(t))

$$\frac{-\left((171\cdot\cos(t)-162\cdot\sin(t))\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t}}\right.}{749}$$

$$\text{Define } z(t)=\frac{162\cdot\sin(t)-171\cdot\cos(t)}{749}\cdot\sqrt{\frac{738}{37\cdot\cos(2\cdot t)-68}}$$

done

z(t) als Textzeile (mit Zeilenumbruch):

$$z(t)=\frac{162\cdot\sin(t)-171\cdot\cos(t)}{749}\cdot\sqrt{\frac{738514}{37\cdot\cos(2\cdot t)-684\cdot\sin(2\cdot t)+813}}+\frac{2971}{749}$$

Kontrollberechnung von Kurvenpunkten:

$$\operatorname{approx}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}\middle|t=0\right)$$

$$\begin{bmatrix}3.629210447\\-2.174899866\\-2.76289951\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{approx}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}\middle|t=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}0.7957276368\\0.7906087103\\10.63901646\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{approx}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}\middle|t=\pi\right)$$

$$\begin{bmatrix}-2.037755173\\-2.174899866\\10.69614384\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{approx}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}\middle|t=\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}0.7957276368\\-5.140408443\\-2.705772135\end{bmatrix}$$

$$\text{approx}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}0.7957276368\\-5.140408443\\-2.705772135\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{596}{749}\\-\frac{1629}{749}\\\frac{2971}{749}\end{bmatrix}\right)\right)$$

7.301718071

$$\text{approx}\left(\sqrt{\frac{39933}{749}}\right)$$

7.301718071

c) Die Tangentialebene hat die Ebenengleichung $38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-d=0$ mit einem d derart, dass es im Schnitt mit der Kugeloberfläche nur einem gemeinsamen Berührpunkt P(x/y/z) gibt. Wir normieren den Normalenvektor auf den Kugelradius und addieren diesen zu M, um P zu erhalten:

$$\frac{1}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\right)}\times\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\times\sqrt{\frac{39933}{749}}+\begin{bmatrix}\frac{596}{749}\\-\frac{1629}{749}\\\frac{2971}{749}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\\\frac{-162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\\\frac{72\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{2971}{749}\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{dotP}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\\ \frac{-162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\\ \frac{72\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{2971}{749}\end{bmatrix}\right)\Rightarrow d$$

$$38\cdot\left(\frac{171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\right)+36\cdot\left(\frac{162\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{1629}{749}\right)+16\cdot\left(\frac{72}{}\right.\blacktriangleright$$

approx(d)

$$571.6648596$$

Die zweite Tangentialebene erhält man mit:

$$\frac{-1}{\operatorname{norm}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\right)}\times\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix}\times\sqrt{\frac{39933}{749}}+\begin{bmatrix}\frac{596}{749}\\ -\frac{1629}{749}\\ \frac{2971}{749}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{-171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\\ \frac{162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\\ \frac{-72\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{2971}{749}\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{dotP}\left(\begin{bmatrix}38\\-36\\16\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{-171\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{596}{749}\\ \frac{162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\\ \frac{-72\cdot\sqrt{493}}{749}+\frac{2971}{749}\end{bmatrix}\right)\Rightarrow d$$

$$-38\cdot\left(\frac{171\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{596}{749}\right)-36\cdot\left(\frac{162\cdot\sqrt{493}}{749}-\frac{1629}{749}\right)+16\cdot\left(\ldots\right.$$

approx(d)

-227.6648596

□

Damit lauten die Tangentialebenen
$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z-571.6648596=0$ bzw.
$38\cdot x-36\cdot y+16\cdot z+227.6648596=0$.

Anmerkung:
3D-Aufgaben sind oft numerisch nicht ganz einfach zu lösen. Hier erkennt man den Vorteil des CAS als wichtiges Werkzeug in der Mathematik. Das Auffinden eines klar strukturierten Lösungsweges ist wichtige Vorarbeit, ohne die das CAS nicht nutzbar wird.

Download dieser eActivity:
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/BVEINS_Loesungen_13NT.vcp