Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.268

AUFGABE 14

Wir bezeichnen mit p_1 die Streckenlänge von F_1 nach P und mit $p_2<p_1$ diejenige von F_2 nach P.
Im Dreieck F_1F_2P gelten folgende Gleichungen:
$p_1{}^2=(c+x)^2+y^2$ und $p_2{}^2=(c-x)^2+y^2$.

Wegen $p_2<p_1$ gilt $p_2=p_1-330\times t$. Hieraus erhalten wir

$p_1{}^2=(c+x)^2+y^2$ und $(p_1-330\times t)^2=(c-x)^2+y^2$.

Nun eliminieren wir $p_1=\sqrt{(c+x)^2+y^2}$ und erhalten

$$\left(\sqrt{(c+x)^2+y^2}-330\times t\right)^2=(c-x)^2+y^2.$$

Vereinfacht:

$$\text{expand}\left(\left(\sqrt{(c+x)^2+y^2}-330\times t\right)^2-\left((c-x)^2+y^2\right)=0\right)$$
$$108900\cdot t^2+4\cdot c\cdot x-660\cdot t\cdot\sqrt{x^2+y^2+c^2+2\cdot c\cdot x}=0$$

d.h.

$$\left(108900\cdot t^2+4\cdot c\cdot x=660\cdot t\cdot\sqrt{(c+x)^2+y^2}\right)^2\times\frac{1}{16}$$
$$\frac{\left(108900\cdot t^2+4\cdot c\cdot x\right)^2}{16}=27225\cdot t^2\cdot\left(x^2+y^2+c^2+2\cdot c\cdot x\right)$$

Es folgen mit $108900=330^2$ weitere Umformungen:

$$\mathrm{expand}\left(\frac{\left((330\cdot t)^2+4\cdot c\cdot x\right)^2}{16}-(165\cdot t)^2\cdot\left((c+x)^2+y^2\right)=0\right.$$

$$741200625\cdot t^4+c^2\cdot x^2-27225\cdot t^2\cdot x^2-27225\cdot t^2\cdot y^2-27$$

Es gilt:

$$\sqrt{27225}$$

165

$$\sqrt{741200625}$$

27225

Hieraus folgt:

$$\left(c^2-(165\cdot t)^2\right)\cdot x^2-(165\cdot t)^2\cdot y^2=(165\cdot c)^2\cdot t^2-(165\cdot t$$

und

$$\frac{x^2}{(165\cdot t)^2}-\frac{y^2}{c^2-(165\cdot t)^2}=\frac{-(165\cdot t)^4+(165\cdot c)^2\cdot t^2}{\left(c^2-(165\cdot t)^2\right)\cdot(165\cdot t)^2}$$

$$\mathrm{simplify}\left(\frac{-(165\cdot t)^4+(165\cdot c)^2\cdot t^2}{\left(c^2-(165\cdot t)^2\right)\cdot(165\cdot t)^2}\right)$$

1

Mit $330^2=4\times165^2$ folgt die vorgegebene Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{(330\cdot t)^2}-\frac{y^2}{4\cdot c^2-(330\cdot t)^2}=\frac{1}{4}$$ bzw.

$$\frac{x^2}{(165\cdot t)^2}-\frac{y^2}{c^2-(165\cdot t)^2}=1.$$

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.268

AUFGABE 15

a) Aus den Scheitelpunktskoordinaten folgt b=6. Der Asymptotenanstieg ist $\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{1}{2}$, d.h. a=12. Damit lautet die Hyperbelgleichung mit den übereinanderliegenden Scheitelpunkten

$$\left(\frac{y}{6}\right)^2-\left(\frac{x}{12}\right)^2=1$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü	f(XY)

b) Aus den Scheitelpunktskoordinaten folgt a=10. Der Asymptotenanstieg ist $\pm\frac{b}{a}=\pm5$, d.h. b=50. Damit lautet die Hyperbelgleichung

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2-\left(\frac{y}{50}\right)^2=1$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü	f(XY)

c) Mit den Formeln auf S. 263 folgt $e^2=a^2+b^2=13$ und $\pm\frac{b}{a}=\pm5$, d.h. $a^2+(5a)^2=13$.

Damit gilt $a=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $b=\sqrt{13-\frac{1}{2}}=\sqrt{12,5}$. Die Hyperbelgleichung lautet

$$\left(\frac{y}{\sqrt{12{,}5}}\right)^2-\left(\frac{x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)^2=1.$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü	f(xy)

d) Die Punkte liegen nebeneinander: M(1/-2), S(3/-2) und F(4/-2). Hieraus folgen a=2 und e=3. Damit ist $b=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. Die Hyperbelgleichung lautet

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-\left(\frac{y+2}{\sqrt{5}}\right)^2=1.$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü	f(xy)

e) Mit M(8/7) und F(13/7) gilt $e=\sqrt{a^2+b^2}=5$ und $\epsilon=\frac{25}{9}=\sqrt{1+\frac{p}{a}}$, sowie $b=\sqrt{p\times a}$. Hieraus folgen $\epsilon=\frac{25}{9}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ und somit $\frac{25}{9}=\sqrt{\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{a^2}}$.

$$\text{solve}\left(\frac{25}{9}=\sqrt{\frac{25}{a^2}},a\right)|a>0$$

$$\left\{a=\frac{9}{5}\right\}$$

$$\text{solve}\left(\left(\frac{9}{5}\right)^2+b^2=25,b\right)|b>0$$

$$\left\{b=\frac{4\cdot\sqrt{34}}{5}\right\}$$

Die Hyperbelgleichung lautet

$$\left(\frac{x-8}{\frac{9}{5}}\right)^2-\left(\frac{y-7}{\frac{4\cdot\sqrt{34}}{5}}\right)^2=1.$$

Hyperbel im Kegelschnitt-Menü

f(XY)

Hinweis:

ändert man in e) die Vorgabe $\epsilon=\frac{25}{9}$ in $\epsilon=\frac{5}{3}$ ab,

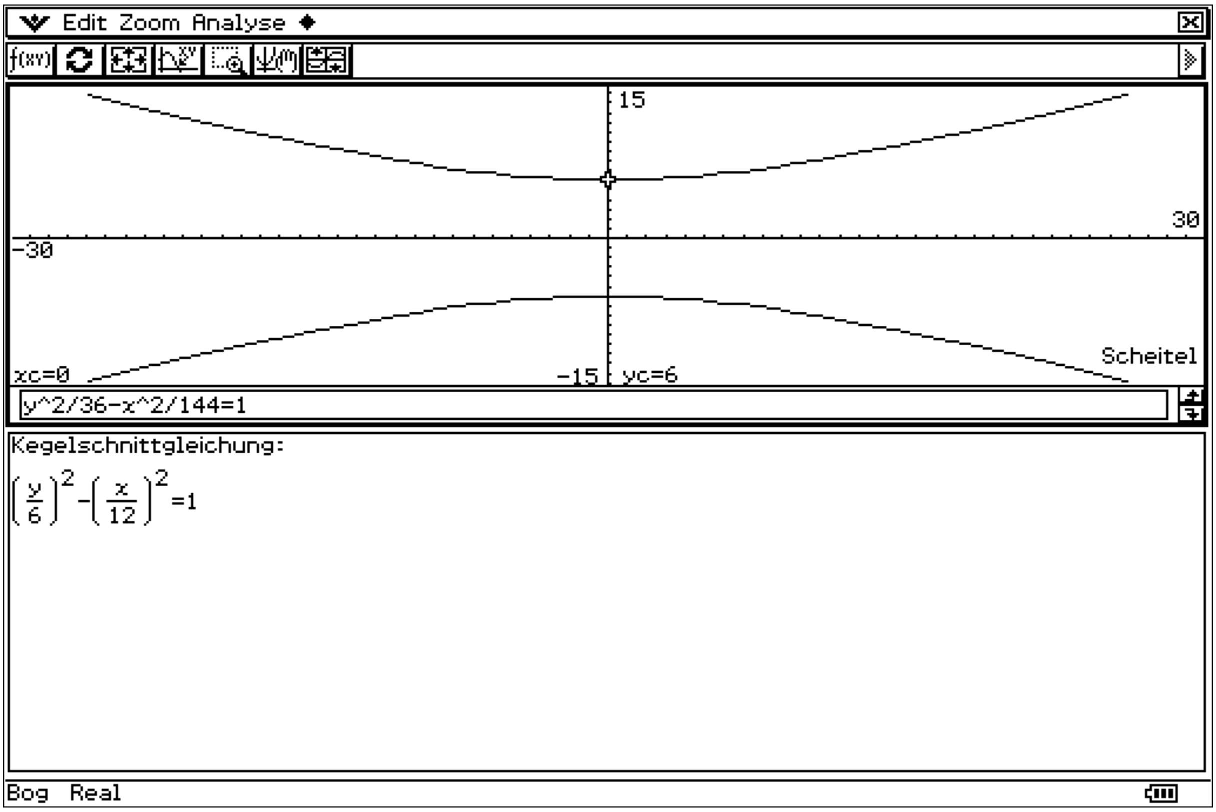
erhält man die vereinfachten Formeln a=3 und b=4

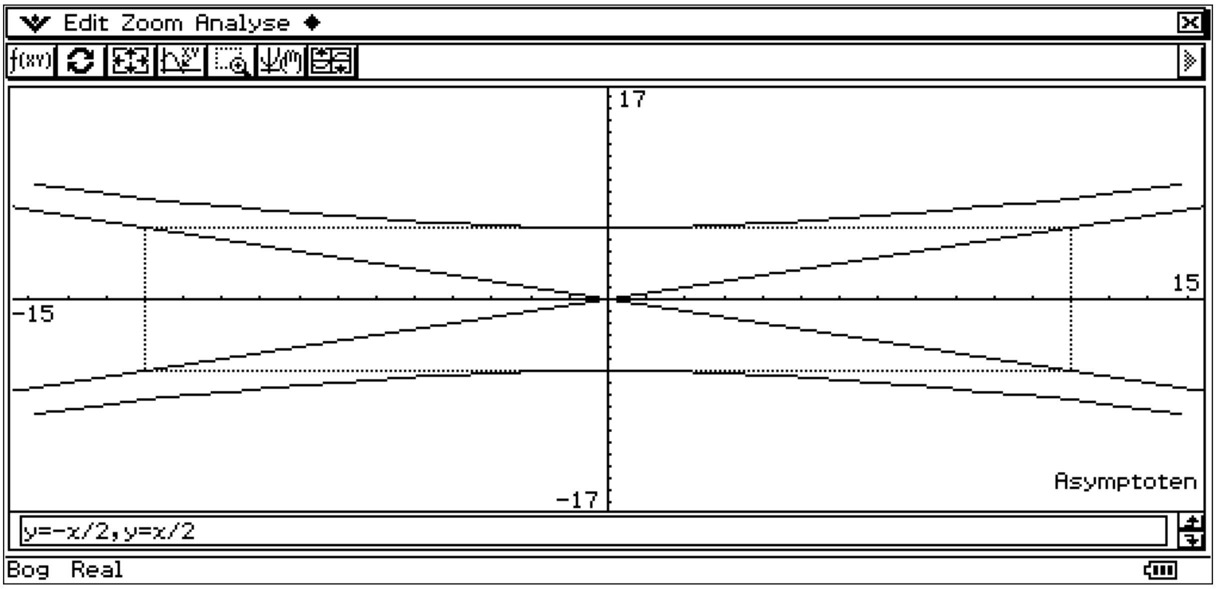
sowie $\left(\frac{x-8}{3}\right)^2-\left(\frac{y-7}{4}\right)^2=1.$

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT S.268

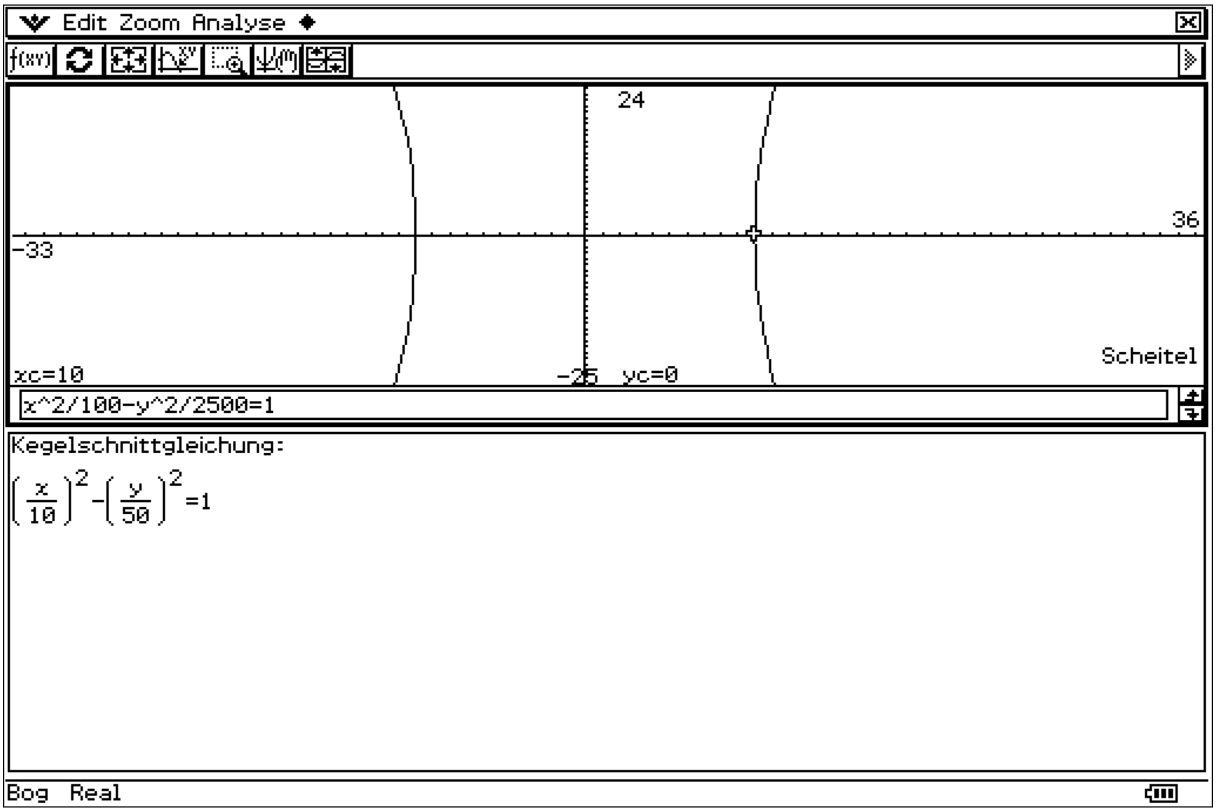
Lösung AUFGABE 15 im Kegelschnitt-Menü

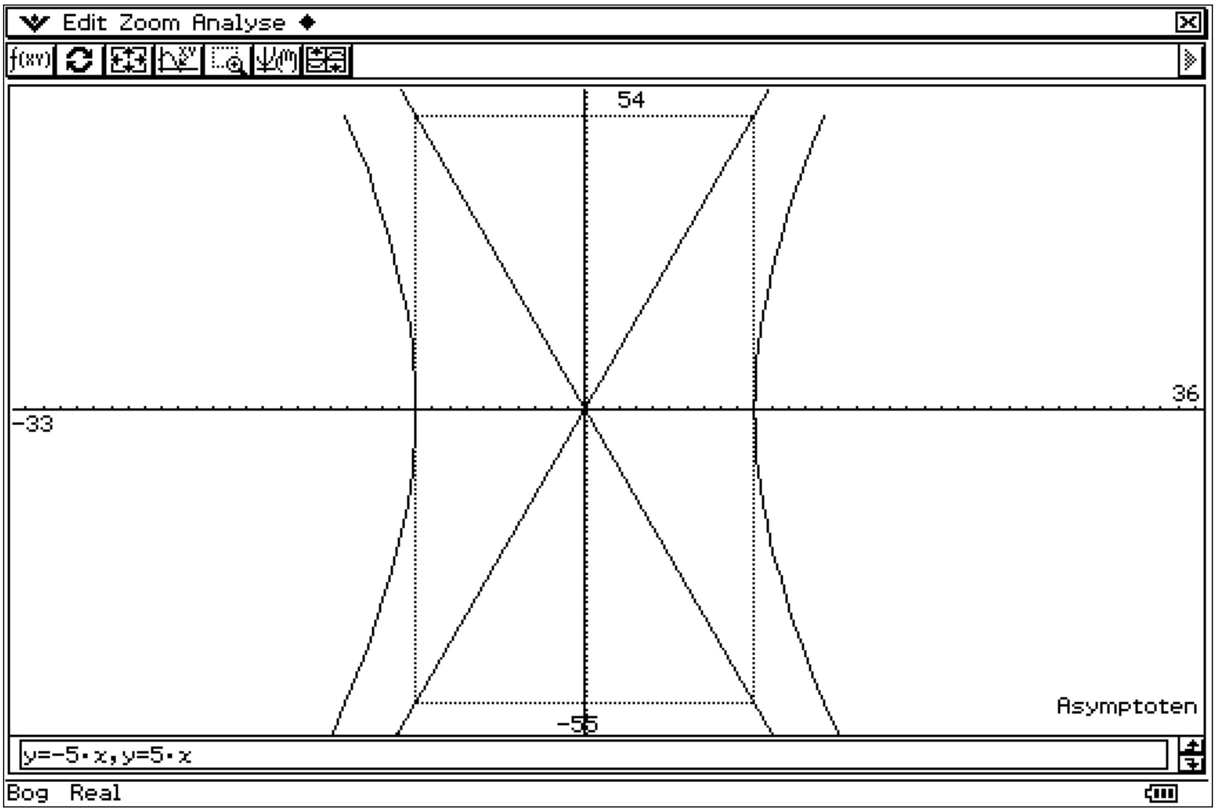
a)



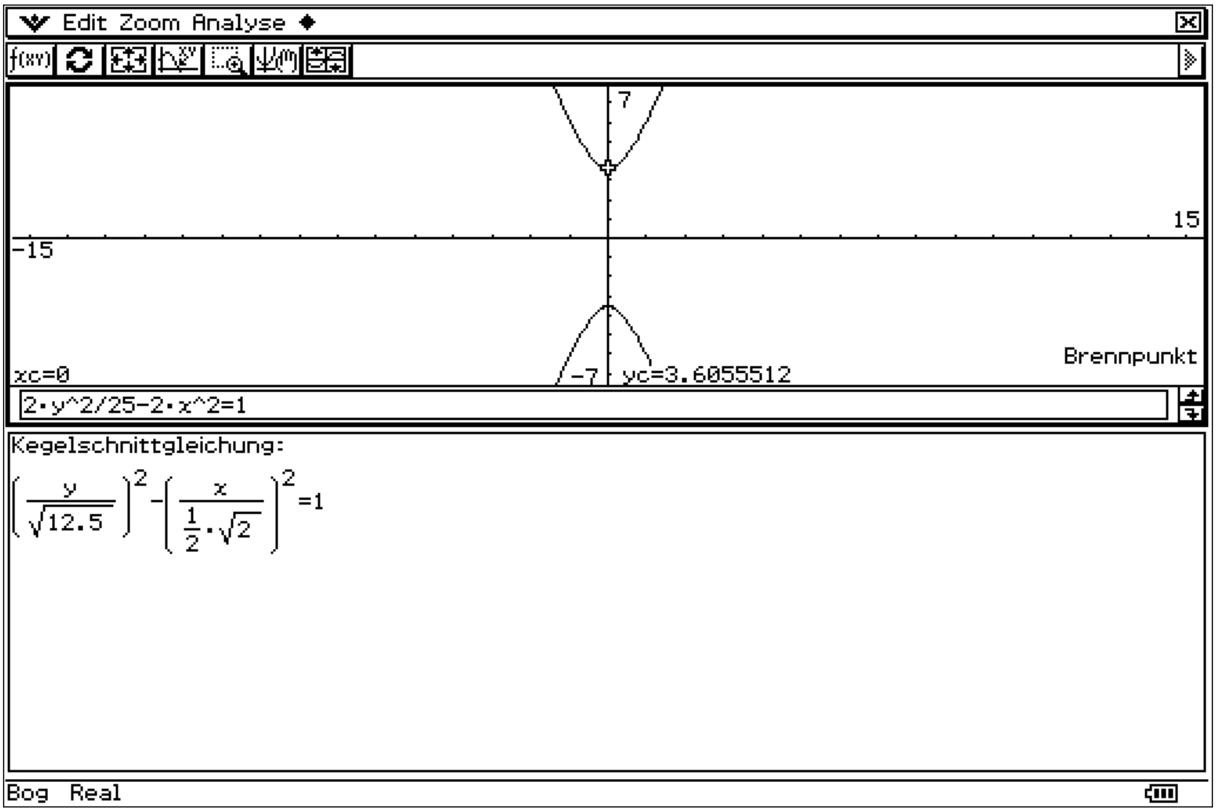


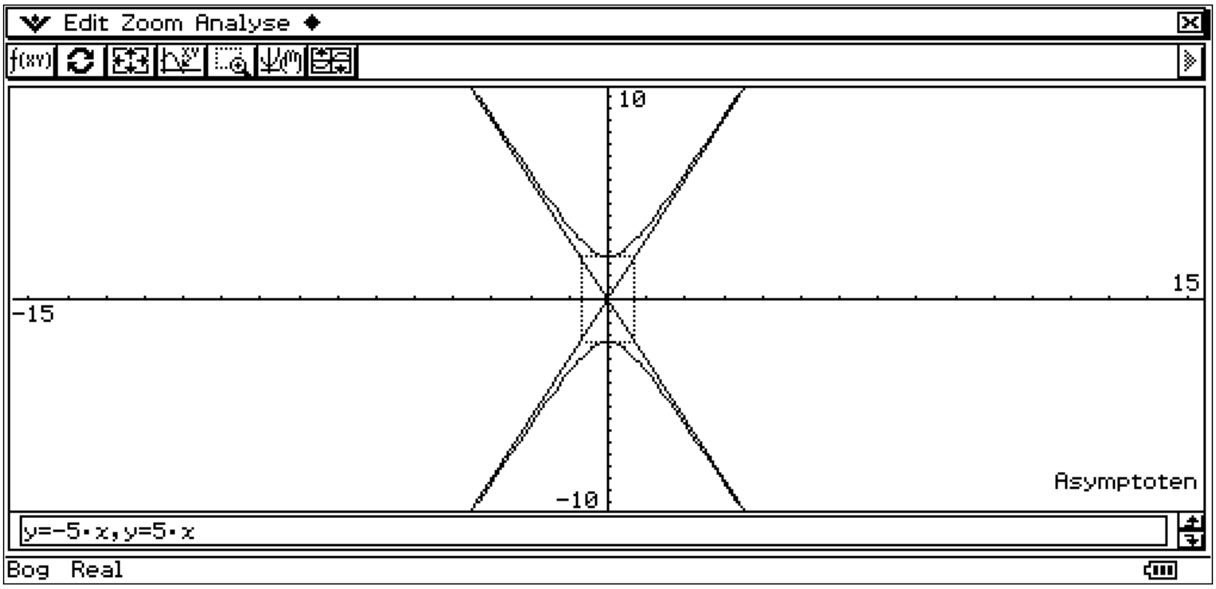
b)


Edit Zoom Analyse
24
36
-33
xc=10
-25
yc=0
Scheitel
x^2/100-y^2/2500=1
Kegelschnittgleichung:
$\left(\frac{x}{10}\right)^2-\left(\frac{y}{50}\right)^2=1$
Bog Real

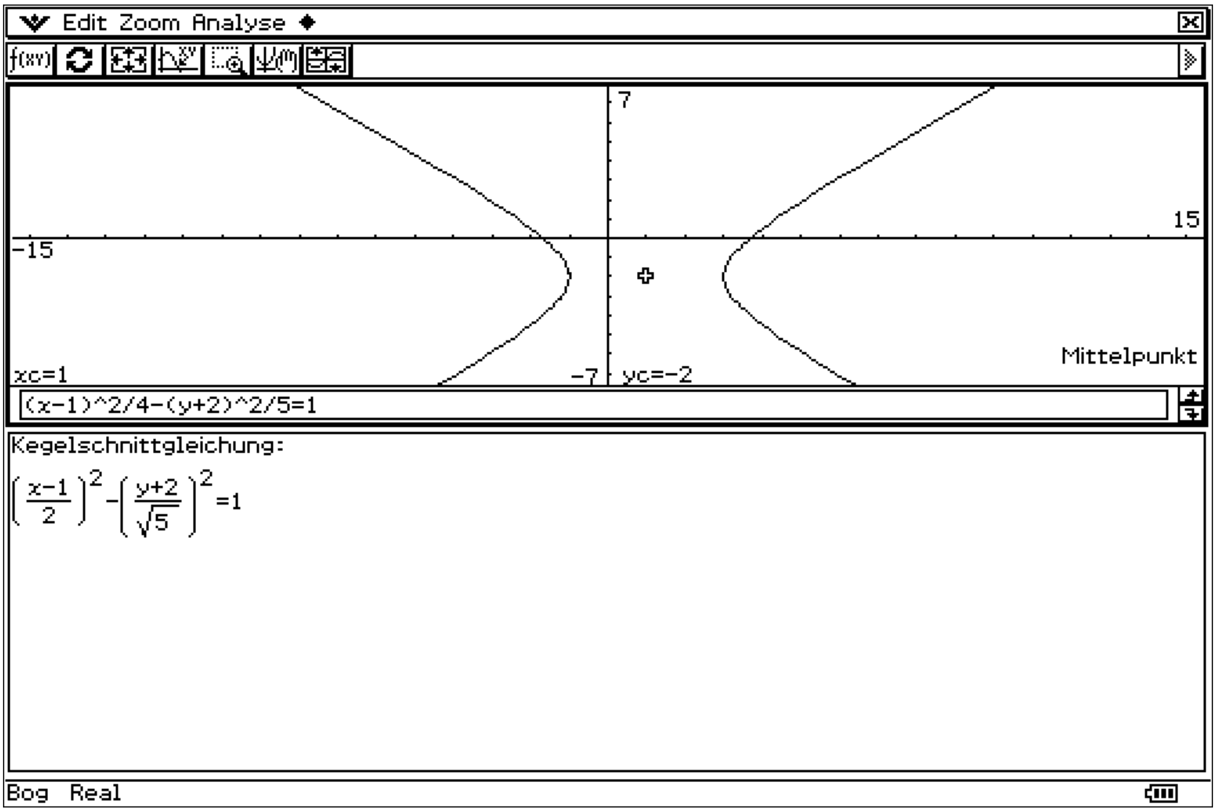

Edit Zoom Analyse
54
36
-33
-55
Asymptoten
y=-5·x,y=5·x
Bog Real

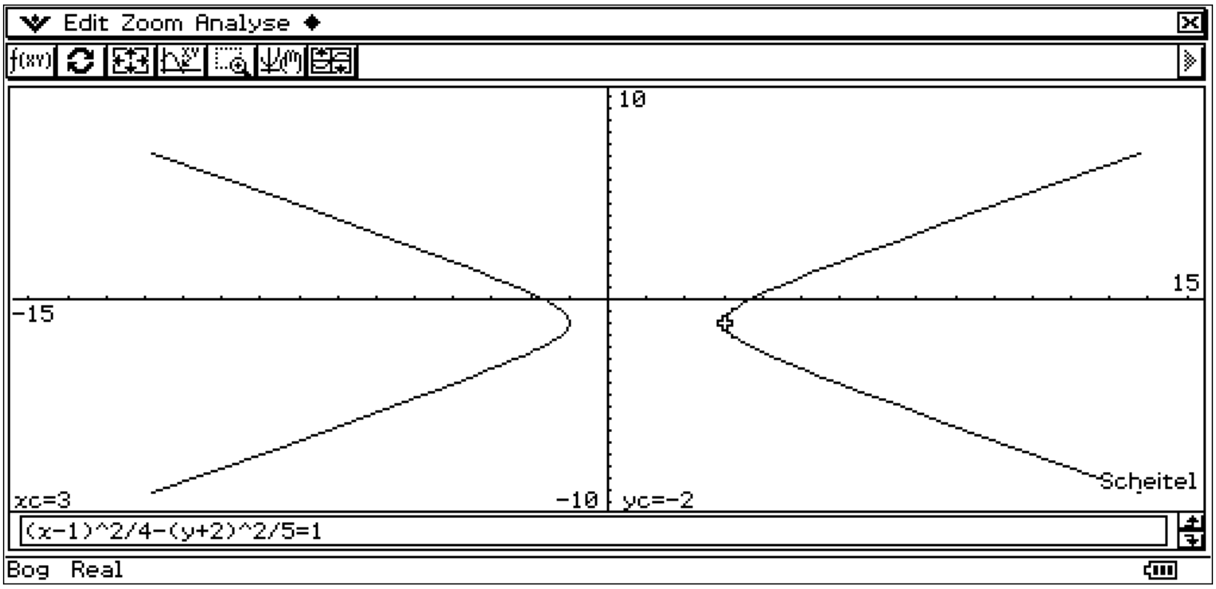
c)

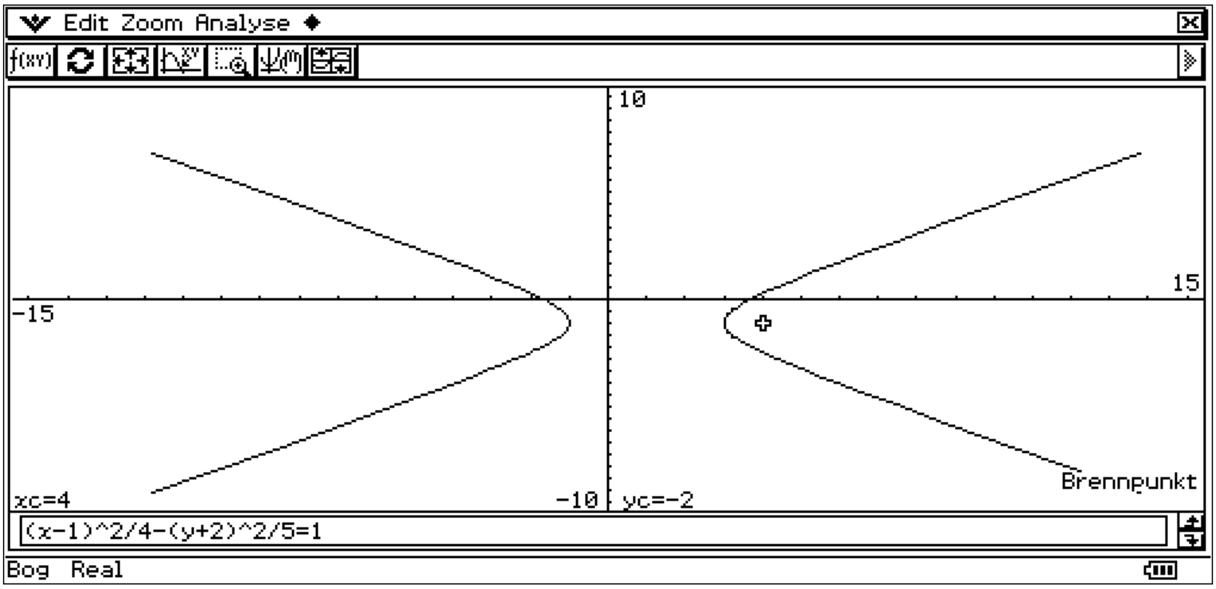

Edit Zoom Analyse
7
15
-15
Brennpunkt
xc=0
-7
yc=3.6055512
2•y^2/25-2•x^2=1
Kegelschnittgleichung:
$\left(\frac{y}{\sqrt{12.5}}\right)^2-\left(\frac{x}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}\right)^2=1$
Bog Real


Edit Zoom Analyse
10
15
-15
Asymptoten
-10
y=-5•x,y=5•x
Bog Real

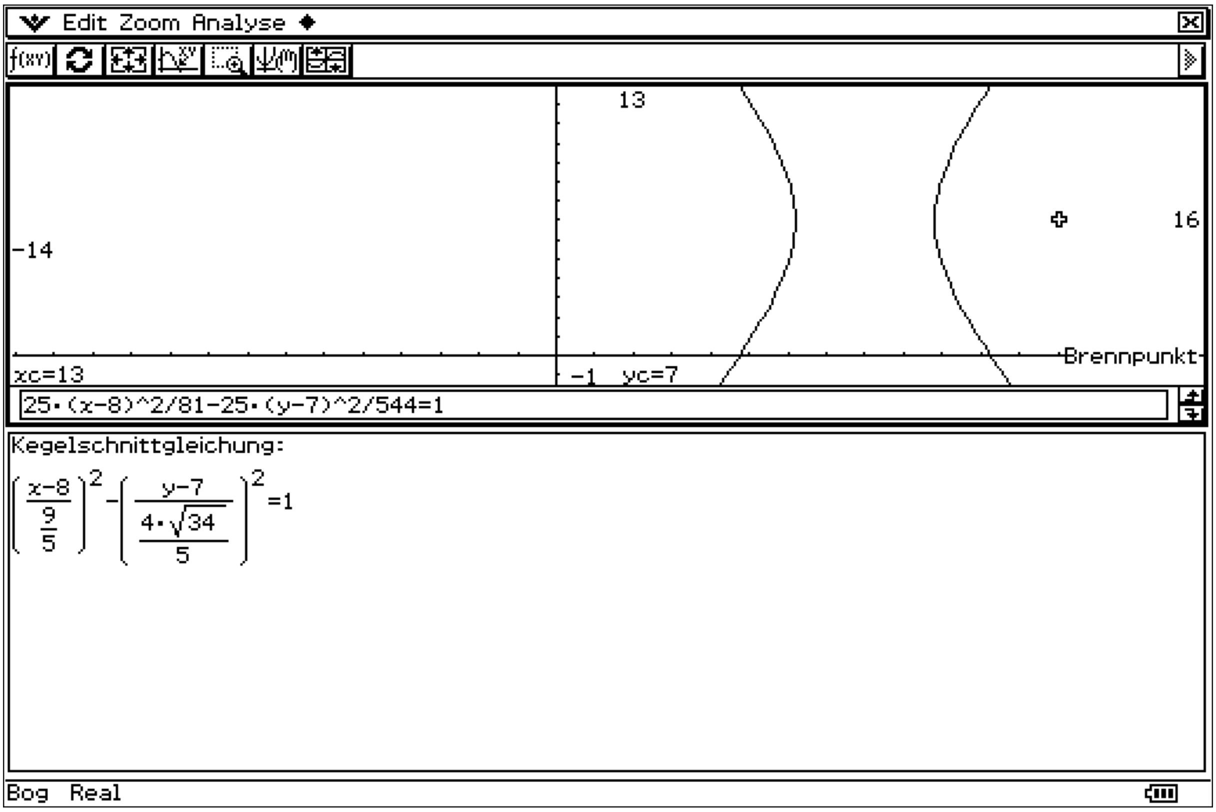
d)

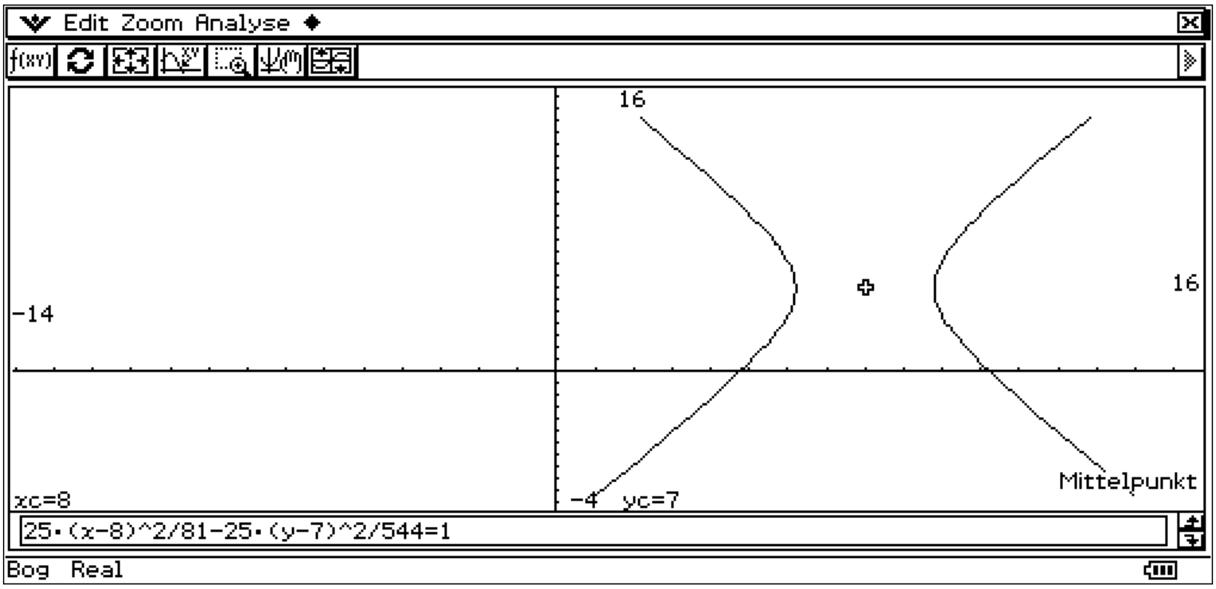

Edit Zoom Analyse
7
15
-15
xc=1
-7
yc=-2
Mittelpunkt
(x-1)^2/4-(y+2)^2/5=1
Kegelschnittgleichung:
$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-\left(\frac{y+2}{\sqrt{5}}\right)^2=1$
Bog Real


Edit Zoom Analyse
10
15
-15
xc=3
-10
yc=-2
Scheitel
(x-1)^2/4-(y+2)^2/5=1
Bog Real

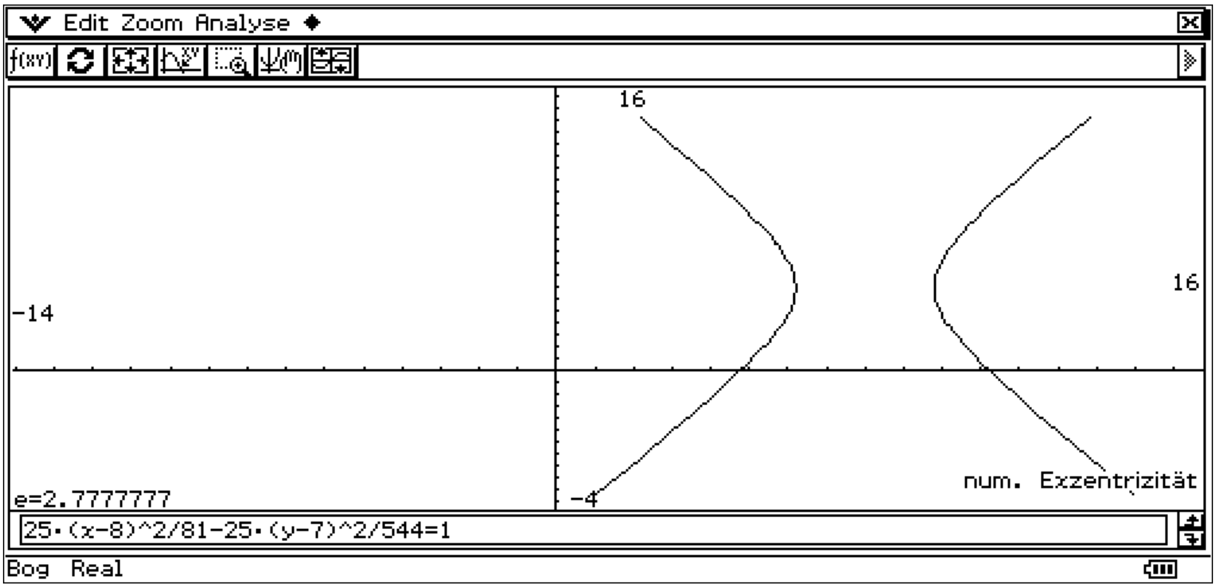

Edit Zoom Analyse
10
15
-15
xc=4
-10
yc=-2
Brennpunkt
(x-1)^2/4-(y+2)^2/5=1
Bog Real

e)


Edit Zoom Analyse
13
16
-14
xc=13
-1
yc=7
Brennpunkt
25·(x-8)^2/81-25·(y-7)^2/544=1
Kegelschnittgleichung:
$\left(\frac{x-8}{\frac{9}{5}}\right)^2-\left(\frac{y-7}{\frac{4\cdot\sqrt{34}}{5}}\right)^2=1$
Bog Real



Edit Zoom Analyse
16
16
-14
xc=8
-4
yc=7
Mittelpunkt
25·(x-8)^2/81-25·(y-7)^2/544=1
Bog Real



Edit Zoom Analyse
16
16
-14
e=2.7777777
-4
num. Exzentrizität
25·(x-8)^2/81-25·(y-7)^2/544=1
Bog Real