

## AUFGABE 12

Wir benutzen den im ClassPad vorhandenen Index  $k$  statt  $p$ .

Weiterhin nehmen wir an, dass der Koordinatenursprung im Erdkugelmittelpunkt liegt. Es sei  $r=6373\text{km}$  der Erdradius, wobei wir näherungsweise von der Erdkugel ausgehen. Wir bezeichnen die konstante Satellitenhöhe mit  $h$ , d.h.  $h=20183\text{km}$ .

Damit gilt für  $S_1$  bis  $S_3$ :

$$x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = (r+h)^2 \quad \text{mit } m=1,2,3,$$

und wir haben folgende zusätzliche Gleichung für  $N$ :

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = r^2.$$

Durch Quadrieren entsteht mit den quadrierten Abständen  $p_1^2, p_2^2, p_3^2$  folgendes überbestimmte quadratische Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1^2 = (x_k - x_1)^2 + (y_k - y_1)^2 + (z_k - z_1)^2 \\ p_2^2 = (x_k - x_2)^2 + (y_k - y_2)^2 + (z_k - z_2)^2 \\ p_3^2 = (x_k - x_3)^2 + (y_k - y_3)^2 + (z_k - z_3)^2 \\ (r+h)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ (r+h)^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ (r+h)^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \\ r^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \end{array} \right. \quad | \quad x_k, y_k, z_k$$

Wir vereinfachen die ersten drei Gleichungen mithilfe

der letzten Gleichungen:

$$p_1^2 = r^2 + (r+h)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_k - 2 \cdot y_1 \cdot y_k - 2 \cdot z_1 \cdot z_k \Rightarrow \text{Gl1}$$

$$p_1^2 = (h+r)^2 + r^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_k - 2 \cdot y_1 \cdot y_k - 2 \cdot z_1 \cdot z_k$$

$$p_2^2 = r^2 + (r+h)^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_k - 2 \cdot y_2 \cdot y_k - 2 \cdot z_2 \cdot z_k \Rightarrow \text{Gl2}$$

$$p_2^2 = (h+r)^2 + r^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_k - 2 \cdot y_2 \cdot y_k - 2 \cdot z_2 \cdot z_k$$

$$p_3^2 = r^2 + (r+h)^2 - 2 \cdot x_3 \cdot x_k - 2 \cdot y_3 \cdot y_k - 2 \cdot z_3 \cdot z_k \Rightarrow \text{Gl3}$$

$$p_3^2 = (h+r)^2 + r^2 - 2 \cdot x_3 \cdot x_k - 2 \cdot y_3 \cdot y_k - 2 \cdot z_3 \cdot z_k$$

Damit erhalten wir die Lösung sofort über das verbliebene lineare Gleichungssystem.

Wir versuchen noch, das Gleichungssystem verkürzt mithilfe von Matrizen, Vektoren und Determinanten zu beschreiben und zu lösen.

Die Matrix A ist hierbei nichts anderes als das zweifache Spatprodukt der Ortsvektoren zu  $S_1$  bis  $S_3$ , die als linear unabhängig angesehen werden können. Damit ist  $\det(\text{MatrixA}) \neq 0$ .

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 & 2 \cdot y_1 & 2 \cdot z_1 \\ 2 \cdot x_2 & 2 \cdot y_2 & 2 \cdot z_2 \\ 2 \cdot x_3 & 2 \cdot y_3 & 2 \cdot z_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{MatrixA}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 & 2 \cdot y_1 & 2 \cdot z_1 \\ 2 \cdot x_2 & 2 \cdot y_2 & 2 \cdot z_2 \\ 2 \cdot x_3 & 2 \cdot y_3 & 2 \cdot z_3 \end{bmatrix}$$

`simplify(det(MatrixA))`

$$8 \cdot (x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 - x_1 \cdot y_3 \cdot z_2 - x_2 \cdot y_1 \cdot z_3 + x_2 \cdot y_3 \cdot z_1 + x_3 \cdot y_1 \cdot z_2 - x_3 \cdot y_2 \cdot z_1)$$

$$\begin{bmatrix} r^2+(r+h)^2-p_1^2 \\ r^2+(r+h)^2-p_2^2 \\ r^2+(r+h)^2-p_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rechteS}$$

$$\begin{bmatrix} (h+r)^2-p_1^2+r^2 \\ (h+r)^2-p_2^2+r^2 \\ (h+r)^2-p_3^2+r^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \Rightarrow \text{unbekN}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

Die Lösung ist damit berechenbar als (vgl. Cramersche Regel)

Matrix  $A^{-1} \times \text{rechteS} \Rightarrow \text{unbekN}$

$$\begin{bmatrix} \frac{((h+r)^2-p_1^2+r^2) \cdot (4 \cdot y_2 \cdot z_3 - 4 \cdot y_3 \cdot z_2)}{8 \cdot x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 - 8 \cdot x_1 \cdot y_3 \cdot z_2 - 8 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot z_3 + 8 \cdot x_2 \cdot y_3 \cdot z_1 + 8 \cdot x_3 \cdot y_1 \cdot z_2 - 8 \cdot x_3 \cdot y_2 \cdot z_1} \\ \frac{-((h+r)^2-p_1^2+r^2) \cdot (4 \cdot x_2 \cdot z_3 - 4 \cdot x_3 \cdot z_2)}{8 \cdot x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 - 8 \cdot x_1 \cdot y_3 \cdot z_2 - 8 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot z_3 + 8 \cdot x_2 \cdot y_3 \cdot z_1 + 8 \cdot x_3 \cdot y_1 \cdot z_2 - 8 \cdot x_3 \cdot y_2 \cdot z_1} \\ \frac{((h+r)^2-p_1^2+r^2) \cdot (4 \cdot x_2 \cdot y_3 - 4 \cdot x_3 \cdot y_2)}{8 \cdot x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 - 8 \cdot x_1 \cdot y_3 \cdot z_2 - 8 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot z_3 + 8 \cdot x_2 \cdot y_3 \cdot z_1 + 8 \cdot x_3 \cdot y_1 \cdot z_2 - 8 \cdot x_3 \cdot y_2 \cdot z_1} \end{bmatrix}$$

**Zusammengefaßt:**

$$x_k = \frac{\det \begin{bmatrix} -p_1^2 + r^2 + (r+h)^2 & y_1 & z_1 \\ -p_2^2 + r^2 + (r+h)^2 & y_2 & z_2 \\ -p_3^2 + r^2 + (r+h)^2 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}}{2 \times \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}},$$

$$y_k = \frac{\det \begin{bmatrix} x_1 & -p_1^2 + r^2 + (r+h)^2 & z_1 \\ x_2 & -p_2^2 + r^2 + (r+h)^2 & z_2 \\ x_3 & -p_3^2 + r^2 + (r+h)^2 & z_3 \end{bmatrix}}{2 \times \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}},$$

$$z_k = \frac{\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & -p_1^2 + r^2 + (r+h)^2 \\ x_2 & y_2 & -p_2^2 + r^2 + (r+h)^2 \\ x_3 & y_3 & -p_3^2 + r^2 + (r+h)^2 \end{bmatrix}}{2 \times \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}}.$$

Auf die Angabe anderer Lösungswege wird an dieser Stelle verzichtet, da diese auf analytisch komplizierte Wurzelterme führen und keine einfachere Lösungsdarstellung liefern.

Man überlege sich in diesem Zusammenhang, dass der Schnitt zweier Kugeln (z.B. um  $S_1$  bzw.  $S_2$  mit den Radien  $p_1$  bzw.  $p_2$ ) einen Schnittkreis ergibt und dieser im Schnitt mit der dritten Kugel um  $S_3$ , Radius  $p_3$ , im Allgemeinen zwei mögliche Lösungen

für N ergibt.

Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.267

### AUFGABE 13

#### Quellenhinweis:

<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mars>

Es gilt  $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7185^2 - 7181^2} = 239,7165 \text{ km}$ .

$$\text{approx}\left(\sqrt{7185^2 - 7181^2}\right)$$

239.7164992

Damit gilt (Erdradius  $r=6373 \text{ km}$ ) für den erdnächsten Punkt die Entfernung (Perigäum)  $a - e - r = 572 \text{ km}$ .

$$\text{approx}\left(7185 - \sqrt{7185^2 - 7181^2} - 6373\right)$$

572.2835008

Für den erdfernsten Punkt gilt die Entfernung (Apogäum)  $a + e - r = 1072 \text{ km}$ .

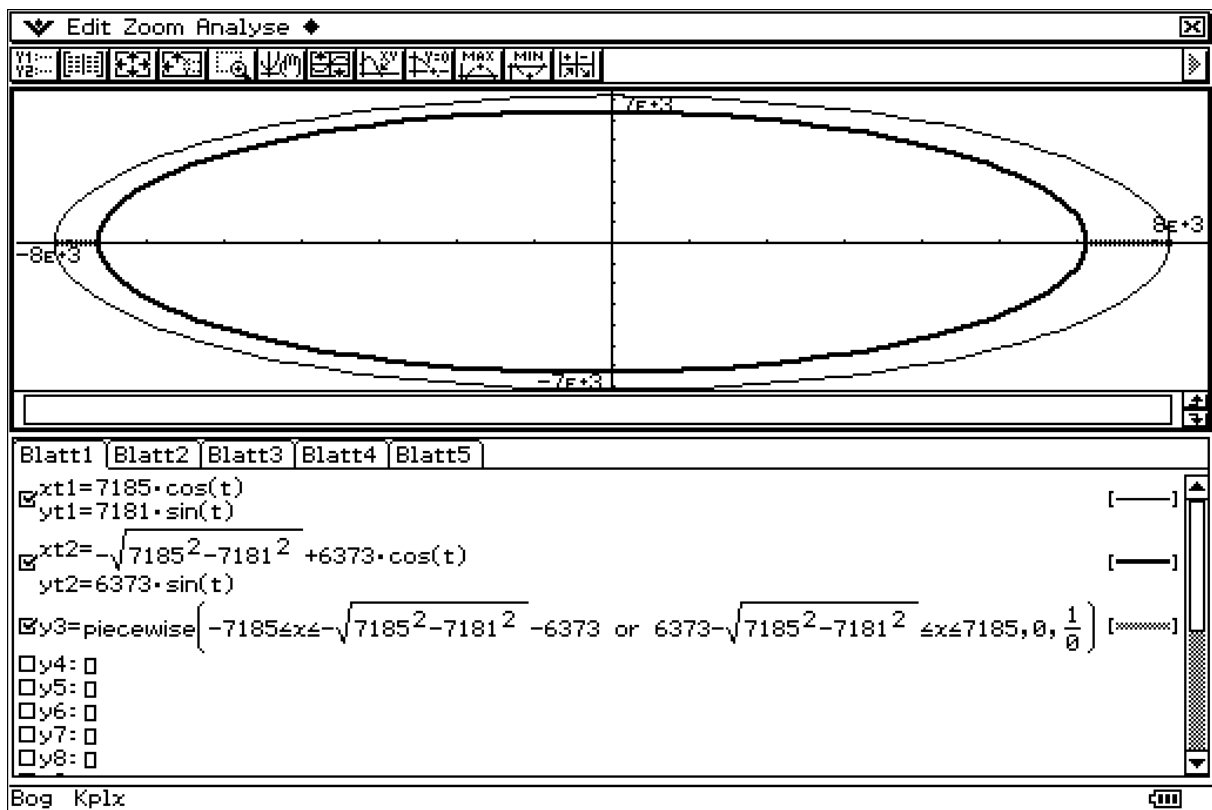
$$\text{approx}\left(7185 + \sqrt{7185^2 - 7181^2} - 6373\right)$$

1071.716499

<b>Ellipse im 2D-Grafik-Menü</b>
----------------------------------

Y1:...
Y2:...

Lösung AUFGABE 13 im 2D-Grafik-Menü (Ellipse in x-Richtung gestreckt!)



Unverzerrte Darstellung (Skalierung der Achsen in 1000km Einheiten):

