Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT, S.244

AUFGABE 19
Wir sehen uns die Situation in der 3D-Grafik an.

Kugeloberfläche

a) In Kugelkoordinaten gelten die Transformationen gemäß Satz 5.9

Kugelkoordinaten für S: $\begin{bmatrix} r \\ \angle(\theta) \\ \angle(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \angle(-122°) \\ \angle(54°) \end{bmatrix}$

Der 36. Breitengrad hat vom Nordpol aus gesehen (90° nördliche Breite) den Winkelabstand 54°.
Die Längengrade entsprechen denen, die wir in der Mathematik für die Kugelkoordinaten nutzen.

Umrechnung in kartesische Koordinaten mittels dem **toRect**-Befehl:

$$\mathrm{toRect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \angle(-122°) \\ \angle(54°) \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\left(\frac{61\cdot\pi}{90}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} \\ \dfrac{-\sin\left(\frac{61\cdot\pi}{90}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2\cdot\left(-\sqrt{5}+5\right)}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{approx}\left(\operatorname{toRect}\left(\begin{bmatrix}1\\ \angle(-122°)\\ \angle(54°)\end{bmatrix}\right)\right)$$

$$\begin{bmatrix}-0.4287136904\\ -0.6860853218\\ 0.5877852523\end{bmatrix}$$

b)

Kugelkoordinaten für T: $\begin{bmatrix}r\\ \angle(\theta)\\ \angle(\phi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \angle(140°)\\ \angle(54°)\end{bmatrix}$

$$\operatorname{toRect}\left(\begin{bmatrix}1\\ \angle(140°)\\ \angle(54°)\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\cos\left(\frac{7\cdot\pi}{9}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}\\ \dfrac{\sin\left(\frac{7\cdot\pi}{9}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2\cdot\left(-\sqrt{5}+5\right)}}{4}\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{approx}\left(\operatorname{toRect}\left(\begin{bmatrix}1\\ \angle(140°)\\ \angle(54°)\end{bmatrix}\right)\right)$$

$$\begin{bmatrix}-0.6197429729\\ 0.5200261\\ 0.5877852523\end{bmatrix}$$

c) Der Radius c des Breitenkreises ergibt sich aus den x- und y-Koordinaten von S bzw. T.

$$\sqrt{\left(\frac{\cos\left(\frac{7\cdot\pi}{9}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}\right)^2+\left(\frac{\sin\left(\frac{7\cdot\pi}{9}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}\right)^2} \rightarrow c$$

$$\frac{\sqrt{2\cdot\left(\left(\cos\left(\frac{7\cdot\pi}{9}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{7\cdot\pi}{9}\right)\right)^2\right)\cdot\left(\sqrt{5}+3\right)}}{4}$$

simplify(c)

$$\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+6}}{4}$$

approx(c)→c

0.8090169944

Der Winkelabstand von S nach T beträgt
(180°−122°)+(180°−140°)=58°+40°=98°.
Damit beträgt die Länge des Kreisbogens
$2\pi\times c\times\frac{98°}{360°}=1.383761$ Einheiten, denn

$$\text{approx}\left(2\pi\times c\times\frac{98°}{360°}\right)$$

1.383761005

Mit dem Faktor 6370km ergibt sich eine Flugstrecke
von 8815km.

$$\text{approx}\left(2\pi\times c\times\frac{98°}{360°}\times 6370\right)$$

8814.557603

d) Der Großkreis hat den Radius c = 1
Längeneinheit.
Der Raumwinkel ∠SMT wird über die Radiusverktoren
von M nach S bzw. T berechnet.
Es gilt cos(∠SMT) =

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}-0.4287136904\\-0.6860853218\\0.5877852523\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.6197429729\\0.5200261\\0.5877852523\end{bmatrix}\right)$$ und somit

$$\text{approx}\left(\cos^{-1}\left(\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}-0.4287136904\\-0.6860853218\\0.5877852523\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.6197429729\\0.5200261\\0.5877852523\end{bmatrix}\right.\right.\right.$$

1.313567509

in Altgrad $1.313567509\times\frac{180°}{\pi}=75.26°$

$$\text{approx}\left(1.313567509\times\frac{180}{\pi}\right)$$

75.26187437

Analog zu c) erhalten wir nun eine kürzere Flugstrecke von lediglich 8367km.

$$\text{approx}\left(2\pi\times1\times\frac{75.26187437°}{360°}\times6370\right)$$

8367.425032

e) Die Ortsvektoren von M nach S bzw. T sind gleichzeitig linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene.
Es sei P(x/y/z) ein weiterer Punkt der Ebene. Dann sind die drei Vektoren von M nach S bzw. T bzw. P linear abhängig und erzeugen eine Null-Determinante:

$$\det\left(\text{augment}\left(\text{augment}\left(\begin{bmatrix}-0.4287136904\\-0.6860853218\\0.5877852523\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.6197429\\0.5200261\\0.58778525\end{bmatrix}\right.\right.\right.$$

$$\frac{-2996885556497234445\cdot x}{4227309475829505598}-\frac{3113604951506317\cdot y}{2772968137863371901}-\frac{407}{62}$$

approx(ans)

$$-0.7089345064\cdot x-0.112284195\cdot y-0.6481388654\cdot z=0$$

Damit lautet die parameterfreie Ebenengleichung vereinfacht $0.7089\cdot x+0.1123\cdot y+0.6481\cdot z=0$.
Eine Parameterdarstellung wäre hier:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \times \begin{bmatrix} -0.4287136904 \\ -0.6860853218 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix} + t \times \begin{bmatrix} -0.6197429729 \\ 0.5200261 \\ 0.5877852523 \end{bmatrix}$$ mit

$s, t \in \mathbb{R}$.

Für den Breitenkreis gilt die Parameterdarstellung:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8090169944 \times \cos(t) \\ 0.8090169944 \times \sin(t) \\ 0.5877852523 \end{bmatrix}$$ mit $-\pi < t \leq \pi$.

Für den Großkreis wird die Lösungsmenge der Ebene und der Kugel in Parameterdarstellung gebracht:

$x^2+y^2+z^2=1$ und

$-0.7089345064 \cdot x - 0.112284195 \cdot y - 0.6481388654 \cdot z = 0$

Mit dem Taschenrechner kann problemlos die vorhandene Ebenengleichung verarbeitet werden.

$$x^2+y^2+z^2=1 \,|\, z=\frac{0.7089345064 \cdot x + 0.112284195 \cdot y}{-0.6481388654} \Rightarrow Gl1$$

$$x^2+y^2+\frac{729032499556 \cdot \left(\frac{600878 \cdot x}{847579}+\frac{443351 \cdot y}{3948472}\right)^2}{306254880409}=1$$

Für die entstandene Ellipsengleichung nutzen wir den Ansatz $x=a(t) \times \cos(t)$ und $y=a(t) \times \sin(t)$ und bestimmen $a(t)$

$Gl1 \,|\, x=a \times \cos(t) \Rightarrow Gl2$

$$y^2+a^2\cdot(\cos(t))^2+\frac{729032499556\cdot\left(\frac{443351\cdot y}{3948472}+\frac{600878\cdot}{847}\right.}{306254880409}\blacktriangleright$$

G12|y=a×sin(t)→G13

$$a^2\cdot(\cos(t))^2+a^2\cdot(\sin(t))^2+\frac{729032499556\cdot\left(\frac{600878\cdot a}{8475}\right.}{30625}\blacktriangleright$$

Wir vereinfachen zu

$$a^2+\frac{729032499556\cdot\left(\frac{600878\cdot a\cdot\cos(t)}{847579}+\frac{443351\cdot a\cdot\sin(t}{3948472}\right.}{306254880409}\blacktriangleright$$

$$a^2+2.38048\cdot(0.70893\cdot a\cdot\cos(t)+0.11228\cdot a\cdot\sin(t))^2=\blacktriangleright$$

▯

und lösen nach a auf:

$$a^2+\left(\sqrt{2.380476349}\cdot 0.7089345064\cdot a\cdot\cos(t)+\sqrt{2.3804}\right.\blacktriangleright$$

$$a^2+(1.09380\cdot a\cdot\cos(t)+0.17324\cdot a\cdot\sin(t))^2=1.00000$$

Wir rechnen mit gerundeten Zahlen zuende:

$a^2\times\left(1+(1.09380\cdot\cos(t)+0.17324\cdot\sin(t))^2\right)=1$ und erhalten für den Großkreis

$$\text{Define } a(t)=\frac{1}{\sqrt{1+(1.09380\cdot\cos(t)+0.17324\cdot\sin(t))^2}}$$

done

$$\text{Define } x(t)=\frac{\cos(t)}{\sqrt{1+(1.09380\cdot\cos(t)+0.17324\cdot\sin(t))^2}}$$

done

$$\text{Define } y(t)=\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+(1.09380\cdot\cos(t)+0.17324\cdot\sin(t))^2}}$$

done

Define $z(t)=\dfrac{-1.09380\cdot\cos(t)-0.17324\cdot\sin(t)}{\sqrt{1+(1.09380\cdot\cos(t)+0.17324\cdot\sin(t))^2}}$

done

f) Die Tangentialebenen finden wir mithilfe der Normalenvektoren in S bzw. T, die den Ortsvektoren von M zu S bzw. T entsprechen. Es sei wieder P(x/y/z) ein Punkt in der Tangentialebene. Der Vektor von P nach S bzw. T ist orthogonal zu dem entsprechenden Normalenvektor.
Für S erhalten wir:
$0.42871\cdot x+0.68609\cdot y-0.58779\cdot z+1=0$, denn

DelVar x,y,z

done

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}-0.4287136904\\-0.6860853218\\0.5877852523\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.4287136904\\-0.6860853218\\0.5877852523\end{bmatrix}\right)=0$$

$0.42871\cdot(x+0.42871)+0.68609\cdot(y+0.68609)-0.58779\cdot$ ▸

expand(ans)

$0.42871\cdot x+0.68609\cdot y-0.58779\cdot z+1.00000=0.00000$

Für T erhalten wir:
$0.61974\cdot x-0.52003\cdot y-0.58779\cdot z+1=0$, denn

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}-0.6197429729\\0.5200261\\0.5877852523\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.6197429729\\0.5200261\\0.5877852523\end{bmatrix}\right)=0$$

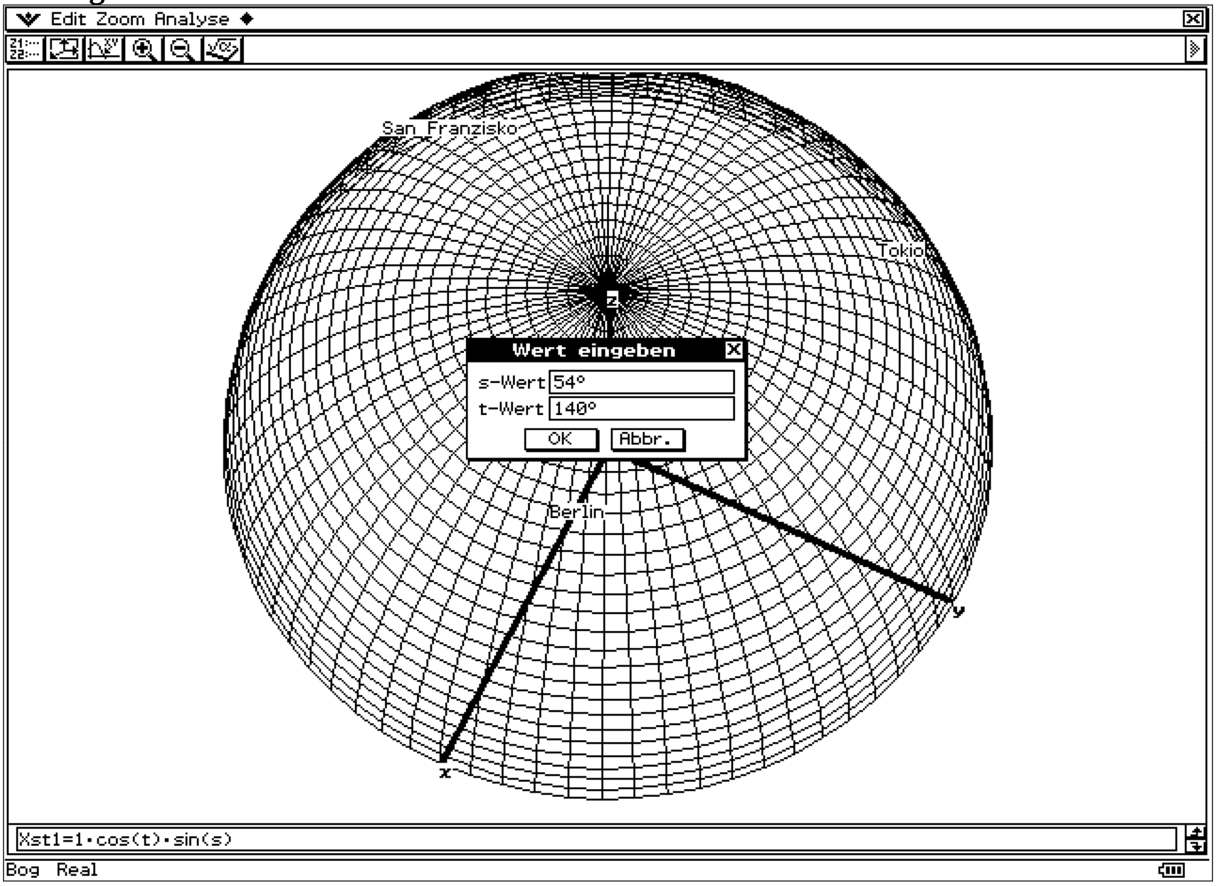
$0.61974\cdot(x+0.61974)-0.52003\cdot(y-0.52003)-0.58779\cdot$ ▸

expand(ans)

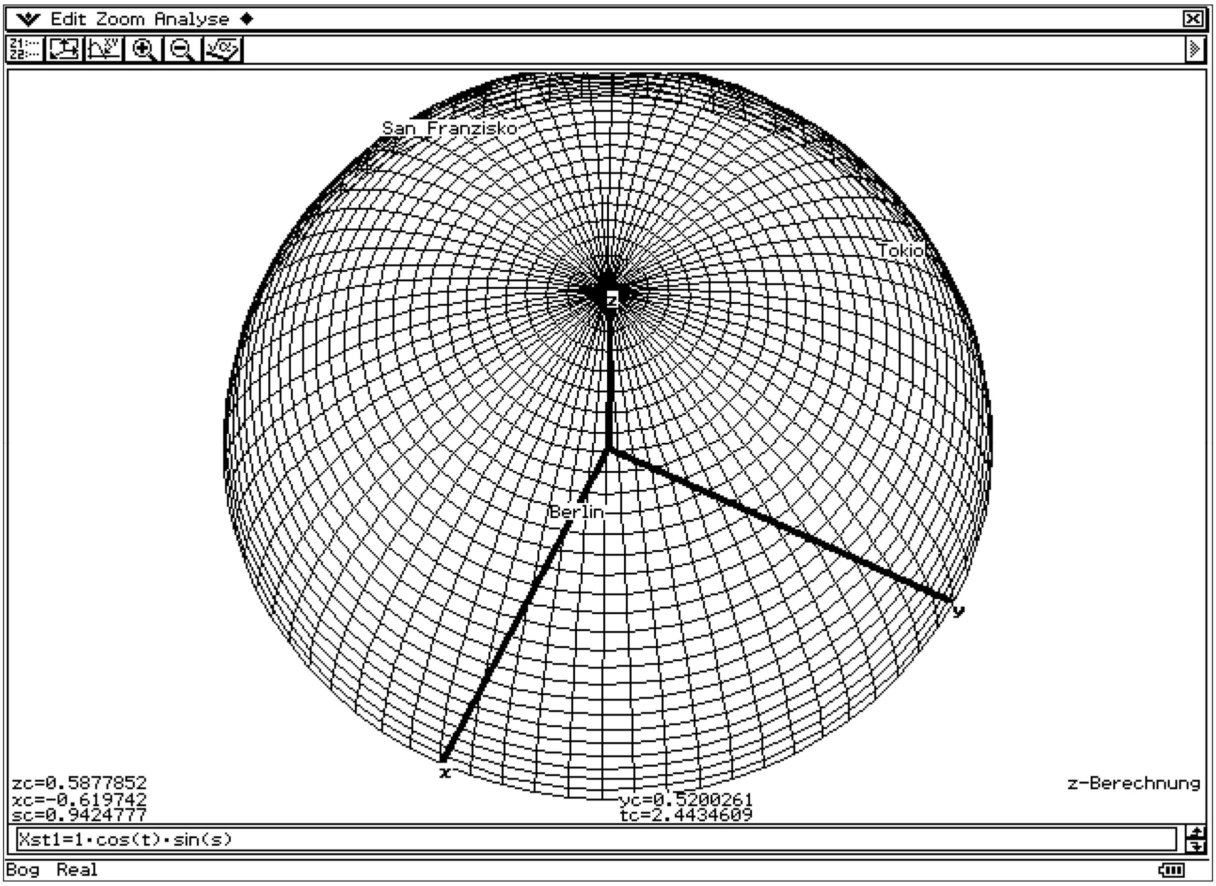
$0.61974\cdot x-0.52003\cdot y-0.58779\cdot z+1.00000=0.00000$

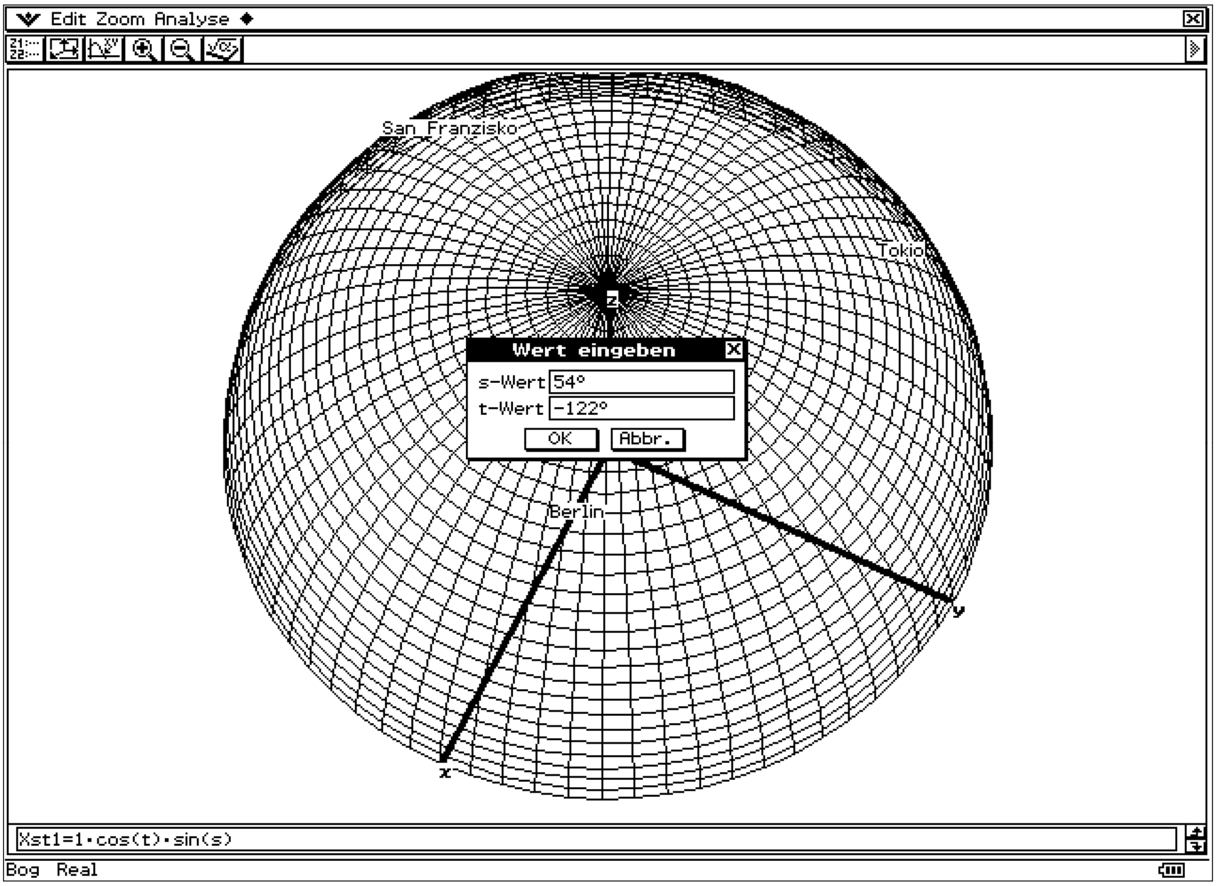
Prof. Dr. L. Paditz, Sachsen 13NT S.244

Lösung AUFGABE 19 im 3D-Grafik-Menü

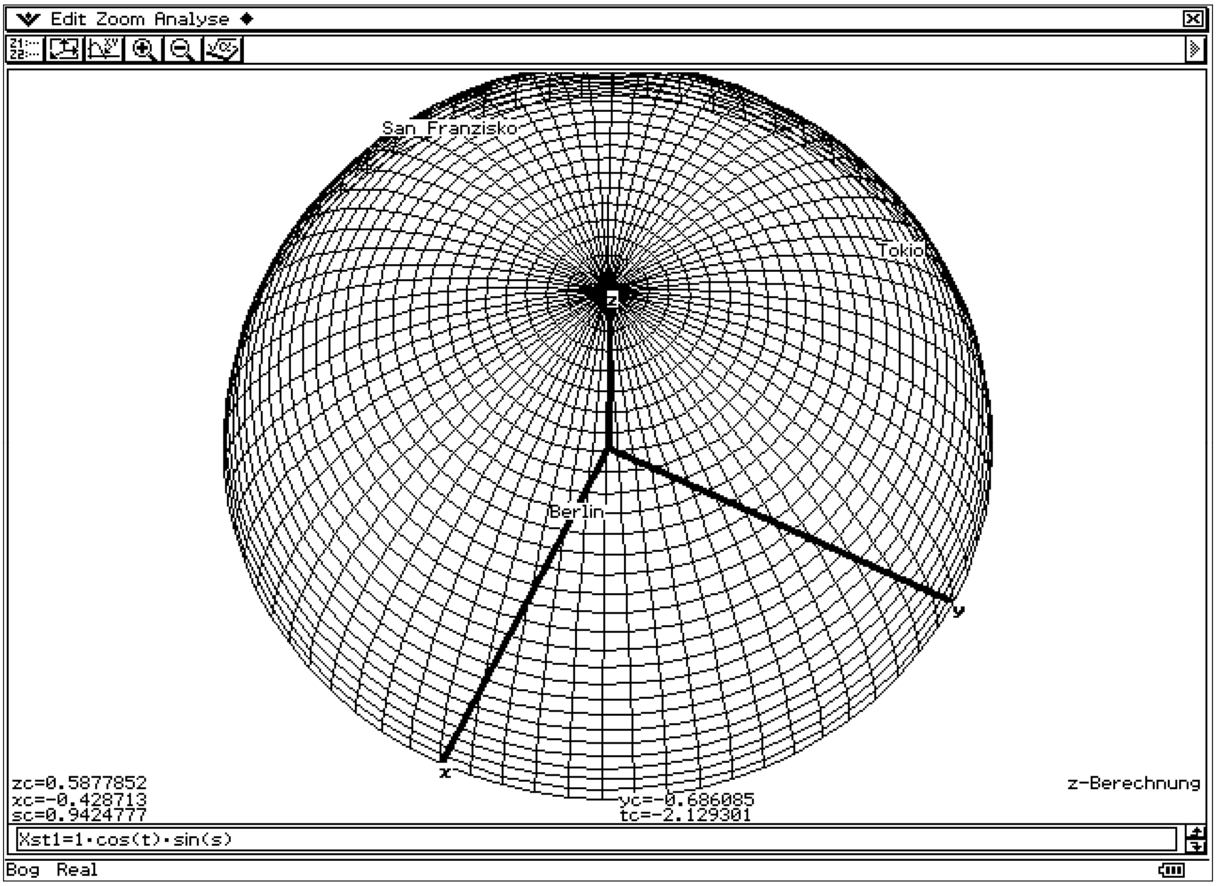


Daten für Tokio

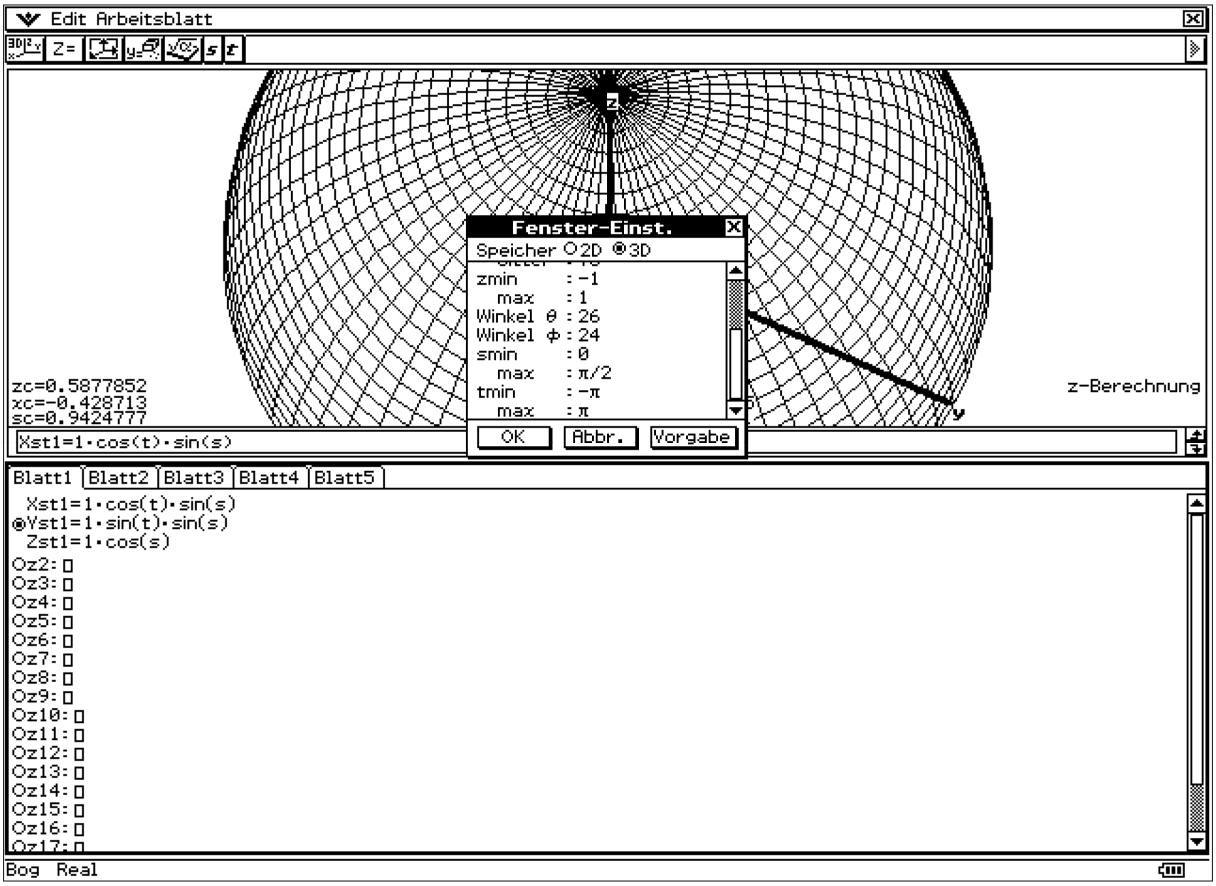


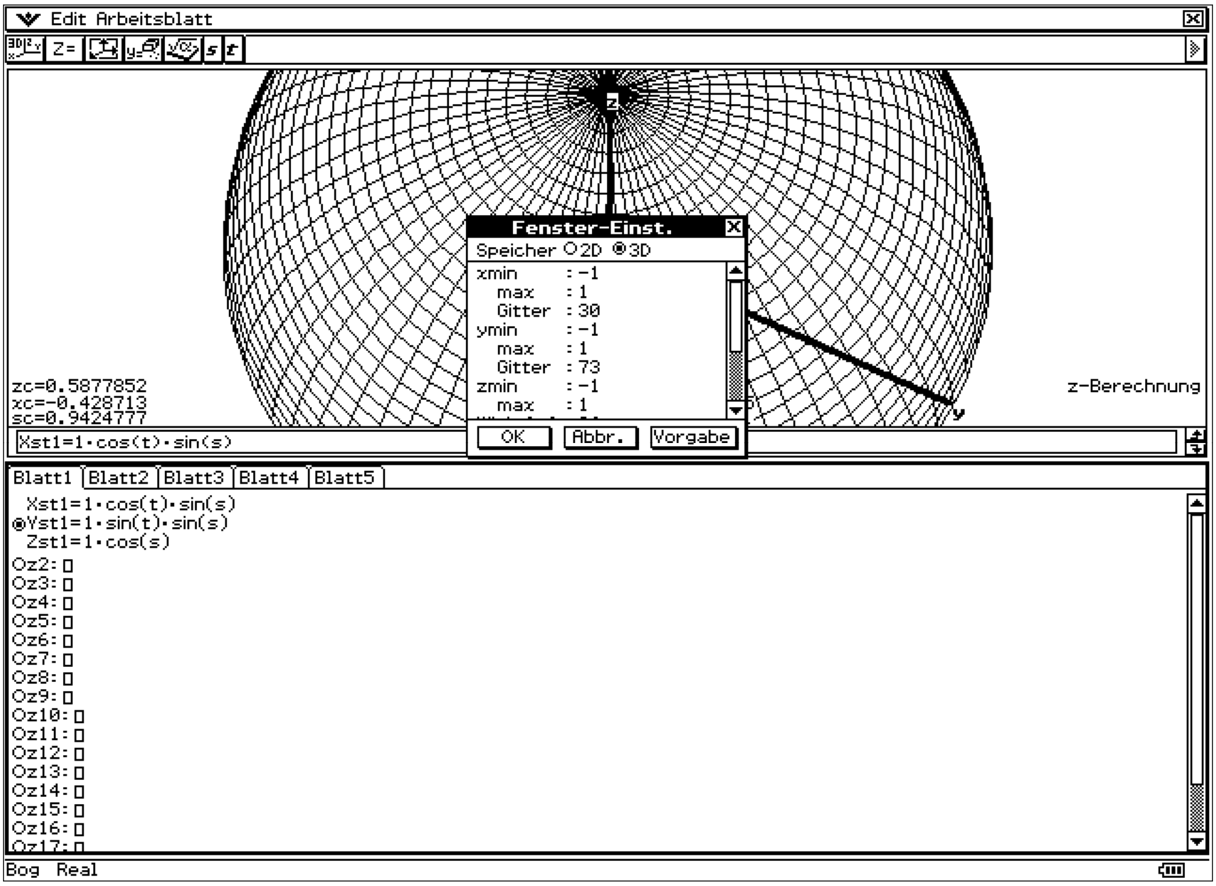


Daten für San Franzisko



Blick von Europa über die Nordhalbkugel hinweg.
Die Lage der Städte wurde als Textfeld eingetragen. Zum Vergleich Lage von Berlin.





Die Fenster-Einstellungen beinhalten 30 Gitterlinien für den Parameter s (Breitenkreise) und 73 Gitterlinien für den Parameter t (Meridiane vom Nordpol zum Äquator).